1.1 Construção Axiomática do Corpo $\mathbb{R}$

Devido à sua importância fundamental, faremos aqui breves referências a algumas idéias que conduziram à construção dos *números reais*. Dentre as várias formas de construção do corpo $\mathbb{R}$, preferimos àquela que invoca o *Princípio do Encaixe*.

O ponto de partida é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e as operações fundamentais de adição e multiplicação destes números, cuja caracterização é estabelecida do seguinte modo axiomático:

AXIOMA 1.1 *Existe uma função injetiva* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. *O número natural* $s(n)$ *é o sucessor de* n.

AXIOMA 1.2 *Existe um único número natural* $1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 \neq s(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

AXIOMA 1.3 *Se um conjunto* $X \subset \mathbb{N}$ *é tal que* $1 \in X$ *e* $n \in X \Longrightarrow s(n) \in X$, *então* $X = \mathbb{N}$.

O Axioma 1.3 é conhecido como *Princípio de Indução Finita*, de larga aplicação em matemática. Por exemplo, desejamos provar que:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Denotando essa sentença por $P(n)$, construimos o conjunto $X = \{n \in \mathbb{N};\ P(n) \text{ ocorre}\}$ e com auxílio do Axioma 1.3 provaremos que $X = \mathbb{N}$. De fato:

(i) $P(1)$ é simplesmente $2 = 2$, que é uma sentença verdadeira!

(ii) Admitindo que $P(n)$ ocorre, teremos:

$$\underbrace{2 + 4 + 6 + \ldots + 2n}_{P(n)} + 2(n+1) = \underbrace{n(n+1)}_{P(n)} + 2(n+1) = (n+1)(n+2)$$

e isto mostra que $P(n+1)$ também ocorre.

As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$ serão, agora, caractrizadas pelas sentenças:

(i) $n + 1 = s(n)$.

(ii) $n + s(m) = s(m+n)$.

(iii) $n \cdot 1 = n$.

(iv) $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$.

A necessidade da operação inversa da adição conduz à introdução do número zero e dos números negativos. Representamos por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

e este conjunto com a operação de adição, isto é, o par $\{\mathbb{Z}, +\}$ possui estrutura de *Grupo Abeliano*. Isso significa que a operação adição "+"goza das seguintes propriedades:

(a) A operação soma $(+)$ é associativa: $(x+y)+z = x+(y+z)$ e comutativa: $x+y = y+x$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

(b) Existe em $\mathbb{Z}$ um elemento neutro, isto é, um elemento 0 tal que $0 + x = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.

(c) Todo elemento de $\mathbb{Z}$ tem inverso, isto é, dado $x \in \mathbb{Z}$, existe $y \in \mathbb{Z}$, tal que $y + x = 0$.

A operação multiplicação $(\cdot)$ definida em $\mathbb{N}$ estende-se de forma natural ao grupo $\mathbb{Z}$. Este conjunto com as operações de adição e multiplicação possui estrutura de *Anel Abeliano com Unidade*, isto é, o terno $\{\mathbb{Z}, +, \cdot\}$ é tal que:

- ESTRUTURA ABELIANA: $\{\mathbb{Z}, +\}$ é um grupo abeliano.
- EXISTÊNCIA DA UNIDADE: existe em $\mathbb{Z}$ um elemento 1, tal que $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.
- ASSOCIATIVIDADE: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- COMUTATIVIDADE: $x \cdot y = y \cdot x$ $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.
- DISTRIBUTIVIDADE: $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

A necessidade de definir a operação inversa do produto em $\mathbb{Z}$ leva ao aparecimento dos números *racionais* ou *frações*, cuja totalidade é representada pela letra $\mathbb{Q}$. Este conjunto, equipado das operações de adição "+"e multiplicação "$\cdot$", dadas por:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{bd}$$

possui estrutura de *Corpo Numérico*, isto é, o terno $\{\mathbb{Q}, +, \cdot\}$ é um anel abeliano com unidade e o par $\{\mathbb{Q} \backslash \{0\}, \cdot\}$ um grupo. No corpo algébrico $\mathbb{Q}$, é sempre possível *dividir* um elemento qualquer b por outro elemento $a \neq 0$, devido à equação $ax = b$ ter solução $x = ba^{-1}$, onde a^{-1} representa o inverso multiplicativo de a. Notamos, ainda, que no corpo $\mathbb{Q}$ não se pode dividir por zero, porque a equação $0 \cdot x = b$ é impossível, no caso em que $b \neq 0$ (isso é consequência do fato $0 \cdot x = 0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$). Dado x em $\mathbb{Q}$, representa-se por $-x$ o inverso aditivo (simétrico) de y e a soma $y + (-x)$ anota-se $y - x$, que é a diferença entre y e x.A fim *ordenar* o corpo $\mathbb{Q}$, consideremos em $\mathbb{Q}$ um subconjunto $\mathbb{Q}^+$, denominado conjunto dos elementos *positivos* de $\mathbb{Q}$, o qual goza das propriedades:

(1) Se $x, y \in \mathbb{Q}^+$, então $x + y$ e $x \cdot y \in \mathbb{Q}^+$.

(2) Dado $x \in \mathbb{Q}$, ocorre apenas uma das alternativas: (i) ou $x = 0$ (ii) ou $x \in \mathbb{Q}^+$ (iii) ou $-x \in \mathbb{Q}^+$.

Em $\mathbb{Q}$ dizemos que x é *menor* do que y ou que y é *maior* do que x, e escrevemos $x < y$ ou $y > x$, quando $y - x \in \mathbb{Q}^+$. Dessa forma, $x > 0$ significa $x \in \mathbb{Q}^+$. O conjunto $\mathbb{Q}^+ = \{a/b;\ a \cdot b \in \mathbb{N}\}$ satisfaz às condições estabelecidas e, por essa razão, $\mathbb{Q}$ é denominado *corpo ordenado*. Ordenar um corpo numérico $\{\mathbb{K}, +, \cdot\}$ é especificar o conjunto P de seus elementos positivos, o qual goza das mesmas propriedades do conjunto $\mathbb{Q}^+$.

Considerando que o corpo $\mathbb{Q}$ é ordenado, tem-se:

(a) $(-1) \cdot a = -a$. De fato, $(-1) \cdot a + a = [(-1) + 1] \cdot a = 0 \cdot a = 0)$.

(b) $(-1)(-1) = 1$. De fato: $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1)$

(c) $(-a)(-a) = a^2$. Com efeito:$(-a) \cdot (-a) = [(-1)\, a \cdot (-1)\, a] = (-1)(-1)\, a \cdot a = a^2)$

(d) se $a \neq 0$, então $a^2 > 0$, De fato: se $a \neq 0$, ou $a \in \mathbb{Q}^+$ ou $-a \in \mathbb{Q}^+$. Se $a \in \mathbb{Q}^+$, como $a^2 = a \cdot a$, tem-se $a^2 \in \mathbb{Q}^+$. Se $-a \in \mathbb{Q}^+$, como $(-a)(-a) = a^2$, então $a^2 \in \mathbb{Q}^+$. Em qualquer caso, $a^2 \in \mathbb{Q}^+$.

(e) $1 > 0$.basta observar que $1 = 1^2$ e usar (iv). (é claro que $1 \neq 0$, caso contrário ter-se-ia $1 \cdot a = 0$, isto é, $a = 0$ para qualquer $a \in \mathbb{Q}$, o que é contraditório).

(f) se$p > 0$ e $q < 0$, então $p/q < 0$.se p/q fosse positivo, isto é, se $p/q \in \mathbb{Q}^+$, então $(-q)(p/q) \in \mathbb{Q}^+$ e daí resulta que $-p \in \mathbb{Q}^+$, contradizendo o fato de p ser posivo).

No corpo ordenado $\mathbb{Q}$, escreve-se $a \leq b$ para significar $a < b$ ou $a = b$. Um subconjunto $B \subset \mathbb{Q}$ diz-se *limitado superiormente* em $\mathbb{Q}$ quando existir b em $\mathbb{Q}$ tal que $x \leq b$, para qualquer x em B. Um tal número b é denominado *majorante* ou *cota superior* do conjunto B. Se b é um majorante de B, é claro que qualquer número $c \geq b$ também o é e o menor desses majorantes denomina-se *supremo* do conjunto B e anota-se $\sup B$. Quando $\sup B \in B$, então $\sup B$ diz-se o *máximo* de B e anota-se $\max B$. Um conjunto $A \subset \mathbb{Q}$ é limitado inferiormente em $\mathbb{Q}$ quando existir $a \in \mathbb{Q}$ tal que $a \leq x$, $\forall x \in A$. Um tal número a é denominado *minorante* ou *cota inferior* do conjunto A. O maior desses minorantes é denominado *ínfimo* de A e anota-se $\inf A$. Quando $\inf A \in A$, então $\inf A$ diz-se o *mínimo* de A e anota-se $\min A$. Um conjunto $X \subset \mathbb{Q}$ diz-se *limitado* quando o for superiormente e inferiormente. Nesse caso, é claro, $\inf X \leq \sup X$.

■ **EXEMPLO FUNDAMENTAL** O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é limitado inferiormente em $\mathbb{Q}$, tendo o número 1 como mínimo. Aliás, qualquer parte não vazia $X \subset \mathbb{N}$ possui mínimo, ao qual nos referimos como *primeiro elemento*. Para mostrar que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$, mostremos que dado $p/q \in \mathbb{Q}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > p/q$. Se $p/q \leq 0$, consideramos $n = 1$; se $p/q > 0$, não há perda de generalidades em admitir $p, q > 0$ e, neste caso, consideramos $n = p + 1$ e obtemos:

$$\frac{p}{q} < \frac{p+1}{q} \leq p + 1 = n.$$

O fato de ser $\mathbb{N}$ não limitado superiormente em $\mathbb{Q}$ é uma propriedade intrínseca do corpo $\mathbb{Q}$. Existem corpos ordenados mais gerais onde $\mathbb{N}$ é limitado superiormente. Por exemplo, consideremos o corpo $\mathbb{Q}(t)$ das funções racionais com coeficientes inteiros e denominador não identicamente nulo, onde definimos os elementos positivos de $\mathbb{Q}(t)$ como aquelas funções racionais $p(t)/q(t)$ tais que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio $p(t) \cdot q(t)$ é positivo. O elemento $p(t) = t$ é um majorante do conjunto $\mathbb{N}$, uma vez que, $p(t) - n = t - n$ é uma função racional positiva.

■ **PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA** Com o exemplo fundamental estabelecemos uma propriedade adicional do corpo $\mathbb{Q}$, denominada propriedade *arquimediana*: dados $x, y \in \mathbb{Q}^+$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$. Essa propriedade é facilmente comprovada, tendo em vista que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathbb{Q}$. É oportuno observar que o corpo ordenado $\mathbb{Q}(t)$ referido acima e no qual $\mathbb{N}$ é limitadao superiormente não é arquimediano.

O corpo $\mathbb{Q}$, além de ordenado e arquuimediano, possui a propriedade de *densidade*, isto é, dados $a, b \in \mathbb{Q}$ com $a < b$, existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$. De fato, sendo $a < b$, então:

$$a + a < a + b < b + b \Longrightarrow (1+1)\,a < a + b < (1+1)\,b \Longrightarrow a < \frac{a+b}{1+1} < b.$$

Esta propriedade de densidade permite escolher em $\mathbb{Q}$ elementos tão próximos quanto desejarmos de outro elemento previamente escolhido e, assim, definir a mais importante noção da Análise Matemática, a noção de *limite* na sua forma mais simplificada, que é a de limite de *sequência*.

■ **A DIAGONAL DE UM QUADRADO DE LADO 1** Ao que se sabe, foi Pitágoras quem primeiro abordou a questão de determinar um número x tal que $x^2 = 2$. Prove que esta equação não tem solução em $\mathbb{Q}$. A inexistência de uma fração p/q tal que $(p/q)^2 = 2$ deve-se à propriedade de densidade do corpo $\mathbb{Q}$. Embora $\mathbb{Q}$ contenha uma infinidade de pontos (números) não contém o suficiente para medir a diagonal de um quadrado de lado 1. É necessário ampliar o conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$, ou seja, *tapar os buracos* da reta, para que esta possa servir de régua graduada capaz de medir qualquer comprimento com rigor.

Assim, suporemos a existência de um **corpo ordenado arquimediano** $\mathbb{R}$, contendo $\mathbb{Q}$, onde é válido o *Princípio do Encaixe*, utilizado em algumas literaturas para a caracterização axiomática dos números reais. A propriedade arquimediana do corpo $\mathbb{R}$ é decisiva na comprovação de que $1/n$ torna-se arbitrariamente próximo de zero, à medida que o número natural n cresce. Traduzimos isto escrevendo $1/n \to 0$, com $n \to \infty$. O mesmo raciocínio se aplica a outras *sucessões* a exemplo da sucessão $x/2^n$.

Esta noção de *convergência* (proximidade) será tratada mais tarde com bastante rigor. No momento enfatizamos o seguinte: (i) se $a_n \leq a_{n+1}$ e $b_n \geq b_{n+1}$, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, e se $b_n - a_n \to 0$, então para todo $x \in [a_n, b_n]$ tem-se a_n se aproxima de x pela esquerda (anota-se: $a_n \to x^-$) e b_n se aproxima de x pela direita (anota-se: $b_n \to x^+$) (ii) se $a_n \leq y$ e $a_n \to x$, percebe-se que $x \leq y$.

1.1.1 Valor Absoluto & Intervalos

Dado $x \in \mathbb{R}$ definimos o *valor absoluto* ou *módulo* de x como sendo o número real $|x| = \max\{x, -x\}$. É claro que $|x| = x$, se $x \geq 0$ e $|x| = -x$, no caso em que $x < 0$.

Existe uma classe importante de subconjuntos de $\mathbb{R}$, denominados *intervalos*, com notação e caracteísticas específicas. Se a e b são dois números reais e $a < b$, definimos os intervalos:

$$
\begin{array}{ll}
[a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\} & (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x > a\} \\
[a,b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\} & [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\} \\
(a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\} & (-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\} \\
(a,b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\} & (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}\,.
\end{array}
$$

Dado um intervalo limitado I com extremos a e b, o comprimento de I é o número real $|b - a|$, que representaremos por $m(I)$. Um intervalo pode ser caracterizado da seguinte forma (veja o Exercício 1.20): um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, cumpre a seguinte condição: se $a, b \in I$ e $a < x < b$, então $x \in I$.

■ **PRINCÍPIO DO ENCAIXE** *Dada uma família infinita $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos fechados não vazios de $\mathbb{R}$, com $I_n \supset I_{n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$. Além disso, se $m(I_n) \to 0$, então existe um único x comum a todos os I_n.*

No Princípio do Encaixe, a hipótese dos intervalos serem fechados é essencial. De fato, note que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n) = \varnothing \quad \text{e que} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, +\infty) = \varnothing.$$

Passemos agora à construção do número $\sqrt{2}$ que é precisamente a raiz positiva da equação $x^2 = 2$. Com efeito, consideremos um intervalo $[a, b]$ tal que $a^2 \leq 2 \leq b^2$ (por exemplo, o intervalo $[1, 2]$). Ora, ou $2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ou $2 \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ e dividindo $[a, b]$ ao meio, um dos intervalos da divisão, digamos $[a_1, b_1]$, é tal que $a_1^2 \leq 2 \leq b_1^2$. Representemos esse intervalo por I_1 e uma repetição sucessiva do processo de divisão do intervalo ao meio nos conduz a uma família $\{I_n\}$ de intervalos encaixados $I_n = [a_n, b_n]$, tal que $a_n^2 \leq 2 \leq b_n^2$. Como cada intervalo I_n tem a metade do comprimento do intervalo anterior, então $b_n - a_n = (b - a)\, 2^{-n} \to 0$ e, portanto, existe um único x pertencente a todos os intervalos I_n e ainda $a_n \to x$ e $b_n \to x$. Assim, tomando o limite, com $n \to \infty$, na desigualdade $a_n^2 \leq 2 \leq b_n^2$, encontramos

$x^2 \leq 2 \leq x^2$, isto é, $x^2 = 2$. Se existisse outro número positivo, digamos y, tal que $y^2 = 2$, teríamos $x^2 = y^2$, ou seja, $(x-y)(x+y) = 0$, de onde resulta $x = y$.

Teorema 1.4 (Gauss) *Seja a/b uma raiz da equação*

$$p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0 = 0, \tag{1.1}$$

onde os coeficientes p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots n$, são inteiros e $p_n \neq 0$, e suponha que a fração a/b seja irredutível. Então, a é divisor de p_0 e b é divisor de p_n.

DEMONSTRAÇÃO Por substituição da raiz a/b na equação (1.1), resulta:

$$p_n a^n + p_{n-1}a^{n-1}b + \ldots + p_1 ab^{n-1} + p_0 b^n = 0, \tag{1.2}$$

de onde seguem as igualdades:

$$\frac{-p_n a^n}{b} = p_{n-1}a^{n-1} + \ldots + p_1 ab^{n-2} + p_0 b^{n-1} \tag{1.3}$$

$$\frac{-p_0 b^n}{a} = p_n a^{n-1} + p_{n-1}a^{n-2}b \ldots + p_1 ab^{n-1}. \tag{1.4}$$

Observando que os lados direitos de (1.3) e (1.4) são números inteiros e que a fração a/b é irredutível, deduzimos que a divide p_0 e b divide p_n. $\square$

Corolário 1.5 *Toda raiz racional da equação $x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0 = 0$, onde $p_k \in \mathbb{Z}$, é necessariamente um número inteiro.* $\square$

Corolário 1.6 *$\sqrt{2}$ não é um número racional.* $\square$

Um número $x \in \mathbb{R}$ que não é racional é denominado *irracional* e a totalidade desses números é indicada por $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, o conjunto dos números irracionais.

Os conceitos e notações sobre cotas, supremo e ínfimo estabelecikdos para um subconjunto $X \subset \mathbb{Q}$ se repetem para subconjuntos do corpo $\mathbb{R}$ dos números reais. Assim, se $X \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto limitado superiormente, o menor dos majorantes de X é o *supremo* de X e é anotado $\sup X$. A maior das cotas inferiores de X será denotada pou $\inf X$ e denominada *ínfimo* do conjunto X.

■ PRINCÍPIO DO SUPREMO Uma parte $X \subset \mathbb{R}$ não vazia, limitada superiormente, tem supremo.

DEMONSTRAÇÃO Fixemos $x \in X$ e seja b um majorante de X. Consideremos o intervalo $I = [a, b]$, sendo $a < x$, de modo que a não é majorante de X. Um dos intervalos $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ tem as mesmas características do intervalo I, isto é, a extremidade superior é um majorante de X e a extremidade inferior não. Denotemos por $I_1 = [a_1, b_1]$ tal intervalo. Repetindo o processo com o intervalo I_1 no lugar do intervalo I, produzimos um intervalo I_2 nas condições de I_1 e assim sucessivamente. Dessa forma, obtemos uma família de intervalos encaixados

$$I \supset I_1 \supset I_2 \ldots \supset I_n \supset \ldots,$$

onde $I_n = [a_n, b_n]$ é tal que: (i) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$ e (ii) b_n é majorante de X e a_n não é. Se s o único ponto comum a todos os intervalos I_n, então $a_n \to s$ e $b_n \to s$ e afirmamos que $s = \sup X$. De fato:

(a) dado $x \in X$, então $x \le b_n$, $\forall n$, e fazendo $n \to \infty$, encontramos $x \le s$;

(b) se s' for um majorante de X tem-se $a_n \le s'$, $\forall n$, e fazendo $n \to \infty$, encontramos $s \le s'$. $\square$

■ **PRINCÍPIO DO ÍNFIMO** Uma parte $X \subset \mathbb{R}$ não vazia, limitada inferiormente, tem ínfimo. $\square$

1.1.2 Caracterizando o $\sup X$ e o $\inf X$

Decorrem diretamente dos conceitos de supremo e infimo de um conjunto limitado X as seguintes caracterizações:

(a) Com relação a uma cota superior α de $X \subset \mathbb{R}$, as afirmações abaixo são equivalentes:

(i) $\alpha = \sup X$;

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $\alpha - \varepsilon < x$. $\square$

(b) Com relação a uma cota inferior β de $X \subset \mathbb{R}$, as afirmações abaixo são equivalentes:

(i) $\beta = \inf X$;

(ii) Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $\beta + \varepsilon > x$. $\square$

1.1.3 Densidade

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *denso* em $\mathbb{R}$ se, dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existe $c \in X$ tal que $a < c < b$. Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Com efeito, dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, existe, pela propriedade arquimediana, um $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\,(b - a) > 1$, isto é, $1/n < b - a$. Marcando na reta real os pontos da forma $k \cdot \frac{1}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, a reta fica subdividida em intervalos de comprimento $\frac{1}{n} < b - a$ e necessariamente ao menos um ponto da forma $\frac{k}{n}$ ficará entre a e b. Da mesma forma, o conjunto $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ dos números irracionais também é denso em $\mathbb{R}$. Nesse caso, consideramos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\sqrt{2}}{n} < b - a$ e marcam-se na reta os pontos da forma $k\frac{\sqrt{2}}{n}$, com $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Toda reta, exceto o intervalo $\left[-\sqrt{2}/n, \sqrt{2}/n\right]$, fica dividida em intervalos de comprimento $\sqrt{2}/n < b - a$ e, por fim, adicionamos os irracionais $\pm\sqrt{2}/2n$. Agora, aplicamos o raciocício anterior.

1.1.4 Raiz n-ésima

Dados um número real $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, existe um único $b > 0$ tal que $b^n = a$. O número b é denominado *raiz n-ésima* positiva de a e anota-se $b = \sqrt[n]{a}$. A comprovação desse fato é estabelecida por etapas e começamos enfatizando duas relações que serão utillizadas:

- *Desigualdade de Bernoulli*: Se $x \geq -1$, então $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

- Se $b > 0$ e $b^n < a$, então $(b+\xi)^n < a$, para ξ suficientemente pequeno.

Agora, consideremos os subconjuntos:

$$X = \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \text{ e } x^n < a\} \quad \text{e} \quad Y = \{y \in \mathbb{R},\ y > 0 \text{ e } y^n > a\}.$$

Temos que $X \neq \varnothing$ e X é limitado, porque $0 \in X$ e $0 \leq x \leq \max\{1, a\}$, $\forall x \in X$. Se $b = \sup X$, então:

(i) $b \notin X$, do contrário existiria $\xi > 0$, tal que $(b+\xi)^n < a$ e, portanto, $b + \xi \in X$, contradizendo a definição de b.

(ii) $b \notin Y$, pois se ξ é tal que $0 < \xi < \min\left\{b, (b^n - a)/nb^{n-1}\right\}$, segue da Desigualdade de Bernoulli:

$$(b-\xi)^n = b^n (1 - \xi/b)^n \geq b^n (1 - n\xi/b) = b^n - nb^{n-1}\xi > a$$

e, portanto, $b - \xi \in Y$. Isto não é possível, porque $b = \sup X \leq \inf Y$, já que $x < y$, $\forall (x, y) \in X \times Y$.

O Princípio do Supremo é também conhecido como *Axioma de Completeza* do corpo $\mathbb{R}$. Ser *completo* é uma propriedade fundamental que diferencia o corpo $\mathbb{R}$ do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais. O conjunto

$$X = \left\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\right\}$$

é limitado superiormente e, contudo, não possui supremo em $\mathbb{Q}$. Note que $\sup X = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

■ **AS POTÊNCIAS $a^{m/n}$** Dados $m, n \in \mathbb{N}$ e um número real $a > 0$, definimos a potência $a^{m/n}$ por:

$$a^{m/n} = \left(a^{1/n}\right)^m. \tag{1.5}$$

Se m é um inteiro negativo, escrevemos $a^{m/n} = 1/a^{-m/n}$ e temos as seguintes propriedades:

(a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $r, s \in \mathbb{Q}$. **(b)** $(a^r)^s = a^{rs}$, $r, s \in \mathbb{Q}$.

1.1.5 Enumerabilidade

Um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *enumerável*, quando for finito ou existir uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to X$. Escrevendo $x_n = \varphi(n)$, temos a seguinte *enumeração* para o conjunto X :

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

É claro que $\mathbb{N}$ é enumerável porque a identidade $n \mapsto n$ estabelece uma bijeção de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Também o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável, uma vez que, dispondo seus elemnetos na forma

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots \\ & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & \\ & & -1 & & -2 & & -3 & & -4 & \dots \end{array}$$

podemos definir uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ pondo $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = -1$, $\varphi(3) = 1$, $\varphi(4) = -2$,.... etc, seguindo as setas. A seguir estabeleceremos algumas consequências da definição.

1. Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.

Suponhamos que X seja infinito e seja $x_1 = \inf X$ o primeiro elemento de X. Selecionados os elementos $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ de X, definimos os conjuntos $A_n = X \backslash \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, de modo que: (i) $A_n \neq \varnothing$, porque X é infinito; (ii) A_n é limitado inferiormente, porque $A_n \subset \mathbb{N}$. Denotemos por x_{n+1} o primeiro elemento de A_n, isto é, $x_{n+1} = \inf A_n$. Temos que $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} \dots\}$ porque se existisse em X um ponto $x \neq x_n$, $\forall n$, então x estaria em cada subconjunto A_n e, portanto, $x = \sup X$, contradizendo o fato de X ser infinito (não limitado superiormente). A aplicação $n \mapsto x_n$ define uma bijeção de $\mathbb{N} \to X$.

2. Se $f : X \to \mathbb{N}$ é injetiva, então X é enumerável.

Como $f(X)$ é enumerável, existe uma bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to f(X)$ e a composição $\phi = \varphi \circ f$ estabelece uma bijeção entre X e $\mathbb{N}$.

3. Se $g : \mathbb{N} \to X$ é sobrejetiva, então X é enumerável.

Dado x em X, escolha $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $g(n_x) = x$. A aplicação $f : X \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = n_x$ é injetiva e o resultado anterior assegura a enumerabilidade de X.

4. Se $X \subset \mathbb{N}$ é infinito, então X possui um subconjunto infinito enumerável.

Vamos definir indutivamente uma aplicação injetiva $f : \mathbb{N} \to X$ assim: $f(1) = x_1$ é um elemento escolhido em X. Supondo definidos $f(1), f(2), \dots, f(n)$ escrevemos $A_n = X \backslash \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$ e defi-nimos $f(n+1) = x_{n+1}$ um elemento escolhido em A_n. Note que $A_n \neq \varnothing$, porque X é infinito, e que a aplicação f assim definida é injetiva. De fato, se $m < n$ são números naturais, então

$f(m) \in \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$ e $f(n) \in X \setminus \{f(1), f(2), \ldots, f(n-1)\}$. É claro que $f(\mathbb{N})$ é um subconjunto de X infinito enumerável.

5. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Em primeiro lugar, lembramos que a representação de um número natural em fatores primos é única. A função $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $\phi(m, n) = 2^n \cdot 3^m$ estabelece uma injeção entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$. Decorre desta propriedade que se X e Y são enumeráveis, então o produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável. De fato, a partir das bijeções $\varphi : \mathbb{N} \to X$ e $\psi : \mathbb{N} \to Y$ definimos a bijeção $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X \times Y$, pondo $\phi(m, n) = (\varphi(m), \psi(n))$.

6. Uma decomposição interessante do conjunto $\mathbb{N}$.

Vamos decompor o conjunto $\mathbb{N}$ em uma união infinita $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \ldots \cup \mathbb{N}_n \cup \ldots$ de subconjuntos infinitos dois a dois disjuntos. Começamos exibindo uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. De fato, definamos $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por: $\varphi(2n-1) = (1, n)$ e $\varphi(2^m(2n-1)) = (m+1, n)$. Agora, seja $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $\pi(m, n) = n$ e consideremos $\mathbb{N}_k = [\pi \circ \varphi]^{-1}(k)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, então $n \in \mathbb{N}_k$, se $n = 2k-1$ ou $n \in \mathbb{N}_p$, se $n = 2^m(2p-1)$ e, portanto, $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \ldots \cup \mathbb{N}_n \cup \ldots$. É claro que cada $\mathbb{N}_k$ é infinito e se $n \in \mathbb{N}_p \cap \mathbb{N}_q$, então $p = q = \pi(\varphi(n))$, de modo que a união é disjunta. Note que:

$$\mathbb{N}_1 = \left\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\right\}, \quad \mathbb{N}_2 = \left\{3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, 3 \times 2^3, \ldots\right\}, \quad \mathbb{N}_3 = \left\{5, 5 \times 2, 5 \times 2^2, 5 \times 2^3, \ldots\right\}$$

7. Sobre a reunião enumerável

Se $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n, \ldots$ são enumeráveis, então $X = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ é enumerável. De fato, considerado para cada n uma jijeção $f_n : \mathbb{N} \to X_n$, a aplicação $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ definida por $\phi(i, j) = f_i(j)$ é sobrejetiva e, dos fatos já estabelecidos, deduzimos que X é enumerável. Como consequência, olhamos a decomposição $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$ e a aplicação sobrejetiva $\phi : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$, dada por $\phi(m, n) = m/n$, e concluímos as respectivas enumerabilidade de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

Teorema 1.7 *O corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é não enumerável.*

DEMONSTRAÇÃO Provaremos que uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não pode ser sobrejetiva. Com efeito, seja $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) < a_1$, de modo que $f(1) \notin I_1$. Se $f(2) \notin I_1$, escolhamos $I_2 = I_1$. Se $f(2) \in I_1$, isto é, $a_1 \leq f(2) \leq b_1$, então ou $f(2) > a_1$ ou $f(2) < b_1$ e, ocorrendo a primeira opção, consideramos $I_2 = [a_2, b_2]$, com $a_2 = a_1$ e $b_2 = \dfrac{a_1 + f(2)}{2}$ (como seria I_2 caso ocorresse a segunda opção?). Dessa forma, construímos, indutivamente, uma sucessão de intervalos encaixados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots \supset I_n \ldots$ com $f(n) \notin I_n = [a_n, b_n]$, $\forall n$. Se $c \in \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = c$. $\square$

Corolário 1.8 *O conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dos números irracionais é não enumerável*

DEMONSTRAÇÃO Se fosse, então $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ seria enumerável. $\square$

Corolário 1.9 *O intervalo aberto $(-1, 1)$ é não enumerável*

DEMONSTRAÇÃO A fórmula $g(x) = x/(1 - |x|)$ define uma bijeção de $(-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, com inversa $g^{-1}(y) = y/(1 + |y|)$. $\square$

Corolário 1.10 *Se $a < b$, o intervalo aberto (a, b) é não enumerável*

DEMONSTRAÇÃO A fórmula $f(x) = \frac{1}{2}[(b - a)x + a + b]$ estabelece uma bijeção entre os intervalos $(-1, 1)$ e (a, b). $\square$

Corolário 1.11 *O conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dos números irracionais é denso em $\mathbb{R}$*

DEMONSTRAÇÃO Se não fosse, existiria um intervalo aberto (a, b) inteiramente contido em $\mathbb{Q}$ e, assim, (a, b) seria enumerável. $\square$

1.2 Escrevendo para Aprender

1. Comprove as seguintes afirmações no corpo $\mathbb{R}$ dos números reais.

   (a) Se $a \cdot b = a \cdot c$ e $a \neq 0$, então $b = c$.

   (b) Se $a \cdot b = 0$, então ou $a = 0$ ou $b = 0$.

   (c) Se $a \cdot a = a$, então ou $a = 0$ ou $a = 1$.

   (d) Não existe um número racional r tal que $r^2 = 6$.

   (e) Se r é um número racional não nulo e ξ é um número irracional, então os números $\xi + r$ e $\xi \cdot r$ também são irracionais.

   (f) Se r e s são números racionais, então $r \cdot s$ e $r + s$ também o são.

   (g) Se ξ e η são números iracionais, então $\xi \cdot \eta$ e $\xi + \eta$ podem ser racionais.

   (h) Se $a \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$, então $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ e $(a^m)^n = a^{mn}$.

   (i) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, então: ou $a > b$, ou $a = b$, ou $a < b$.

(j) Se $a > b$, então $a + c > b + c$. Se $a > b$ e $c > 0$, então $a \cdot c > b \cdot c$.

(k) Se $a > 0$, então $1/a > 0$.

(l) Se $a < b$, então $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$. Se $b > 0$, então $0 < \frac{1}{2}b < b$.

(m) Se $0 \le a < \varepsilon$, $\forall\ \varepsilon > 0$, então $a = 0$. Se $a - \varepsilon < b$, $\forall \varepsilon > 0$, então, $a \le b$.

(n) Se a e b são números reais não negativos, então $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Se a e b são números reais, então $2ab \le a^2 + b^2$; se a e b forem não negativos, então $\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a + b)$ e ocorre a igualdade se, e somente se, $a = b$.

3. Generalizando o Exercício 2, considere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais não negativos e mostre que:

$$(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n};$$

4. Se $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ são números reais e $n \in \mathbb{N}$, demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \le \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2\right)$$

Como ponto de partida, considere a desigualdade: $\sum_{k=1}^{n}(x_k - ty_k)^2 \ge 0$, $\forall t$.

5. Mostre que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right]$$

e, como consequência, deduza a desigualdade elementar: $xy \le \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$.

6. Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, mostre que $0 < ac < bd$.

7. Se a e b são números reais, mostre que $a^2 + b^2 = 0$ se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$.

8. Determine todos os números reais x que atendem à desigualdade:

(a) $x^2 > 3x + 4$ **(b)** $1/x < x$ **(c)** $1/x < x^2$ **(d)** $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ **(c)** $\max\{x - 1, 5 - x\} < 3$.

9. Se $0 < c < 1$, mostre que $0 < c^2 < c < 1$. Se $c > 1$, então $1 < c < c^2$. Use a desigualdade de Bernoulli e deduza que se $c \ge 1$, então $c^n \ge c$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

10. Deixe λ ser um número real fixado e sejam $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Se $\lambda > 1$, mostre que $\lambda^m > \lambda^n \Longleftrightarrow m > n$.

(b) Se $0 < \lambda < 1$, mostre que $\lambda^n \le \lambda\ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) Se $0 < \lambda < 1$, mostre que $\lambda^m < \lambda^n \iff m > n$.

11. Mostre que $|a - b| \leq |a| + |b|$ e que $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Como consequência, deduza que:

$$|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon.$$

12. Mostre que $|a + b| = |a| + |b|$ se, e somente se, $ab \geq 0$.

13. Mostre que $|a + b| = |a| + |b|$ se, e somente se, $ab \geq 0$.

14. Dados três números reais x, y e z, mostre que $|x - y| + |y - z| \geq |x - z|$. Se $x < z$, mostre que $x \leq y \leq z$ se, e somente se, $|x - y| + |y - z| = |x - z|$. Interprete os resultados geometricamente.

15. Mostre que $|x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$.

16. Se $x, y \in (a, b)$, mostre que $|x - y| < b - a$. Interprete o resultado geometricamente.

17. Esboce no produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ os seguintes subconjuntos:

(a) $\{(x, y) : |x| \leq |y|\}$ **(b)** $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ **(c)** $\{(x, y) : |y| \leq x^2\}$.

18. Dados $r, s \in \mathbb{Q}$, com $0 < 2r < s$, mostre que $\theta = r\sqrt{2} - r + s/2$ é irracional e que $r < \theta < s$.

19. Sejam $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reais não nulos, com mesmo sinal. Se $\dfrac{a_k}{b_k} \in (\alpha, \beta)$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, mostre que:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \in (\alpha, \beta) .$$

20. Sejam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ e x uma solução da equação $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$. Se $x \notin \mathbb{Z}$, mostre que x é irracional. Como consequência deduza que $\sqrt[3]{5}$ é irracional.

21. Identifique o erro no seguinte argumento: se $x = y$, então:

$$x^2 = xy \Rightarrow x^2 - y^2 = xy - y^2 \Rightarrow (x + y)(x - y) = (x - y)\, y \Rightarrow x + y = y \Rightarrow 2y = y \Rightarrow 2 = 1.$$

22. A respeito de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) Existem constantes m e M tais que $m \leq x \leq M$, $\forall x \in X$.

(b) Existe uma constatnte $C > 0$, tal que $|x| \leq C$, $\forall x \in X$.

23. Seja $\varepsilon > 0$ um número real dado. Construa uma família infinita $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de intervalos abertos com as seguintes propriedades:

(P$_1$) Cada intervalo I_n contém o número natural n

($\mathbf{P}_2$) A soma dos comprimentos de todos os intervalos da família é $\leq \varepsilon$.

24. Prove que um conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, cumpre a seguinte condição: se $a, b \in I$ e $a < x < b$, então $x \in I$.

25. Designe $a \vee b$ e $a \wedge b$ o maior e o menor entre os números a e b, respectivamente. Mostre que

$$a \vee b = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad \text{e} \quad a \wedge b = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

26. Determine o sup e o inf dos seguintes conjuntos:

(a) $A = \{-n^2 + n;\, n \in \mathbb{N}\}$ **(b)** $B = \left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{n};\, m, n \in \mathbb{N}\right\}$ **(c)** $C = \left\{\frac{1}{n};\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$.

27. Se α é uma cota superior de S e $\alpha \in S$, mostre que $\sup S = \alpha$. Idem para o inf .

28. Seja $S \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio, limitado superiormente. Mostre que $\alpha \in \mathbb{R}$ é uma cota superior de S se, e somente se, as condições: (i) $x \in \mathbb{R}$ e (ii) $x > \alpha$, implicam que $x \notin S$. Enuncie um resultado análogo para cota inferior.

29. Mostre que $\alpha = \sup S$ se, e somente se, para todo natural n o número $\alpha - 1/n$ não é cota superior de S, mas $\alpha + 1/n$ o é.

30. Seja S um subconjunto limitado não vazio de $\mathbb{R}$. Dado $a \in \mathbb{R}$, defina os conjuntos aS e $a + S$ por

$$aS = \{ax;\, x \in S\} \quad \text{e} \quad a + S = \{a + x;\, x \in S\}.$$

(a) Se $a \geq 0$, mostre que $\sup(aS) = a \sup S$ e $\inf(aS) = a \inf S$.

(b) Se $a < 0$, mostre que $\sup(aS) = a \inf S$ e $\inf(aS) = a \sup S$.

(c) Para qualquer a real, mostre que $\sup(a + S) = a + \sup S$ e $\inf(a + S) = a + \inf S$.

31. Se A e B são subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$, mostre que $A \cup B$ é um subconjunto limitado e que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$. Quanto vale $\inf(A \cup B)$?

32. Sejam $A \subset B$ dois subconjuntos da $\mathbb{R}$, sendo B limitado. Mostre que:

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

33. Seja $S \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e suponha que $\sup S$ está em S. Se $x \notin S$, mostre que $\sup(S \cup \{x\}) = \max\{x, \sup S\}$. Usando este resultado e o método de indução, prove que todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ contém seu supremo.

34. Se A e B são subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$, seja $A+B=\{a+b;\ a\in A \text{ e } b\in B\}$. Mostre que $A+B$ é limitado e

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B \quad \text{e} \quad \inf(A+B)=\inf A+\inf B.$$

35. Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: se $x\in A$ e $y\in B$, então $x\le y$. Mostre que $\sup A\le\inf B$ e ocorre a igualdade se, e somente se, dado $\varepsilon>0$ existem $x\in A$ e $y\in B$ com $y-x<\varepsilon$.

36. Mostre que o supremo do conjunto $S=\left\{x\in\mathbb{R}^+;\ x^2<2\right\}$ é igual a $\sqrt{2}$. (*sug.* Em primeiro lugar observe que $\sqrt{2}$ é uma cota superior de S. Para concluir que $\sqrt{2}$ é a menor cota superior de S, considere $0<a<\sqrt{2}$ e um número real x tal que $0<x<\min\left\{1,\left(2-a^2\right)/2a+1\right\}$. Este número x está em S e $x>a$).

37. FUNÇÃO LIMITADA Uma função $f:X\to\mathbb{R}$ é *limitada* quando sua imagem $Y=f(X)$ for um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Neste caso, definimos o supremo e o ínfimo da função f como sendo os números reais:

$$\sup(f)=\sup Y \quad \text{e} \quad \inf(f)=\inf Y.$$

Calcule o sup e o inf das funções $f,g:]0,1[\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=x^2$ e $g(x)=x$. Agora, considere duas funções limitadas $f,g:X\to\mathbb{R}$.

(a) Se $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in X$, mostre que $\sup(f)\le\sup(g)$

(b) Se $f(x)\le g(y)$, $\forall x,y\in X$, mostre que $\sup(f)\le\inf(g)$. O resultado seria válido se $f(x)\le g(x)$, $\forall x\in X$?

(c) Dê exemplos para mostrar que as desigualdades em (a) e (b) podem ser estritas.

38. Sejam $f,g:X\to\mathbb{R}$ duas funções limitadas. Mostre que

$$\sup(f+g)\le\sup f+\sup g \quad \text{e} \quad \inf(f+g)\ge\inf+\inf g.$$

39. Sejam $f,g:X\to\mathbb{R}^+$ funções reais limitadas superiormente. Mostre que a *função produto* $f\cdot g:X\to\mathbb{R}^+$ e a *função quadrado* $f^2:X\to\mathbb{R}^+$ são limitadas e valem as relações:

(a) $\sup(f\cdot g)\le\sup f\cdot\sup g \quad \text{e} \quad \inf(f\cdot g)\ge\inf f\cdot\inf g$.

(b) $\sup\left(f^2\right)=(\sup f)^2 \quad \text{e} \quad \inf\left(f^2\right)=(\inf f)^2$.

40. ASPECTOS TOPOLÓGICOS DA RETA $\mathbb{R}$ Dados um subconjunto $X\subset\mathbb{R}$ e um ponto $x\in\mathbb{R}$, a posição relativa do ponto x com respeito ao conjunto X pode ser caracterizada por:

- Existe um raio $r > 0$ tal que $V_r(x) \subset X$. Nesse caso, dizemos que o ponto x é *interior* ao conjunto X e anotamos $x \in \operatorname{int}(X)$.
- Existe um raio $r > 0$ tal que $V_r(x) \subset X^c$. Nesse caso, dizemos que o ponto x é *exterior* ao conjunto X e anotamos $x \in \operatorname{ext}(X)$.
- dado qualquer raio $r > 0$, a vizinhança $V_r(x)$ contém algum ponto do conjunto X e algum ponto do complementar de X. Neste caso, dizemos que x é um *ponto de fronteira* do conjunto X e anotamos $x \in \partial X$.

É claro que qualquer conjunto contém o seu interior, isto é, $\operatorname{int}(X) \subset X$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é denominado *conjunto aberto* quando $A = \operatorname{int}(A)$, isto é, todo ponto do conjunto A é ponto interior. Qualquer intervalo aberto é um conjunto aberto.

(a) Mostre que qualquer intervalo aberto (a, b) é um conjunto aberto.

(b) Se $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto, mostre que $A \cap \partial A = \varnothing$. A recíproca é verdadeira?

(c) Um subconjunto $F \subset \mathbb{R}$ é dito *fechado* quando $\partial F \subset F$. Mostre que F é fechado se, e somente se, $\mathbb{R} \backslash F$ é aberto. Qualquer intervalo fechado é um conjunto fechado.

(d) O *fêcho* de um subconjunto X de $\mathbb{R}$ é, por definição, o conjunto $\overline{X} = X \cup \partial X$. Mostre que $\overline{X}$ é um conjunto fechado, o qual coincide com a interseção de todos os subconjuntos fechados da reta que contém X. Mostre que F é fechado se, e somente se, $F = \overline{F}$. Qual a relação entre $\overline{A} \cup \overline{B}$ e $\overline{A \cup B}$?

(e) Determine o fêcho dos seguintes subconjuntos da reta: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$, $[0, 1]$, $\{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $]0, 1[$. Qual desses subconjuntos é fechado? Qual deles é limitado?

(f) Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ fechado e limitado é denominado *compacto*. Estude a compacidade dos subconjuntos do item (e). Dê exemplo de um subconjunto da reta infinito, enumerável e compacto.

(g) Um subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ é denominado *denso* (em $\mathbb{R}$) quando $\overline{D} = \mathbb{R}$. Mostre que $x \in \overline{D}$ se, e somente se, toda ε-vizinhança de x contém algum ponto de D e usando este fato deduza que os conjuntos $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ são densos em $\mathbb{R}$.

(h) Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}$ é dito *convexo* quando atender à seguinte condição: se x e y são dois pontos de C e $0 \leq \lambda \leq 1$, então $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$. Mostre que qualquer intervalo da reta é um conjunto convexo. Dê exemplo de dois subconjuntos convexos da reta cuja união não é um convexo. O que se pode dizer sobre a interseção de dois subconjuntos convexos?

(i) Um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de *acumulação* de um conjunto X quando qualquer vizinhança de a contiver ao menos um ponto de X diferente de a. Mostre que o conjunto X' dos pontos de acumulação de X é um conjunto fechado e deduza que: $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

(j) Mostre que não existe um subconjunto X de $\mathbb{R}$ simultaneamente aberto e fechado, distinto do conjunto vazio e do próprio $\mathbb{R}$. (*sug.* suponha que X seja limitado superiormente e, considerando o $\sup X$ produza uma contradição. No caso geral, considere a interseção de X com um intervalo do tipo $(-\infty, a)$.

(k) Mostre que os subconjuntos $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 > 2\}$ são abertos e determine a fronteira de cada um deles.

(l) Para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ sejam $A_n = (-1/n, 1/n)$ e $B_n = [0, 1 - 1/n]$. Mostre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ não é um conjunto aberto, embora cada A_n o seja. Note que cada B_n é fechado e, contudo, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ não é fechado.

(m) Se a e b são números reais distintos, mostre que eles podem ser *separados* por intervalos abertos disjuntos.

41. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$ com a seguinte propriedade:

$$\text{(P)} \quad \text{dado } x \in \mathbb{R},\ \exists\ \delta_x > 0, \quad \text{tal que} \quad |t| < \delta_x \Rightarrow tx \in X.$$

(a) Dê exemplo de uma classe de subconjuntos próprios da reta $\mathbb{R}$ com tal propriedade.

(b) Se $A = \{r > 0;\ x/r \in X\}$, mostre que A é não vazio e que $\lambda A = \{r > 0;\ \lambda x/r \in X\}$, $\forall \lambda \geq 0$.

(c) Se $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $p(x) = \inf A$, mostre que $p(0) = 0$ e $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall \lambda \geq 0$.