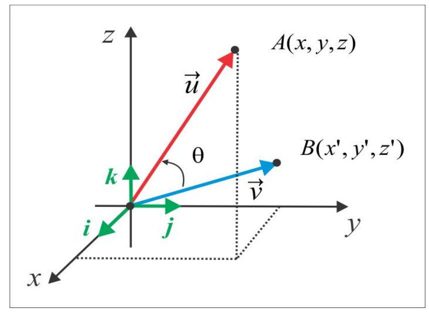
# Introdução

Quando tratamos com vetores geométricos determinados por dois pontos do espaço, as noções de ângulo e comprimento tornam-se bem claras. Na figura ao lado ilustramos dois vetores $u$ e $v$ e o ângulo $\theta$ entres eles, onde vemos que

$$\vec{u} = OA = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = OB = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}.$$




Define-se a *norma* (ou comprimento) e o *produto interno* (ou produto escalar) no espaço $\mathbb{R}^3$ por:

| | |
|---|---|
| **NORMA:** | $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ |
| **PRODUTO INTERNO:** | $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta.$ |

Quando o ângulo $\theta$ for $\pi/2$, diremos que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais ou perpendiculares e anotamos $\vec{u} \perp \vec{v}$. Considerando que os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são unitários e mutuamente ortogonais, obtemos a seguinte expressão para o produto interno em coordenadas:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy' + zz' \tag{7.1}$$

e as seguintes propriedades são válidas sejam quais forem os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e seja qual for o escalar $\lambda$:

1. $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = 0.$

2. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}.$

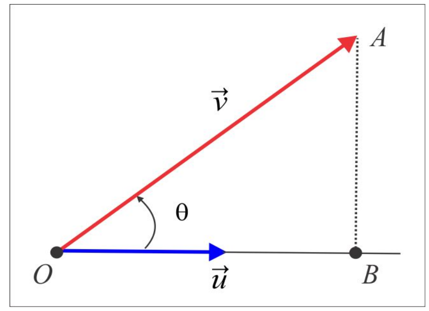
3. $(\lambda \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v})\,.$

4. $\vec{u} \bullet (\vec{v} + w) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet w \quad \text{e} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \bullet w = \vec{u} \bullet w + \vec{v} \bullet w.$

Com o objetivo de interpretar geometricamente o produto interno, deixe-nos considerar dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo $\vec{u}$ um vetor unitário, isto é, $\|\vec{u}\| = 1$.

Na figura ao lado, o vetor $\overrightarrow{OB}$ representa a *projeção ortogonal* do vetor $\vec{v}$ sobre o vetor $\vec{u}$. Esta projeção ortogonal é representada por $\text{Proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ e um cálculo simples nos dá:

$$\text{Proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} = ||\overrightarrow{OB}|| \cdot \vec{u} = \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{||\vec{u}||^2}\right) \cdot \vec{u},$$




e, consequentemente, $\|\text{Proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}\| = |\vec{u} \bullet \vec{v}|$. De certa forma, o produto interno $\vec{u} \bullet \vec{v}$ pode ser visto como o comprimento da projeção ortogonal $\text{Proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ e o vetor $\vec{v} - \text{Proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}$ é ortogonal ao vetor $\vec{u}$. De fato, basta observar que:

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet (\vec{v} - \text{Proj}_{\vec{u}}\,\vec{v}) &= \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \text{Proj}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\right)\vec{u} \\ &= \vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \vec{v} = 0. \end{aligned}$$

**EXEMPLO 7.0.1 (Um Produto Interno no $\mathbb{R}^n$)** *Podemos usar o produto escalar* (7.1) *como guia para definir um produto interno no espaço $\mathbb{R}^n$. Dados $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vetores do $\mathbb{R}^n$, o produto interno*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{7.2}$$

*é conhecido por produto interno usual do $\mathbb{R}^n$. A norma induzida por esse produto interno é*:

$$\|u\| = \sqrt{u \bullet v} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Em um espaço vetorial $V$, em que os objetos (vetores) não são, necessariamente, vetores geométricos (setas) as noções de comprimento e ângulo, embora bem definidas, não são tão óbvias. Por *produto interno* em $V$ entendemos uma operação que associa a cada par de vetores $(u, v)$ um escalar $\langle u, v\rangle$, preservando as propriedades do produto escalar entre vetores geométricos. Em símbolos, um produto interno em $V$ é uma aplicação

$$B : V \times V \to \mathbb{R}, \quad B\,(u, v) = \langle u, v\rangle$$

com as seguintes propriedades válidas para $u, v$ e $w$ em $V$ e $\lambda$ escalar:

1. $\langle u, u\rangle \geq 0, \quad \forall\, u \in V \quad$ e $\quad \langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$. **($B$ é positiva definida)**
2. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \quad \forall\, u, v \in V.$ **($B$ é simétrica)**

3. $\langle u, \lambda \cdot v + w \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$ e $\langle \lambda \cdot u + v, w \rangle = \lambda \cdot \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$. (**$B$ é bilinear)**

Um produto interno induz no espaço $V$ uma norma (distância), definida por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, a qual goza das seguintes propriedades:

(N1) $\|u\| \geq 0, \quad \forall\, u \in V$ e $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0.$ (o único vetor de norma 0 é o vetor nulo)

(N2) $\|\lambda \cdot u\| = |\lambda| \, \|u\|, \quad \forall\, u \in V, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$ (propriedade homogênea)

(N3) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|, \quad \forall\, u, v \in V.$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

(N4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall\, u, v \in V.$ (Desigualdade Triangular)

Em um contexto mais geral, as propriedades (N1), (N2) e (N4) são usadas para definir a norma como um funcional $\|*\| : V \to \mathbb{R}$.

**EXEMPLO 7.0.2** *O valor de $x$ que ortogonaliza os vetores $u = (1, -1, x, 2)$ e $v = (0, x, 2, 1)$ do $\mathbb{R}^4$ é determinado a partir da relação $\langle u, v \rangle = 0$. De fato:*

$$u \perp v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow -x + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

**EXEMPLO 7.0.3** *No espaço $C([a, b])$, das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, o produto interno usual é definido por:*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt. \tag{7.3}$$

*Consideremos $a = 0$, $b = \pi$ e calculemos as normas e o produto interno entre os vetores $f(t) = \cos t$ e $g(t) = \operatorname{sen} t$. A norma induzida pelo produto interno (7.3) é:*

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_0^\pi [f(t)]^2 \, dt \right)^{1/2}$$

*e usando as identidades $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$ e $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$, encontramos*

$$\begin{aligned} \|\cos t\|^2 &= \int_0^\pi (\cos t)^2 \, dt = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2t) \, dt = \pi/2 \Rightarrow \|\cos t\| = \sqrt{\pi/2} \\ \|\operatorname{sen} t\|^2 &= \int_0^\pi (\operatorname{sen} t)^2 \, dt = \tfrac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2t) \, dt = \pi/2 \Rightarrow \|\operatorname{sen} t\| = \sqrt{\pi/2}. \end{aligned}$$

*Por outro lado,*

$$\langle \cos t, \operatorname{sen} t \rangle = \int_0^\pi \cos t \operatorname{sen} t \, dt = \tfrac{1}{2} \left[ \operatorname{sen}^2 t \right]_0^\pi = 0. \tag{7.4}$$

**DEFINIÇÃO 7.0.4** *Em um espaço vetorial $V$, com produto interno, diremos que dois vetores $u$ e $v$ são ortogonais, e anotamos $u \perp v$, quando $\langle u, v \rangle = 0$. O ângulo $(u, v)$ entre dois vetores não nulos $u$ e $v$ é definido a partir da relação:*

$$\cos(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

**LEMA 7.0.5** *Vetores não nulos e ortogonais são LI.*

**Prova:** Sejam $u$ e $v$ dois vetores não nulos e ortogonais e suponhamos que $x \cdot u + y \cdot v = \mathbf{0}$. Então:

$$\langle x \cdot u + y \cdot v, u \rangle = \langle \mathbf{0}, u \rangle = 0 \Leftrightarrow x \|u\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

De modo similar prova-se que $y = 0$. ■

**EXEMPLO 7.0.6** *Os vetores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ da base canônica do $\mathbb{R}^3$ são mutuamente ortogonais, em relação ao produto interno usual (7.2). De fato, basta observar que:*

$$\|e_j\| = 1, \ j = 1,2,3, \quad e \quad \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0.$$

*Já a relação (7.4) nos diz que as funções* $\operatorname{sen} t$ *e* $\cos t$ *são ortogonais, em relação ao produto interno (7.3), com $a = 0$ e $b = \pi$.*

**LEMA 7.0.7** *Em um espaço vetorial $V$, com produto interno, temos as seguintes regras de ortogonalidade:*

**(i)** $\mathbf{0} \perp u, \quad \forall\, u \in V.$ *(o vetor nulo é ortogonal a todos vetores de $V$)*

**(ii)** *Se $u \perp v$, $\forall\, v \in V$, então $u = \mathbf{0}$.*

**(iii)** *Se $u \perp v$ e $\lambda$ é um escalar, então $\lambda \cdot u \perp v$.*

**(iv)** *Se $u \perp w$ e $v \perp w$, então $u + v \perp w$.*

**Prova:** As comprovações são consequências diretas das definições. Como ilustração, temos:

(iii) $\langle \lambda \cdot u, v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle = 0$, já que $\langle u, v \rangle = 0$.

(iv) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = 0$, já que $\langle u, w \rangle = 0$ e $\langle v, w \rangle = 0$..

**DEFINIÇÃO 7.0.8** *Se os vetores de uma base de $V$ são dois a dois ortogonais, a base denomina-se* **BASE ORTOGONAL**. *Se, além disso, os vetores da base são todos unitários (de norma igual a 1) ela denominar-se-á* **BASE ORTONORMAL**.

**EXEMPLO 7.0.9** *Em relação ao produto interno usual, a base canônica do $\mathbb{R}^n$ é ortonormal. Uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $V$ é ortonormal em relação a um dado produto interno se, e só se, para cada $i, j = 1,2,3,\ldots,n$, tem-se:*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \left| \begin{array}{lll} 1, & se & i = j \\ 0, & se & i \neq j. \end{array} \right.$$

### 7.0.1 Identidades & Desigualdades

No Capítulo 1, estabelecemos os Produtos Notáveis para vetores geométricos e esses produtos continuam válidos em espaços vetoriais com produto interno.

(a) **Quadrado da Soma:** $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$.

**Prova:**

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 . \end{aligned}$$

(b) **Quadrado da Diferença:** $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$.

(c) **Produto da Soma pela Diferença:** $\langle u+v, u-v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$.

**Prova:**

$$\begin{aligned} \langle u+v, u-v\rangle &= \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle \\ &= \|u\|^2 - \|v\|^2 . \end{aligned}$$

(d) **Identidades do Paralelogramo e de Polarização:** Como consequência direta dos Produtos Notáveis, temos as identidades:

Id. do Paralelogramo:[3] $\qquad \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$

Id. de Polarização: $\qquad \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v\rangle.$

Em um espaço vetorial $V$ com produto interno, além dessas identidades destacamos duas desigualdades fundamentais: a *Desigualdade de Cauchy-Schwarz* e a *Desigualdade Triangular*. Dados dois vetores $u$ e $v$ no espaço $V$, temos:

(e) **Desigualdade de Cauchy-Schwarz:**

$$|\langle u, v\rangle| \le \|u\| \cdot \|v\| . \tag{7.5}$$

[3] Ao fazer referência à Identidade do Paralelogramo, a norma considerada é induzida por um produto interno, isto é, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Aliás, a Identidade do Paralelogramo é o indicador que determina se uma dada norma provém ou não de um produto interno (veja o Exercício 13).

**Prova:** Partindo da desigualdade $\|u + t \cdot v\|^2 \geq 0$, encontramos:

$$0 \leq \|u + t \cdot v\|^2 = \|v\|^2 t^2 + 2\langle u, v\rangle t + \|u\|^2 = At^2 + Bt + C \tag{7.6}$$

e o trinômio do lado direito de (7.6) será não negativo se, e só se, seu discriminate $\Delta = B^2 - 4AC \leq 0$. Ora, $A = \|v\|^2$, $B = 2\langle u, v\rangle$, $C = \|u\|^2$ e temos:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4\langle u, v\rangle^2 - 4\,\|u\|\,\|v\| \leq 0$$

e daí segue a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

**(f) Desigualdade Triangular:**

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|\,. \tag{7.7}$$

**Prova:** Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\,\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

e daí resulta a Desigualdade Triangular (7.7) .

### 7.0.2 Explorando as Desigualdades

Nas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Triangular, um fato que nos chama atenção é sobre a ocorrência das igualdades naquelas inequações. Se $u$ ou $v$ for o vetor nulo $\mathbf{0}$, é claro que $\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\|$ e, também, $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$; no caso em que $u$ e $v$ são unitários, temos:

$$\langle u, v\rangle = \pm 1 \Leftrightarrow u = \pm v. \tag{7.8}$$

De fato:

$$u = \pm v \Leftrightarrow \|u \mp v\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|u\|^2 \mp 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow 2 \mp 2\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = \pm 1.$$

**LEMA 7.0.10** *Os vetores $u$ e $v$ são LD se, e somente se, $|\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\|$. Em outras palavras, na Desigualdade de Cauchy-Schwarz ocorre a igualdade apenas para vetores LD.*

**Prova:** Se $u = \mathbf{0}$ ou $v = \mathbf{0}$, nada há a provar. Suponhamos $u$ e $v$ não nulos e observemos que:

$$|\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow \langle \frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}\rangle = \pm 1$$

e de (7.8) deduzimos que $u = (\pm\,\|u\| \,/\, \|v\|) \cdot v$, isto é, $u$ e $v$ são LD. ■

**LEMA 7.0.11** *Os vetores $u$ e $v$ são LD se, e somente se, $\|u+v\| = \|u\| + \|v\|$. Em outras palavras, na Desigualdade Triangular ocorre a igualdade apenas para vetores LD.*

**Prova:** Temos que:

$$\begin{aligned} \|u+v\| &= \|u\| + \|v\| \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\Leftrightarrow |\langle u, v\rangle| = \|u\| \cdot \|v\| \end{aligned}$$

e do Lema 7.1 deduzimos que os vetores $u$ e $v$ são LD. ■

**EXEMPLO 7.0.12 (Extremos de um Funcional)** *No espaço vetorial $V$, dado um vetor unitário $u_0$, deixe-nos considerar o funcional (não linear) $\varphi : S \to \mathbb{R}$, definido por $\varphi(v) = \|u_0 - v\|$, onde $S = \{v \in V : \|v\| = 1\}$ é a esfera unitária de $V$. Em que pontos (vetores) o funcional $\varphi$ atinge seus valores extremos?*

**Solução:** É claro que $\|u_0 - v\| \geq 0$ e o valor mínimo de $\|u_0 - v\|$ é zero, atingido no vetor $v_1 = u_0$. Por outro lado, se $\|v\| = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \varphi(v)^2 &= \|u_0 - v\|^2 = \|u_0\|^2 - 2\langle u_0, v\rangle + \|v\|^2 = 2 - 2\langle u_0, v\rangle \\ &\leq 2 + 2\|u_0\| \cdot \|v\| \leq 4 \end{aligned}$$

e, portanto:

$$\varphi(v)^2 = 4 \Leftrightarrow 2 - 2\langle u_0, v\rangle = 4 \Leftrightarrow \langle u_0, v\rangle = -1$$

e de (7.8) segue que $v = -u_0$. O valor maximo de $\varphi(v)$ em $S$ é 2, atingido no vetor $v = -u_0$.

---

**ESCREVENDO PARA APRENDER 7.0**

1. No espaço $\mathbb{R}^2$, dados $u = (x, y)$ e $v = (x', y')$, verifique que a operação

$$\langle u, v\rangle = 2xx' + xy' + x'y + 2yy' \tag{7.9}$$

define um produto interno em relação ao qual os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (1, -1)$ são ortogonais.

2. A operação $\langle (x, y), (x', y')\rangle = |x' - x| + |y' - y|$ define um produto interno no $\mathbb{R}^2$? Por quê?

3. Se $u$ e $v$ são unitários e $\langle u, v\rangle = \pm 1$, é correto afirmar que $u = \pm v$? Se não, apresente um contra-exemplo.

4. Se dois vetores $u$ e $v$ de um espaço vetorial $V$ com produto interno são unitários e ortogonais, mostre que $\|u - v\| = \sqrt{2}$.

5. No espaço $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ das matrizes reais $2 \times 2$, dados $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, defina a operação:

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + 2a_{12}b_{12} + 3a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}, \tag{7.10}$$

**(a)** Verifique que a operação (7.10) define um produto interno em $V$.

**(b)** Calcule as normas e o ângulo entre os vetores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**(c)** Encontre o valor de $x$ que torna ortogonais os vetores:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{pmatrix}.$$

6. Seja $V$ um espaço vetorial com produto interno e considere dois vetores $u$ e $v$ em $V$, com $v \neq \mathbf{0}$, Mostre que a função real $f(x) = \|u + xv\|^2$ atinge um valor mínimo.

7. No espaço $\mathbb{R}^3$ considere a norma induzida pelo produto interno:

$$\langle u, v \rangle = 2xx' + yy' + 4zz', \tag{7.11}$$

sendo $u = (x, y, z)$, $\quad v = (x', y', z')$. Qual o trabalho realizado pelo campo de forças (constante) $\mathbf{F} = (1, 2, 6)$, para transportar uma partícula do ponto $A(1, 1, 2)$ ao ponto $B(2, 3, -1)$, em linha reta. Recorde-se que o trabalho é o *produto* da força pelo deslocamento.

8. Dados dois vetores não nulos $v_1$ e $v_2$, qual valor deve-se atribuir à constante $\lambda$ para que os vetores $v_1$ e $v_2' = v_2 - \lambda v_1$ sejam ortogonais?

9. Sejam $v_1$, $v_2$ e $v_3$ vetores não nulos e suponha que $v_1$ e $v_2$ sejam ortogonais. Quais valores devem assumir as constantes $\lambda$ e $\mu$, para que o vetor $v_3' = v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1$ seja ortogonal a $v_1$ e $v_2$, simultaneamente?

10. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^3$ e mostre que:

$$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9, \quad \text{com} \quad x, y, z > 0.$$

11. Se $u$ e $v$ são ortogonais, mostre que

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 . \qquad \text{(Teorema de Pitágoras)}$$

Ilustre graficamente a situação com vetores no plano $\mathbb{R}^2$.

12. No espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$ considere a seguinte operação:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\left(B^t \cdot A\right). \tag{7.12}$$

Mostre que a operação (7.12) define um produto interno em $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e encontre um vetor $Y \neq \mathbf{0}$, ortogonal ao vetor

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. No espaço $\mathbb{R}^2$, mostre que o funcional $\|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ define uma norma, a qual não atende a Identidade do Paralelogramo e, portanto, não é induzida por um produto interno.

## 7.1 Ortogonalização

Por que as bases ortogonais são importantes e como ortogonalizar uma dada base? As coordenadas de um vetor numa base ortogonal são relativamente simples de calcular e isso já justifica a importância das bases ortogonais. Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal de $V$ e $u$ é um vetor qualquer, então

$$u = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_n \cdot v_n \tag{7.13}$$

e para calcular a coordenada $x_j$ fazemos o produto interno dos dois lados de (7.13) pelo vetor $v_j$, usamos a ortogonalidade e encontramos

$$\langle u, v_j\rangle = x_j \langle v_j, v_j\rangle = x_j \|v_j\|^2 \Rightarrow x_j = \frac{\langle u, v_j\rangle}{\|v_j\|^2}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{7.14}$$

O escalar $\dfrac{\langle u, v_j\rangle}{\|v_j\|^2}$ que figura em (7.14) é o **COEFICIENTE DE FOURIER** de $u$ com respeito ao vetor $v_j$.

**EXEMPLO 7.1.1** *Em relação ao produto interno usual, a base*

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0), (-1,1,0), (0,0,2)\} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

*é uma base ortogonal, tendo em vista que* $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij},\ i,j = 1,2,3.$ *Os coeficientes de Fourier do vetor* $u = (3,-1,2)$ *em relação à base* $\mathcal{B}$ *são*:

$$x_1 = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} = 1, \quad x_2 = \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} = -2 \quad e \quad x_3 = \frac{\langle u, v_3 \rangle}{\|v_3\|^2} = 1$$

*e, consequentemente*:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O processo que apresentamos aqui para ortogonalizar uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ do espaço vetorial $V$ é devido a Gram-Schmidt e se inicia fixando uma das direções, digamos $v_1' = v_1$, e construindo vetores $v_2',\ v_3' \ldots v_n'$ de modo que $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ seja uma base ortogonal, como sugerido nos Exercícios 8 e 9 da seção Escrevendo para Aprender 7.0. O vetor $v_k'$ da base $\mathcal{B}'$ vem dado por:

$$v_k' = v_k - \frac{\langle v_k, v_{k-1}' \rangle}{\|v_{k-1}'\|^2} \cdot v_{k-1}' - \frac{\langle v_k, v_{k-2}' \rangle}{\|v_{k-2}'\|^2} \cdot v_{k-2}' - \cdots - \frac{\langle v_k, v_2' \rangle}{\|v_2'\|^2} \cdot v_2' - \frac{\langle v_k, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1', \quad k = 2,3,\ldots,n.$$

De forma explícita, temos:

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1 \\
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1' \\
v_3' &= v_3 - \frac{\langle v_3, v_2' \rangle}{\|v_2'\|^2} \cdot v_2' - \frac{\langle v_3, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1' \\
&\vdots \\
v_n' &= v_n - \frac{\langle v_n, v_{n-1}' \rangle}{\|v_{n-1}'\|^2} \cdot v_{k-1}' - \frac{\langle v_n, v_{n-2}' \rangle}{\|v_{n-2}'\|^2} \cdot v_{n-2}' - \cdots - \frac{\langle v_n, v_2' \rangle}{\|v_2'\|^2} \cdot v_2' - \frac{\langle v_n, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1'
\end{aligned}$$

**EXEMPLO 7.1.2** *No espaço* $\mathbb{P}_1$ *dos polinômios de grau* $\leq 1$, *considere o produto interno*

$$\langle p, q \rangle = \int_0^2 p(x)\, q(x)\, dx.$$

*A partir da base* $\mathcal{B} = \{1, x\}$ *vamos construir, em duas etapas, uma base ortonormal de* $\mathbb{P}_1$.

**(i) ORTOGONALIZANDO A BASE $\mathcal{B}$.** *Sejam* $v_1 = 1$, $v_2 = x$ *e consideremos*

$$\begin{aligned}
v_1' &= v_1 = 1 \quad e \\
v_2' &= v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1' = x - \frac{\int_0^2 x dx}{\int_0^2 1^2 dx} = x - 1.
\end{aligned}$$

*A base $\mathcal{B}' = \{1, x-1\}$ assim obtida é ortogonal.*

**EXEMPLO 7.1.3** *Temos*

$$\begin{aligned} \|1\|^2 &= \langle 1,1\rangle = \int_0^2 dx = 2 \Rightarrow \|1\| = \sqrt{2} \\ \|x-1\|^2 &= \langle x-1, x-1\rangle = \int_0^2 (x-1)^2\, dx = 2/3 \Rightarrow \|x-1\| = \sqrt{2/3}. \end{aligned}$$

*A base $\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(x-1) \right\}$ é ortonormal.*

**EXEMPLO 7.1.4** *Seja $W$ o subespaço do $\mathbb{R}^5$, gerado pelos vetores $v_1 = (1,1,0,1,2)$, $v_2 = (0,2,1,-2,0)$ e $v_3 = (1,0,1,-1,2)$. Construir uma base ortogonal $\mathcal{B}'$ de $W$, da qual façam parte os vetores $v_1$ e $v_2$. Qual as coordenadas do vetor $u = (1,1,2,1,-1)$ na base $\mathcal{B}'$?*

**Solução:** Inicialmente notamos que $v_1$ e $v_2$ são ortogonais e, por isso, podem fazer parte da base ortogonal $\mathcal{B}'$ a ser construída e resta-nos construir um vetor $v_3'$, ortogonal a $v_1$ e $v_2$. De acordo com o método de Gram-Schmidt, consideramos:

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\cdot v_2 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\cdot v_1$$

e um cálculo direto nos dá $v_3' = (\frac{3}{7}, -\frac{26}{21}, \frac{2}{3}, -\frac{19}{21}, \frac{6}{7})$ e temos a base ortogonal:

$$\mathcal{B}' = \left\{ (1,1,0,1,2), (0,2,1,-2,0), (\tfrac{3}{7}, -\tfrac{26}{21}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{19}{21}, \tfrac{6}{7}) \right\}.$$

As coordenadas do vetor $u$ na base $\mathcal{B}'$ são os coeficientees de Fourier de $u$ em relação aos vetores básicos $v_1$, $v_2$ e $v_3'$, isto é:

$$[u]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \text{com } c_1 = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\|v_1\|^2},\ c_2 = \frac{\langle u, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} \text{ e } c_2 = \frac{\langle u, v_3'\rangle}{\|v_3'\|^2}.$$

Para finalizar esta seção, ressaltamos a importância de uma base ortonormal $\mathcal{B}$, de um espaço vetorial $V$, na representação matricial de um operador linear $T : V \to V$. Considerando $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e os coeficientes de Fourier $c_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle$, $i,j = 1,2,3,\ldots,n$, então:

$$T(v_j) = c_{1j}\cdot v_1 + c_{2j}\cdot v_2 + \cdots + c_{nj}\cdot v_n, \quad j = 1,2,3,\ldots,n,$$

e, consequentemente, temos a representação matricial:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle T(v_1), v_1\rangle & \langle T(v_2), v_1\rangle & \cdots & \langle T(v_n), v_1\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle T(v_1), v_n\rangle & \langle T(v_2), v_n\rangle & \cdots & \langle T(v_n), v_n\rangle \end{pmatrix}$$

## ESCREVENDO PARA APRENDER 7.1

1. Use o processo de ortogonalização para construir uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$, a partir da base $\mathcal{B} = \{(1,2), (2,1)\}$.

2. Repita o exercício precedente considerando a base $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,2,0)\}$ do $\mathbb{R}^3$.

3. Ortonormalize a base $\mathcal{B} = \{(1,-1), (1,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, em relação ao produto interno (7.9).

4. Considere o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$ e encontre uma base ortonormal para o subespaço
$$W = \{(x,y,z) : x - y + z = 0\}.$$

5. No espaço $\mathbb{P}_2$ dos polinômios de grau $\leq 2$, considere o produto interno:
$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx.$$
Encontre uma base ortonormal para o subespaço de $\mathbb{P}_2$ gerado pelos vetores $v_1 = 1$ e $v_2 = 1 - x$.

6. No espaço $\mathcal{M}_{2\times 2}$, considere o produto interno $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(B^t \cdot A\right)$ e ortonormalize a base
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

7. No espaço das funções reais contínuas em $[-\pi, \pi]$, considere o produto interno usual:
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$
e deixe $f$ ser a função dada por $f(x) = \operatorname{sen}(kx)$, onde $k$ é um inteiro positivo.

   **(a)** Calcule $\|f\|$.

   **(b)** Como se calcula coeficiente de Fourier de uma função contínua $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, com respeito à função $f$ ? O que representa este coeficiente?

8. Considere o espaço das funções contínuas em $[0, 2\pi]$, equipado do produto interno usual:
$$\langle f, g \rangle = \int_{0}^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx.$$
Se $g_n(x) = \cos(nx)$ e $h_m(x) = \operatorname{sen}(mx)$, sendo $m$ e $n$ inteiros, com $n \geq 0$ e $m \geq 1$, mostre que:

**(a)** $\|g_0\| = \sqrt{2\pi}$ e $\|g_n\| = \|h_n\| = \sqrt{\pi}, \quad \forall\, n \geq 1.$

**(b)** $g_n \perp h_m, \quad \forall\, m, n.$

**(c)** $g_n \perp g_m,$ se $m \neq n.$

No cálculo das integrais use as relações

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A \cos B &= \tfrac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\right] \\ \cos A \cos B &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]. \end{aligned}$$

9. Com a notação do exercício precedente, calcule a norma e os coeficientes de Fourier da função $f(x) = x$, com respeito às funções $g_n$ e $h_m$.

10. Seja $V$ o espaço das funções contínuas em $[0, 1]$, equipado do produto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx.$$

**(a)** Encontre uma base ortonormal do subespaço gerado pelas funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

**(b)** Repita o ítem (a) com o subespaço $W = \left[1, x, x^2\right]$.

## 7.2 Complementar Ortogonal

No que se segue, $V$ é um espaço vetorial real e $\langle *, *\rangle$ um produto interno em $V$. Dado um subconjunto $S$ de $V$, o **COMPLEMENTAR ORTOGONAL** de $S$, representado por $S^\perp$ (lê-se "S perp"), é o subconjunto de $V$ constituído pelos vetores ortogonais a $S$, isto é:

$$S^\perp = \{v \in V : \langle u, v\rangle = 0, \quad \forall\, u \in S\}.$$

**LEMA 7.2.1** *O subconjunto $S^\perp$ é um subespaço vetorial de $V$, mesmo que $S$ não o seja.*

**Prova:** Dados $v_1$ e $v_2$ em $S^\perp$ e um escalar $\lambda$, devemos mostrar que $\lambda v_1 + v_2 \in S^\perp$. De fato, para cada vetor $u$ de $S$, temos $\langle u, v_1\rangle = 0$ e $\langle u, v_2\rangle = 0$ e, portanto:

$$\langle u, \lambda v_1 + v_2\rangle = \lambda\langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle = 0 \Rightarrow \lambda v_1 + v_2 \in S^\perp. \quad \blacksquare$$

**LEMA 7.2.2** *Se $W$ é o subespaço de $V$, gerado pelos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$, então:*

$$v \in W^{\perp} \Leftrightarrow \langle v, v_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

**Prova:** Suponhamos que $\langle v, v_j \rangle = 0$, para $j = 1, 2, 3, \ldots, k$ e seja $u = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_k \cdot v_k$ um vetor genérico de $W$. Então:

$$\langle v, u \rangle = x_1 \cdot \langle v, v_1 \rangle + x_2 \cdot \langle v, v_2 \rangle + \cdots + x_k \cdot \langle v, v_k \rangle = 0$$

de onde segue que $v \in W^{\perp}$. Reciprocamente, se $v \in W^{\perp}$ então $\langle v, u \rangle = 0$, seja qual for o vetor $u$ de $W$ e, em particular, $\langle v, v_j \rangle = 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, k$. ■

**EXEMPLO 7.2.3** *Seja $W$ o subespaço do $\mathbb{R}^4$, gerado pelos vetores $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$ e determinemos o complementar ortogonal $W^{\perp}$.*

**Solução:** Temos que:

$$v = (x, y, z, t) \in W^{\perp} \Leftrightarrow v \cdot u_1 = 0 \quad \text{e} \quad v \cdot u_2 = 0$$

e daí resulta $x + y = 0$ e $-x + y + t = 0$, isto é, $y = -x$ e $t = 2x$. Logo, $W^{\perp} = \{(x, -x, z, 2x) : x, z \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$ é uma base do complementar ortogonal $W^{\perp}$.

**EXEMPLO 7.2.4** *Decorre diretamente da definição que em um espaço vetorial $V$, tem-se:*

$$V^{\perp} = \{\mathbf{0}\} \quad e \quad \{\mathbf{0}\}^{\perp} = V.$$

### 7.2.1 Projeção Ortogonal sobre um Subespaço

Na introdução deste capítulo, estabelecemos a projeção ortogonal de um vetor geométrico $\vec{v}$ sobre um vetor $\vec{u}$ e com o objetivo de generalizar a noção de projeção ortogonal sobre um subespaço $W$ de $V$, deixe-nos considerar uma base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de $W$ e seja $w$ o vetor de $W$ dado por:

$$w = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot v_k.$$

Se $v$ é qualquer vetor do espaço $V$, então $v - w$ jaz no complementar ortogonal $W^{\perp}$ e assim:

$$v = w + (v - w) \in W + W^{\perp} \tag{7.15}$$

e a relação (7.15) sugere olhar o vetor $w$ como a projeção ortogonal do vetor $v$ no subespaço $W$ e anotamos $w = \mathrm{Proj}_W(v)$, isto é:

$$\mathrm{Proj}_W(v) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_k\rangle}{\|v_k\|^2} \cdot v_k.$$

**EXEMPLO 7.2.5** *Vamos encontrar a projeção ortogonal do vetor $v = (1,0,0,1,2)$ no subespaço $W$ do $\mathbb{R}^5$, gerado pelos vetores $v_1 = (1,2,0,0,1)$ e $v_2 = (0,1,1,0,1)$. Ortogonalizando a base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de $W$, encontramos a base $\mathcal{B}' = \{(1,2,0,0,1), (\frac{1}{2}, 0, 1, 0, \frac{1}{2})\} = \{v_1', v_2'\}$ e temos:*

$$\mathrm{Proj}_W(v) = \frac{\langle v, v_1'\rangle}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1' + \frac{\langle v, v_2'\rangle}{\|v_2\|'^2} \cdot v_2' = (1,1,1,0,1).$$

Da relação (7.15) deduzimos que $V = W + W^\perp$ e para concluir que a soma é direta, resta-nos verificar que $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$. De fato, dado $v$ no subespaço $W \cap W^\perp$, temos:

$$v \in W \quad \text{e} \quad v \in W^\perp \Rightarrow \langle v, w\rangle = 0, \quad \forall\, w \in W,$$

e, em particular, $\langle v, v\rangle = 0$, isto é, $v = \mathbf{0}$.

Em espaços vetoriais de dimensão finita, a decomposição em soma direta pode ser estabelecida utilizando o completamento de uma base de $W$, como mostra o seguinte resultado.

**LEMA 7.2.6 (Decomposição em Soma Direta)** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita. Se $W$ é qualquer subespaço vetorial de $V$, então $V = W \oplus W^\perp$.*

**Prova:** Se $W = \{\mathbf{0}\}$ ou $W = V$ então $W^\perp = V$ ou $W^\perp = \{\mathbf{0}\}$ e, nestes casos, nada há a demonstrar, já que $V = \{\mathbf{0}\} \oplus V$. Suponhamos que $0 < \dim W = k < \dim V = n$ e seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ uma base ortonormal de $W$ e completemos essa base a uma base

$$\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$$

de $V$, a qual é suposta ortonormal (no processo de ortogonalização de Gram-Schmidt os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ não mudam, porque já são ortonormais). Afirmamos que:

$$W^\perp = [v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n].$$

De fato, dado $v$ em $V$, temos

$$v = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \ldots + x_k \cdot v_k + x_{k+1} \cdot v_{k+1} + x_{k+2} \cdot v_{k+2} + \ldots + x_n \cdot v_n \tag{7.16}$$

e fazendo o produto interno de ambos os lados de (7.16) com $v_j$, encontramos

$$\langle v, v_j \rangle = x_j \langle v_j, v_j \rangle = x_j \|v_j\|^2 = x_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots n$$

e, consequentemente, temos:

$$\begin{aligned} v \quad &\in \quad W^\perp \Leftrightarrow \langle v, v_j \rangle = 0 \Leftrightarrow x_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots k \\ &\Leftrightarrow \quad v = x_{k+1} \cdot v_{k+1} + x_{k+2} \cdot v_{k+2} + \dots + x_n \cdot v_n \\ &\Leftrightarrow \quad v \in [v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n] \,. \end{aligned}$$

Logo, $V = W + W^\perp$ e como $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$, temos a decomposição $V = W \oplus W^\perp$. ■

**EXEMPLO 7.2.7** *Como consequência do Lema 7.2.6, mostremos que $W^{\perp\perp} = W$, seja qual for $W$ subespaço vetorial de $V$. De fato, se $v = v_1 + v_2 \in W \oplus W^\perp$, jaz no complementar $W^{\perp\perp} = \left(W^\perp\right)^\perp$, então*:

$$0 = \langle v, v_2 \rangle = \langle v_1 + v_2, v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle = \|v_2\|^2$$

*e assim, $v_2 = 0$, $v = v_1 \in W$ e temos $W^{\perp\perp} \subset W$. Reciprocamente, se $v \in W$, então $\langle w, v \rangle = 0$, seja qual for o vetor $w$ do complementar $W^\perp$ e assim, temos*:

$$\langle v, w \rangle = 0, \ \forall \ w \in W^\perp \Rightarrow v \in \left(W^\perp\right)^\perp.$$

*Logo, $W^{\perp\perp} \subset W$ e $W \subset \left(W^\perp\right)^\perp$, isto é, $W = \left(W^\perp\right)^\perp$.*

---

## ESCREVENDO PARA APRENDER 7.2

1. Em cada caso, encontre uma base do subespaço $W^\perp$.

   **(a)** $W = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}$ **(b)** $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\right\}$.

2. Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, considere o operador linear $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$.

   **(a)** Encontre uma base ortonormal do subespaço $\mathcal{N}(T)^\perp$.

   **(b)** Repita o ítem (a), considerando o produto interno (7.11).

3. Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, seja $W$ o subespaço gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 1, 0)\,, \quad v_2 = (0, 1, 1)\,, \quad \text{e} \quad v_3 = (1, 0, -1)\,.$$

**(a)** Encontre o complementar ortogonal $W^{\perp}$.

**(b)** Qual o operador $T$ do $\mathbb{R}^3$, que satisfaz a $\operatorname{Im}(T) = W^{\perp}$ e $\mathcal{N}(T) = W$?

4. Seja $W$ o subespaço $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $S = \{(1,0,1), (1,1,0), (2,1,1)\}$.

**(a)** Há diferença entre $S^{\perp}$ e $W^{\perp}$?

**(b)** Encontre uma base ortogonal de $W^{\perp}$.

5. Seja $W$ o subespaço do $\mathbb{R}^3$, gerado pelos vetores $(1,0,1)$ e $(1,1,0)$. Determine uma base de $W^{\perp}$, considerando o produto escalar

$$\langle (x,y,z), (x',y',z') \rangle = 2xx' + yy' + zz'.$$

6. Mostre que o espaço solução do sistema

$$\left| \begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned} \right.$$

coincide com o complementar ortogonal em $\mathbb{R}^3$ do subespaço gerado pelos vetores $v_1 = (2,1,-1)$ e $v_2 = (0,1,1)$. Encontre uma base ortonormal do espaço solução.

7. Repita o exercício precedente com os sistemas:

**(a)** $\left| \begin{aligned} 3x - 2y + z + t &= 0 \\ x + y + 2t &= 0 \end{aligned} \right.$ (b) $\left| \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ y + z &= 0. \end{aligned} \right.$

8. Seja $W$ o subespaço do $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores

$$v_1 = (1,2,3,-1,2) \quad \text{e} \quad v_2 = (2,4,7,2,-1).$$

Encontre uma base do subespaço $W^{\perp}$, considerando em $\mathbb{R}^5$ o produto interno usual.

## 7.3 Revisando o Conteúdo

1. Em um espaço vetorial $V$ com produto interno, considere dois vetores $u$ e $v$, unitários e ortogonais. Mostre que

$$(xu + yv) \perp (zu + tv) \Leftrightarrow xz + yt = 0.$$

2. O funcional $\varphi(v)$, definido no Exemplo 7.0.12, tem valor mínimo 0 e valor máximo 2 atingidos em $v = u_0$ e $v = -u_0$, respectivamente. Mostre que $\varphi(v) = \sqrt{2}$ se, e somente se, $v \perp u_0$.

3. Dada uma matriz real $A$, de ordem $2 \times 2$, mostre que a matriz $A^t A$ é diagonal se, e somente se, as colunas de $A$ são vetores ortogonais, em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^2$.

4. Em um espaço vetorial $V$, considere dois produtos internos $\langle * , * \rangle_1$ e $\langle * , * \rangle_2$ e defina:

$$\begin{aligned} \langle * , * \rangle_3 &= \langle * , * \rangle_1 + \langle * , * \rangle_2 \\ \langle * , * \rangle_4 &= \lambda \cdot \langle * , * \rangle_1, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

Mostre que $\langle * , * \rangle_3$ e $\langle * , * \rangle_4$ definem produtos internos em $V$.

5. No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ construa dois produtos internos $\langle * , * \rangle_1$ e $\langle * , * \rangle_2$, tais que a diferença $\langle * , * \rangle_3 = \langle * , * \rangle_1 - \langle * , * \rangle_2$ não seja um produto interno.

6. Dado um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $\langle T(u), u \rangle = 0, \quad \forall\, u$, mostre que

$$\langle T(u), v \rangle = -\langle u, T(v) \rangle, \ \forall\, u, v \in \mathbb{R}^2.$$

7. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $2 \times 2$ e defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(u) = A \cdot [u]$. Em relação ao produto interno usual do $\mathbb{R}^2$, identificado com $\mathcal{M}_{1\times 2}$, mostre que:

$$\langle T(1,0), (0,1) \rangle = a_{21} \quad \text{e} \quad \langle T(0,1), (1,0) \rangle = a_{12}.$$

8. Com a notação do exercício precedente e admitindo que $\langle T(u), u \rangle = 0, \ \forall\, u \in \mathbb{R}^2$, mostre que a matriz $A$ é antissimétrica.

9. Se $\langle * , * \rangle$ é um produto interno no espaço vetorial $\mathbb{R}$, mostre que existe um escalar $\lambda$, tal que $\langle x, y \rangle = \lambda (x \cdot y)$. Em outras palavras, a menos de uma constante multiplicativa, um produto interno em $\mathbb{R}$ coincide com o produto usual de números reais.

10. No espaço $\mathbb{C}_0$, das funções contínuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, com produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, qg(x)\, dx,$$

encontre uma função $g(x)$ ortogonal a $f(x) = xe^x$.

## RESPOSTAS & SUGESTÕES

### ESCREVENDO PARA APRENDER 7.0

1. Comprove uma a uma as propriedades de produto interno. Sendo $u = (1,1)$ e $v = (1,-1)$, temos

$$\langle u, v \rangle = 2 \times 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 0.$$

2. Não. Se $u = (1,0)$ e $v = (0,0)$, um cálculo direto nos dá

$$\langle u, v \rangle = |0-1| + |0-0| = 1.$$

(se fosse um produto interno, teríamos $\langle u, \mathbf{0} \rangle = 0$).

3. Não. Considere no espaço $\mathbb{R}^2$ os vetores $u = (1,1)$ e $v = (-1,0)$. Temos $\langle u, v \rangle = -1$ e, contudo, $u \neq \pm v$.

4. Sendo $u$ e $v$ unitários e ortogonais, temos $\|u\| = \|v\| = 1$ e $\langle u, v \rangle = 0$. Assim,

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 = 2.$$

5. (a) Comprove as condições que definem o produto interno.

**(b)** Temos

$$\|A\| = \sqrt{1+2+1} = 2 \quad \text{e} \quad \|B\| = \sqrt{4+2+3+1} = \sqrt{10}.$$

Além disso, $\langle A, B \rangle = 1$ e representando por $\theta$ o ângulo entre $A$ e $B$, temos:

$$\cos\theta = \frac{\langle A, B \rangle}{\|A\|\,\|B\|} = \frac{1}{2\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(1/2\sqrt{10}\right).$$

**(c)** Os vetores (matrizes) $X$ e $Y$ serão ortogonais quando $\langle X, Y \rangle = 0$. Um cálculo direto nos dá $x = -15$.

6. A função $f(x)$ é o trinômio do segundo grau

$$f(x) = \|v\|^2 x^2 + 2\langle u, v\rangle x + \|u\|^2,$$

com discriminante $\Delta = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$. e seu valor mínimo é $-\Delta/4\|v\|^2$, que é a ordenada do vértice.

7. O desocamento é $\mathbf{AB} = (1, 2, -3)$ e o trabalho é igual a:

$$\tau = \langle \mathbf{F}, \mathbf{AB}\rangle = \langle (1,2,6), (1,2,-3)\rangle = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 4 \times 6 \times (-3) = -66.$$

8. O vetor $v_2' = v_2 - \lambda v_1$ será ortogonal a $v_1$, quando $\langle v_2', v_1\rangle = 0$ e daí resulta:

$$0 = \langle v_2', v_1\rangle = \langle v_2 - \lambda v_1, v_1\rangle = \langle v_2, v_1\rangle - \lambda\langle v_1, v_1\rangle \Rightarrow \lambda = \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}.$$

9. O vetor $v_3' = v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1$ será ortogonal a $v_1$ e $v_2$, quando o par $(\lambda, \mu)$ for solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} \langle v_1, v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1\rangle = 0 \\ \langle v_2, v_3 - \lambda v_2 - \mu v_1\rangle = 0 \end{array}\right.$$

e considerando que $\langle v_2, v_1\rangle = 0$, obtemos:

$$\left|\begin{array}{l} \langle v_3, v_1\rangle - \mu\|v_1\|^2 = 0 \\ \langle v_3, v_2\rangle - \lambda\|v_2\|^2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \lambda = \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}.$$

10. Considere os vetores $u = \left(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right)$ e $v = \left(\sqrt{1/x}, \sqrt{1/y}, \sqrt{1/z}\right)$ e use a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

11. Temos que $\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle$ e expandindo o produto interno, encontramos

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \|u\|^2 + 2\underbrace{\langle u, v\rangle}_{=\,0} + \|v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

## ESCREVENDO PARA APRENDER 7.1

1. Primeiro ortogonalize a base, substituindo o vetor $v_2 = (2, 1)$ pelo vetor

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (2,1) - \frac{\langle (2,1), (1,2)\rangle}{\|(1,2)\|^2}(1,2) = (2,1) - \frac{4}{5}(1,2) = \left(\tfrac{6}{5}, -\tfrac{3}{5}\right).$$

Para concluir, normalize a base $\{v_1, v_2'\}$ e encontre a base ortonormal

$$\mathcal{B} = \left\{\left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

2. $\mathcal{B}^{\perp} = \left\{ (1,1,0), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \right\}$.

3. Com relação ao produto interno (7.9) a base $\mathcal{B}$ é ortogonal e resta-nos *normalizá-la*. (*normalizar* uma base é tornar seus componentes unitários). Temos:

$$\|(1,-1)\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \|(1,1)\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

A base ortonormal correspondente é, portanto

$$\mathcal{B}^{\perp} = \left\{ \left(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right), \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) \right\}.$$

4. Considere, por exemplo, a base $\mathcal{B} = \{(1,0,-1), (0,1,1)\}$ de $W$ e ortonormalize essa base, via Gram-Schmidt.

5. Os vetores $v_1 = 1$ e $v_2 = 1 - x$ são LI e formam uma base do subespaço. Temos

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 &= \|1\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2 \\ \|v_2\|^2 &= \|1-x\|^2 = \int_{-1}^{1} (1-x)^2\, dx = \int_{-1}^{1} \left(1 - 2x + x^2\right) dx = 8/3 \\ \langle v_1, v_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} (1-x)\, dx = 2. \end{aligned}$$

Para ortogonalizar a base, consideramos $v_1' = v_1$ e

$$v_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1' \rangle}{\|v_1'\|^2} v_1' = 1 - x - \frac{2}{2} = -x.$$

A base $\mathcal{B} = \{1, -x\}$ de $\mathbb{P}_2$ é ortogonal e a base

$$\mathcal{B}' = \{1/2, -3x/2\}.$$

é ortonormal.

6. Dado que $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(B^t \cdot A\right)$, as regras que definem o Produto Interno são facilmente comprovadas usando propriedades do traço e da transposição de matrizes:

   **(a)** $\langle A, A \rangle = \operatorname{tr}\left(A^t \cdot A\right) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 0.$ (aqui $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$)

   **(b)** $\langle B, A \rangle = \operatorname{tr}\left(A^t \cdot B\right) = \operatorname{tr}\left[\left(B^t \cdot A\right)\right]^t = \operatorname{tr}\left(B^t \cdot A\right) = \langle A, B \rangle.$

   **(c)** $\langle A + B, C \rangle = \operatorname{tr}\left(C^t \cdot (A + B)\right) = \operatorname{tr}\left(C^t \cdot A\right) + = \operatorname{tr}\left(C^t \cdot B\right)\big) = \langle A, C \rangle + \langle A, C \rangle.$

   **(d)** $\langle x \cdot A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(B^t \cdot (xA)\right) = x \operatorname{tr}\left(B^t \cdot A\right) = x\langle A, B \rangle.$

Para os vetores básicos

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

temos: $\|A\|^2=2$, $\|B\|^2=2$, $\|C\|^2=3$ e $\|D\|^2=4$ e o processo de Gram-Schmidt nos ensina que a base ortogonal $\mathcal{B}'=\{A',B',C',D'\}$ deve ser construída de tal forma que:

$$\begin{aligned} A' &= A\\ B' &= B-\tfrac{\langle B,A'\rangle}{\|A'\|^2}\cdot A'\\ C' &= C-\tfrac{\langle C,B'\rangle}{\|B'\|^2}\cdot B'-\tfrac{\langle C,A'\rangle}{\|A'\|^2}\cdot A'\\ D' &= D-\tfrac{\langle D,C'\rangle}{\|C'\|^2}\cdot C'-\tfrac{\langle D,B'\rangle}{\|B'\|^2}\cdot B'-\tfrac{\langle D,A'\rangle}{\|A'\|^2}\cdot A'\end{aligned}$$

Um cálculo direto nos conduz a:

$$A'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B'=\begin{pmatrix}1/2 & 1\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}\quad C'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad D'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

7. **(a)** $\sqrt{\pi}$ **(b)** $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\operatorname{sen}(kx)\;dx.$

8. **(a)** Temos $g_n(x)=\cos(nx)$ e, portanto, a função $g_0$ é constante e igual a 1. Logo,

$$\begin{aligned}\|g_0\|^2 &= \int_0^{2\pi} g_0(x)^2\,dx=\int_0^{2\pi} dx = 2\pi \Rightarrow \|g_0\|=\sqrt{2\pi}.\\ \|g_n\|^2 &= \int_0^{2\pi} g_n(x)^2\,dx=\int_0^{2\pi}\cos^2(nx)\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big[1+\cos(2nx)\big]dx=\pi,\quad \forall m.\\ \|h_m\|^2 &= \int_0^{2\pi} h_m(x)^2\,dx=\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(mx)\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big[1-\cos(2mx)\big]dx=\pi,\quad m\ge 1.\end{aligned}$$

**(b)** Duas funções $g$ e $h$ são ortogonais quando $\langle g,h\rangle=0$, isto é, $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\,h(x)\,dx=0$. Se $m\neq n$, temos:

$$\begin{aligned}\langle g_n,h_m\rangle &= \int_0^{2\pi}\cos(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big[\operatorname{sen}(m+n)x+\operatorname{sen}(n-m)x\big]dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(m+n)x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(n-m)x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi}=0.\end{aligned}$$

No caso em que $m=n$, temos:

$$\langle g_n,h_n\rangle=\int_0^{2\pi}\cos(nx)\operatorname{sen}(nx)\,dx=\frac{1}{2n}\big[\operatorname{sen}^2(nx)\big]_0^{2\pi}=0.$$

**(c)** Sendo $m \neq n$, temos:

$$\begin{aligned}\langle g_n, g_m\rangle &= \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \big[\cos(m+n)\,x + \cos(n-m)\,x\big]dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m+n)\,x}{m+n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sen}(m-n)\,x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

9. Usando integração por partes, encontramos:

$$c_n = \frac{\langle f, g_n\rangle}{\|g_n\|^2} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} x\cos nx dx\right) = \frac{1}{n\pi}\left([x\operatorname{sen} nx]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx dx\right) = 0$$

Em relação a $h_m$, o coeficiente de Fourier de $f$ é:

$$\begin{aligned}d_m &= \frac{\langle f, h_m\rangle}{\|h_m\|^2} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} x\operatorname{sen}(mx)\,dx\right) = \frac{1}{m\pi}\left(\big[-x\cos(mx)\big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos mx dx\right) \\ &= -\frac{2\pi}{m\pi} = -\frac{2}{m}.\end{aligned}$$

10. (a) $\left\{\sqrt{80}(x^2 - 3x/4),\ \sqrt{3}x\right\}$ (b) $\left\{\sqrt{80}(x^2 - 3x/4),\ \sqrt{3}x,\ 10x^2 - 12x + 3\right\}$.

## ESCREVENDO PARA APRENDER 7.2

1. A construção de uma base de $W^\perp$ baseia-se Lema 7.2.6. A partir de uma base de $W$ fazemos o completamento a uma base ortogonal de $V$.

**(a)** Vemos que $W = \big[(1,1)\big]$ e considerando um vetor $v$ ortogonal a $(1,1)$ chegamos ao resultado. Por exemplo, considerando $v_2 = (1,-1)$, vemos que $W^\perp = \big[(1,-1)\big]$ é a reta $y = -x$.

**(b)** Neste caso, $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base ortogonal de $W$ e considerando $v_3 = (1,-1,0)$, obtemos a base ortogonal do $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathcal{B}' = \{(1,1,0), (0,0,1), (1,-1,0)\}.$$

Assim, $W^\perp = \big[(1,-1,0)\big]$.

2. Temos que $\mathcal{N}(T) = \big[(1,1,0)\big]$ e um vetor $v = (x,y,z)$ jaz em $\mathcal{N}(T)^\perp$ se, e só se,

$$\langle (x,y,z), (1,1,0)\rangle = 0.$$

**(a)** Em relação ao produto interno usual, temos

$$\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0 \Leftrightarrow x + y = 0.$$

Assim, $\mathcal{N}(T)^{\perp} = \{(x, -x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base ortogonal de $\mathcal{N}(T)$. Normalizando $\mathcal{B}$ encontramos a base ortonormal:

$$\mathcal{B}' = \left\{(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)\right\}.$$

**(b)** Em relação ao produto interno (7.11), temos

$$\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0 \Leftrightarrow 2x + y = 0$$

e, neste caso, temos $\mathcal{N}(T)^{\perp} = \{(x, -2x, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Uma base ortogonal de $\mathcal{N}(T)^{\perp}$ é $\mathcal{B} = \{(1, -2, 0), (0, 0, 1)\}$ e normalizando-a, chegamos a:

$$\mathcal{B}' = \left\{(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 0), (0, 0, 1/2)\right\}.$$

3. Escalonando a matriz geradora de $W$, encontramos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, portanto, $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$ é uma base de $W$.

**(a)** Um vetor $v = (x, y, z)$ pertence a $W^{\perp}$ se, e somente se,

$$\langle (x, y, z), (1, 0, -1) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle (x, y, z), (0, 1, 1) \rangle = 0.$$

Assim, $W^{\perp}$ é o espaço solução do sistema

$$\left| \begin{array}{l} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right.$$

com um grau de liberdade e variável livre $z$. Uma base de $W^{\perp}$ é $\mathcal{B}' = \{(1, -1, 1)\}$.

**(b)** Recorde-se que um operador linear estará determinado quando conhecemos sua ação nos vetores de uma base. Como desejamos que $\mathcal{N}(T) = W$ e $\operatorname{Im}(T) = W^{\perp}$, consideramos

$$\begin{aligned} T(1, 0, -1) &= (0, 0, 0) && \left((1, 0, -1) \text{ vetor básico do núcleo}\right) \\ T(0, 1, 1) &= (0, 0, 0) && \left((0, 1, 1) \text{ vetor básico do núcleo}\right) \\ T(1, -1, 1) &= (1, -1, 1) && \left((1, -1, 1) \text{ vetor básico da imagem}\right) \end{aligned}$$

Escrevendo $(x, y, z) = a \cdot (1, 0, -1) + b \cdot (0, 1, 1) + c \cdot (1, -1, 1)$, encontramos $c = \frac{1}{3}(x - y + z)$ e, portanto

$$T(x, y, z) = c \cdot T(1, -1, 1) = \tfrac{1}{3}(x - y + z, -x + y - z, x - y + z).$$

4. **(a)** Os subespaços $S^\perp$ e $W^\perp$ coincidem, embora os suconjuntos $S$ e $W$ sejam distintos.

   **(b)** O subespaço $W^\perp$ é o espaço-solução do sistema linear homogêneo

$$\left|\begin{array}{r} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array}\right.$$

   o qual é gerado por $(0, 1, -1)$.

5. O complementar ortogonal $W^\perp$ é o espaço-solução do sistema

$$\left|\begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right.$$

   isto é, o subespaço unidimensional, gerado por $(1, -2, -2)$.

6. Considerando $v_1 = (2, 1, -1)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$, então:

$$u \in W^\perp \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \langle u, v_2 \rangle = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right.$$

   e temos $W^\perp = \big[\,(1, -1, 1)\,\big]$ e $\mathcal{B} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)\right\}$ é uma base ortonormal de $W^\perp$.

7. Como ilustração, faremos o ítem (a). Neste caso, o complementar ortogonal é o subespaço do $\mathbb{R}^4$, de dimensão 2, dado por:

$$W^\perp = \big[\,(-1, 1, 5, 0), (-2, 0, 5, 1)\,\big],$$

   sendo $W = [(3, -2, 1, 1), (1, 1, 0, 2)]$.

8. A fim de que um vetor $u = (x, y, z, s, t)$ esteja em $W^\perp$ é necessário e suficiente que $\langle u, v_1 \rangle = 0$ e $\langle u, v_2 \rangle = 0$. Assim,

$$u \in W^\perp \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \langle u, v_1 \rangle = 0 \\ \langle u, v_2 \rangle = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{r} x + 2y + 3z - s + 2t = 0 \\ 2x + 4y + 7z + 2s - t = 0 \end{array}\right. \tag{7.17}$$

Por escalonamento, vemos que o sistema (7.17) é equivalente a

$$\left|\begin{array}{r} x+2y+3z-s+2t=0 \\ z+4s-5t=0 \end{array}\right. \tag{7.18}$$

com grau de liberdade 3 e variáveis livres $y,\ s$ e $t$. Para construir a base de $W^{\perp}$, atribuímos valores às variáveis livres e a partir de (7.18) calculamos $x$ e $z$. Veja a tabela abaixo.

| $x$ | $y$ | $z$ | $s$ | $t$ | vetores básicos de $W^{\perp}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2$ | 1 | 0 | 0 | 0 | $w_1=(-2,1,0,0,0)$ |
| 13 | 0 | $-4$ | 1 | 0 | $w_2=(13,0,-4,1,0)$ |
| $-17$ | 0 | 5 | 0 | 1 | $w_3=(-17,0,5,0,1)$ |

Logo, $\mathcal{B}=\{w_1,w_2,w_3\}$ é uma base de $W^{\perp}$.

## ESCREVENDO PARA APRENDER 7.3

1. Se $\|u\|=\|v\|=1$ e $\langle u,v\rangle=0$, então

$$\begin{aligned}\langle xu,+yv,zu+tv\rangle &= 0\\ &\Leftrightarrow (xz)\langle u,u\rangle+(xt)\langle u,v\rangle+(yz)\langle v,u\rangle+(yt)\langle v,v\rangle=0\\ &\Leftrightarrow xz+yt=0.\end{aligned}$$

2. Temos

$$\varphi(v)^2=2-2\langle u_0,v\rangle \Leftrightarrow \varphi(v)=\sqrt{2-2\langle u_0,v\rangle}$$

e $\varphi(v)=\sqrt{2}$ se, e só se, $\langle u_0,v\rangle=0$, isto é, se, e somente se, $u_0\perp v$.

3. Considere a matriz

$$A=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

com vetores colunas $u=\begin{pmatrix} a\\ c\end{pmatrix}$ e $v=\begin{pmatrix} b\\ d\end{pmatrix}$. A matriz

$$A^tA=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd\\ ab+cd & b^2+d^2\end{pmatrix}$$

será diagonal se, e só se, $ab+cd=0$. Ora, a condição $ab+cd=0$ é equivalente a $\langle u,v\rangle=0$.

4. Mostremos que $\langle * \, , * \rangle_3$ é um produto interno. Observe que:

   (a) $\langle u, u\rangle_3 = \langle u, u\rangle_1 + \langle u, u\rangle_2 \geq 0$, porque $\langle u, u\rangle_1 \geq 0$ e $\langle u, u\rangle_2 \geq 0$.

   (b) $\langle u + v, w\rangle_3 = \langle u + v, w\rangle_1 + \langle u + v, w\rangle_2 = \langle u, w\rangle_1 + \langle v, w\rangle_1 + \langle u, w\rangle_2 + \langle v, w\rangle_2 = \langle u, w\rangle_1 + \langle v, w\rangle_2 + \langle u, w\rangle_1 + \langle v, w\rangle_2 = \langle u, w\rangle_3 + \langle v, w\rangle_3$.

   (c) $\langle xu, v\rangle_3 = \langle xu, v\rangle_1 + \langle xu, v\rangle_2 = x\langle u, v\rangle_1 + x\langle u, v\rangle_2 = x\left[\langle u, v\rangle_1 + \langle u, v\rangle_2\right] = x\langle u, v\rangle_3$.

   (d) $\langle u, v\rangle_3 = \langle u, v\rangle_1 + \langle u, v\rangle_2 = \langle v, u\rangle_1 + \langle v, u\rangle_2 = \langle v, u\rangle_3$.

   Com relação à operação $\langle u, v\rangle_4$, temos:

   (a) $\langle u, u\rangle_4 = \lambda \cdot \langle u, u\rangle_1 \geq 0$, porque $\langle u, u\rangle_1 \geq 0$ e $\lambda > 0$.

   (b) $\langle u+v, w\rangle_4 = \lambda \cdot \langle u+v, w\rangle_1 = \lambda \cdot [\langle u, w\rangle_1 + \langle v, w\rangle_1] = \lambda \cdot \langle u, w\rangle_1 + \lambda \cdot \langle v, w\rangle_1 = \langle u, w\rangle_4 + \langle v, w\rangle_4$.

   (c) $\langle xu, v\rangle_4 = \lambda \cdot \langle xu, v\rangle_1 = \lambda \cdot x\langle u, v\rangle_1 = x\left[\lambda \cdot \langle u, v\rangle_1\right] = x\langle u, v\rangle_4$.

   (d) $\langle u, v\rangle_4 = \lambda \cdot \langle u, v\rangle_1 = \lambda \cdot \langle v, u\rangle_1 = \langle v, u\rangle_4$.

5. Em $\mathbb{R}^2$ considere os produtos internos:

$$\langle (x, y)\, , (x', y')\rangle_1 = xx' + yy' \quad \text{e} \quad \langle * \, , * \rangle_2 = \langle (x, y)\, , (x', y')\rangle_2 = 2xx' + yy'.$$

   Se $u = (1, 0)$, temos que

$$\langle u, u\rangle_2 = -2 < 0,$$

   contradizendo uma das condições que define o produto interno.

6. Partindo do princípio que $\langle Tu, u\rangle = 0, \ \forall u$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T\,(u - v)\, , u - v\rangle = \langle Tu - Tv, u - v\rangle = \underbrace{\langle Tu, u\rangle}_{=\,0} - \langle Tu, v\rangle - \langle Tv, u\rangle + \underbrace{\langle Tv, v\rangle}_{=\,0} \\ &= -\langle Tu, v\rangle - \langle Tv, u\rangle. \end{aligned}$$

   Logo, $\langle Tu, v\rangle = -\langle Tv, u\rangle$.

7. Um cálculo direto nos dá $T\,(1, 0) = (a_{11}, a_{21})$ e, sendo assim, temos:

$$\langle T\,(1, 0)\, , (0, 1)\rangle = \langle (a_{11}, a_{21})\, , (0, 1)\rangle = a_{11} \cdot 0 + a_{21} \cdot 1 = a_{21}.$$

8. Inicialmente, recorde-se que $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ é antissimétrica se $a_{11} = a_{22} = 0$ e $a_{21} = -a_{12}$. Considerando $u = (1,0)$ e, em seguida, $u = (0,1)$, encontramos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(1,0), (1,0)\rangle = \langle (a_{11}, a_{21}), (1,0)\rangle = a_{11}\cdot 1 + a_{21}\cdot 0 = a_{11} \Rightarrow a_{11} = 0. \\ 0 &= \langle T(0,1), (0,1)\rangle = \langle (a_{12}, a_{22}), (0,1)\rangle = a_{12}\cdot 0 + a_{22}\cdot 1 = a_{22} \Rightarrow a_{22} = 0. \end{aligned}$$

Por fim, considere $u = (1,1)$ e, a partir da relação $\langle T(1,1), (1,1)\rangle = 0$, deduza que $a_{12} = -a_{21}$.

9. Uma particularidade do espaço vetorial $\mathbb{R}$ é que seus vetores são, também, escalares. Assim, olhando os vetores $x$ e $y$ como escalares e o escalar 1 como vetor, temos

$$\langle x, y\rangle = \langle x\cdot 1, y\cdot 1\rangle = (x\cdot y)\langle 1,1\rangle = \lambda\cdot(x\cdot y),$$

onde $\lambda$ é o número real $\langle 1,1\rangle$.

10. Considere $h(x) = 1$ e defina

$$g(x) = f(x) - \frac{\langle h, f\rangle}{\|h\|^2}\cdot h(x) = xe^x - 1.$$