2.1 Sequências: classificação & convergência

1. Dê exemplo de uma sequência $\{a_n\}$, não constante, para ilustrar cada situação abaixo.

   (a) Limitada e crescente.

   (b) Limitada e decrescente.

   (c) Limitada e não monótona.

   (d) Não limitada e não crescente.

   (e) Não limitada e não monótona.

2. Esboce o gráfico da sequência de termo geral $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ e verifique quantos pontos da forma (n, a_n) estão fora da faixa horizontal determinada pelas retas $y = 4/5$ e $y = 6/5$.

3. Construa uma sequência limitada e não monótona, que possua uma subsequência crescente.

4. Em cada caso, expresse a sequência $\{a_n\}$ pelo seu termo geral.

   (a) $a_n : 1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots$ **(b)** $a_n : 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \cdots$ **(c)** $a_n : 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \cdots$

   (d) $a_n : 1, 3/2, 2, 5/2, 3, \cdots$ **(e)** $a_n : 2, 1, 3/2, 1, 4/3, 1, \cdots$ **(f)** $a_n : -1, 2, -1, 2, -1, 2, \cdots$

5. Determine o sup e o inf das seguintes sequências:

   (a) $a_n = -n^2 + n$ **(b)** $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ **(c)** $a_n = \dfrac{2}{3n-4}$ **(d)** $a_n = (-1)^n - \dfrac{1}{n}$ **(e)** $a_n = \dfrac{3n^2}{3n^2 - n}$.

6. USANDO INDUÇÃO FINITA Use o Método de Indução Finita para demonstrar as sentenças:

   (a) Se $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ são números naturais, então $n_j \geq j, \ \forall j \in \mathbb{N}$.

   (b) Se n é um número natural, então: $\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \geq \dfrac{1}{2n}$.

   (c) Se $\{b_n\}$ é definida por: $b_1 = -1$ e $b_n = \dfrac{(1-n)\, b_{n-1}}{n^2}$, $n \geq 2$, então $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n! n}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

   (d) A sequência de *Fibonacci* $\{a_n\}$ é definida pela recorrência:

   $$a_1 = 1, \ a_2 = 1 \quad e \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad se \quad n \geq 2.$$

   Para cada n natural, mostre que:

   $$a_n = \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \left[\left(1 + \sqrt{5}\right)^n - \left(1 - \sqrt{5}\right)^n \right].$$

(e) Mostre que $(1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)x^2}{2}$, $x \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(f) Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais, demonstre que as seguintes relações são válidas:

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n|$$
$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n| \geq |a_1| - |a_2| - |a_3| - \cdots - |a_n|$$

7. Verdadeiro (V) ou Falso (F). Justificar as afirmações falsas com um contra-exemplo.

( ) toda sequência convergente é limitada.

( ) toda sequência limitada é convergente.

( ) toda sequência limitada é monótona.

( ) toda sequência monótona é convergente.

( ) a soma de duas sequências divergentes é divergente.

( ) toda sequência divergente é não monótona.

( ) se uma sequência convergente possui uma infinidade de termos nulos, seu limite é zero.

( ) toda sequência divergente é não limitada.

( ) se uma sequência possui uma subsequência convergente, ela própria converge.

( ) toda sequência alternada é divergente.

( ) toda sequência decrescente limitada é convergente e seu limite é zero.

( ) se uma sequência $\{a_n\}$ diverge, então $\{|a_n|\}$ também diverge.

( ) se $|a_{n+1} - a_n| \to 0$, então a sequência $\{a_n\}$ converge.

( ) se a sequência $\{|a_n|\}$ converge então $\{a_n\}$ também converge.

( ) se a sequência $\{|a_n|\}$ converge para zero, então $\{a_n\}$ também converge para zero.

( ) se $a_n \leq b_n$, $\forall n$, $\{a_n\}$ crescente e $\{b_n\}$ convergente, então $\{a_n\}$ converge.

( ) se $\{a_n\}$ é convergente, então $\{(-1)^n a_n\}$ também converge.

( ) a sequência $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{na_n}{n+1}$ é convergente.

( ) a sequência $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 1 - a_n$ é convergente.

( ) se $a_n \neq 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

( ) se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ são convergentes e $x_n \leq y_n$, a partir de certa ordem, então $\lim x_n \leq \lim y_n$..

( ) a sequência $a_n = (-1)^n + \frac{1}{2}\cos\left(n^2 + n\right)$ possui uma subsequência convergente.

( ) se a série $\sum a_n$ é convergente, então as séries $\sum a_{2n}$ e $\sum a_{2n-1}$ também convergem.

( ) se as séries $\sum a_n^2$ e $\sum b_n^2$ são convergentes, então $\sum a_n b_n$ também converge.

( ) se a série $\sum a_n^2$ é convergente, então $\sum a_n/n$ também converge.

( ) se a série $\sum a_n$ é convergente e $a_n > 0,\ \forall n$, então $\sum a_n^2$ e $\sum a_n/\left(1+a_n\right)$ convergem.

8. Em cada caso, e quando possível, construa sequências $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ em $\mathbb{R}$ tais que $a_n \to \infty$, $b_n \to -\infty$, $c_n \to 0$ e que verifiquem:

(a) $a_n + b_n \to 1$ **(b)** $a_n + b_n \to -\infty$ **(c)** $a_n c_n \to 0$ **(d)** $\dfrac{a_n}{c_n} \to 1$.

9. Usando a definição de limite, prove que:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(n^5+n\right)}{n}=0$ **(c)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{n^2}\right)=3$

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2+3n}\right)=0$ **(f)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=2$ **(d)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5+n}{2+3n}\right)=\frac{1}{3}$.

10. Em cada caso, calcule $\lim a_n$:

(a) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ (b) $a_n = n\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ (c) $a_n = \dfrac{\ln n}{e^n}$ (d) $a_n = \dfrac{4n^2-3n}{n^2+5n-6}$

(e) $a_n = \dfrac{n^2}{n+1} - \dfrac{n^2}{n+2}$ (f) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n$ (g) $a_n = \dfrac{n}{e^n}$ (h) $a_n = \dfrac{\sqrt{n!}+e^{2n}}{5\sqrt{n!}-e^n}$

(i) $a_n = \dfrac{3n\sqrt{n}+1}{7-2n\sqrt{n}}$ (j) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ (k) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ (l) $a_n = \dfrac{1}{3^{n+1}} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-3}$

(m) $a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ (n) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$ (o) $a_n = \dfrac{2^n}{e^n}$ (p) $a_n = \sqrt[n]{a},\ a>0$

11. Verifique se a sequência $\{a_n\}$ é convergente ou divergente.

(a) $a_n = \sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}$ (b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}$ (c) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$

(d) $\dfrac{2^n}{1+2^n}$ (e) $a_n = \dfrac{n^2}{2n-1} - \dfrac{n^2}{2n+1}$ (f) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

(g) $\dfrac{n}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{n}$ (h) $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!2^n}$ (i) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$

(j) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ (k) $a_n = \dfrac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$ (l) $a_n = \dfrac{n^2}{\ln(n+1)}$

(m) $a_n = \operatorname{sen}(n\pi)$ (n) $a_n = \sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}$ (o) $a_n = 1+(-1)^n$

12. Prove que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a^n+b^n\right)^{1/n} = \max\{a,b\}$.

13. Se $|r|<1$, mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$. Se $r>1$, mostre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$. E se $r<-1$?

14. Se $0 < a < 2$, mostre que $a < \sqrt{2a} < 2$. Usando este fato, prove que a sequência

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$$

é monótona limitada e, portanto, convergente. Calcule seu limite.

15. Seja $\{b_n\}$ é uma sequência convergente, com $b_n \neq 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$. A partir da definição de limite, mostre que a sequência $\{1/b_n\}$ é limitada.

16. Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2^2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{3^2}) \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4^2}) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n^2})\right] = 0$.

17. A sequência $\{a_n\}$ é definida pela recorrência: $a_1 = 5$ e $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$. Estes termos podem ser gerados em uma calculadora, introduzindo-se o número 5 e pressionando-se a tecla $\boxed{\sqrt{x}}$. Mostre que $a_n = 5^{1/2^n}$ e calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

18. Em uma calculadora uma sequência é gerada introduzindo-se um número e pressionando-se a tecla $\boxed{1/x}$. Em que condições a sequência tem limite?

19. Seja $\{x_n\}$ uma sequência com a seguinte propriedade: existe um número natural p tal que $x_{n+p} = x_n$, $\forall n$. Construa uma sequência divergente com esta propriedade e mostre que a única sequência convergente com esta propriedade é a sequência constante. (sug. $x_{n+kp} = x_n$, $\forall k \in \mathbb{N}$)

20. Recorde-se que um número real x é *valor de aderência* de uma sequência $\{x_n\}$ quando alguma subsequência de $\{x_n\}$ convergir para x. Determine uma sequência cujo conjunto de valores de aderência é:

(a) $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ **(b)** $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ **(c)** $\mathcal{A} = [0, 1]$.

21. Considere as sequências $a_n : 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ e $b_n : 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.

(a) Determine todas as subsequências convergentes de $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

(b) Determine todos os valores de aderência de $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

22. Se $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$, com $a < b$, prove que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir do qual $x_n < y_n$.

23. Suponha que um número real a não é limite de uma sequência limitada $\{x_n\}$. Mostre que a sequência $\{x_n\}$ possui uma subsequência convergente com limite $\neq a$.

24. Defina a sequência $\{x_n\}$ por: $x_{2n} = 1/n$ e $x_{2n-1} = \sqrt{n}$. Quantos valores de aderência a sequência $\{x_n\}$ possui? Ela é convergente?

25. Se $\lim x_n = a$, prove que:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

26. e $X \subset \mathbb{R}$ é um subconjunto não vazio, mostre que $a \in X'$ se, e somente se, existe em $X \setminus \{a\}$ uma sequência com limite a.

27. Sejam $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ duas sequências, sendo $\{x_n\}$ convergente, e suponha que para cada $\varepsilon > 0$ exista uma número N tal que $|x_n - y_n| < \varepsilon, \ \forall n \geq N$. Seria a sequência $\{y_n\}$ convergente?

28. Defina por recorrência uma sequência $\{x_n\}$ da seguinte maneira: fixe $x_1 > 1$ e para $n \geq 1$ defina $x_{n+1} = 2 - 1/x_n$. Mostre que a sequência $\{x_n\}$ é convergente e calcule o seu limite.

29. Repita o Exercício 28 precedente com a sequência: $y_1 = 1$ e $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$, para $n \geq 1$.

30. LIMITE INFINITO Uma sequência $\{x_n\}$ tende para $+\infty$, e anota-se $x_n \to +\infty$ ou $\lim x_n = +\infty$, se para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ existir um número natural $N(\alpha)$ tal que $x_n \geq \alpha$, para qualquer índice $n \geq N(\alpha)$. Diz-se que $\{y_n\}$ tende para $-\infty$, e anota-se $y_n \to -\infty$ ou $\lim y_n = -\infty$, se para cada $\beta \in \mathbb{R}$ existir um número natural $N(\beta)$ tal que $y_n \leq \beta$, para qualquer índice $n \geq N(\beta)$. Considere em $\mathbb{R}^+$ dusa sequências $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.

    (a) Se $\lim (x_n/y_n) = L > 0$, então: $\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \lim y_n = +\infty$.

    (b) Se $\lim (x_n/y_n) = 0$ e $x_n \to +\infty$, então $y_n \to +\infty$. Se $\{y_n\}$ é limitada, então $\lim x_n = 0$.

31. CONVERGÊNCIA & TOPOLOGIA Mostre que $x \in \overline{X}$ se, e somente se, x é limite de alguma sequência de pontos do conjunto X. Usando esta caracterização e o exercício precedente conclua o seguinte fato: $F \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado se, e somente se, cumpre a seguinte condição: se $\{x_n\}$ é uma sequência em F com limite x, então $x \in F$.

2.2 Sequências de Cauchy. Limsup & Liminf

1. Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada e para cada $n \in \mathbb{N}$ sejam $S_n = \sup\{x_k;\ k \geq n\}$ e $s_n = \inf\{x_k;\ k \geq n\}$. Verifique que as sequências $\{S_n\}$ e $\{s_n\}$ são convergentes e que $\{x_n\}$ converge se, e somente se, $\lim S_n = \lim s_n$. O número real $\lim S_n$ é denominado *limite superior* da sequência $\{x_n\}$ e anota-se $\limsup x_n$ ou $\overline{\lim} x_n$. O número real $\lim s_n$ é denominado *limite inferior* da sequência $\{x_n\}$ e anota-se $\liminf x_n$ ou $\underline{\lim} x_n$. Da definição segue diretamente que:
$$\limsup x_n = \inf_n \sup_{k\geq n} \{x_k\} \quad \text{e} \quad \liminf x_n = \sup_n \inf_{k\geq n} \{x_k\}.$$

2. Estabeleça as seguintes propriedades para o $\limsup$ e $\liminf$.

(a) $\liminf x_n \leq \limsup x_n$.

(b) se $c \geq 0$, então $\limsup (c \cdot x_n) = c \cdot \limsup x_n$ e $\liminf (c \cdot x_n) = c \cdot \liminf x_n$.

(c) se $c \leq 0$, então $\liminf (c \cdot x_n) = c \cdot \limsup x_n$ e $\limsup (c \cdot x_n) = c \cdot \liminf x_n$.

(d) $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf (x_n + y_n)$.

(e) $\limsup (x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$.

(f) se $x_n \leq y_n$, $\forall n$, então $\liminf x_n \leq \liminf y_n$ e $\limsup x_n \leq \limsup y_n$.

3. Com respeito a uma sequência limitada $\{x_n\}$, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $x = \limsup x_n$

   (b) se $\varepsilon > 0$, existe apenas uma quantidade finita de números naturais n tais que $x + \varepsilon < x_n$, mas existe uma quantidade infinita de índices n tais que $x - \varepsilon < x_n$

   (c) $x = \inf X$, onde X é o conjunto dos números reais ξ tais que $\xi < x_n$, para no máximo uma quantidade finita de termos x_n.

4. Estabeleça um resultado análogo ao exercício 3 para o $\liminf$.

5. As sequências abaixo são divergentes. Por quê? Em cada caso, calcule o $\limsup$ e o $\liminf$.

   (a) $a_n = (-1)^n$ **(b)** $b_n = 1 + (-1)^n$ **(c)** $c_n = (-1)^n + 1/n$.

6. Se $\{x_n\}$ é uma sequência limitada, prove que alguma subsequência de $\{x_n\}$ converge para $\limsup x_n$. Idem para $\liminf x_n$. Isso estabelece o seguinte resultado devido a Bolzano-Weierstrass: *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

7. Mostre que toda sequência de Cauchy em $\mathbb{Z}$ permanece constante a partir de certo índice n_0.

8. Se $0 < r < 1$ e uma sequência $\{x_n\}$ satisfaz à relação $|x_{n+1} - x_n| < r^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, mostre que $\{x_n\}$ é de Cauchy.

9. Usando a definição, mostre que as sequências $x_n = (n+1)/n$ e $y_n = 1 + 1/2! + 1/3! \cdots + 1/n!$ são de Cauchy.

10. Sejam $t_0, t_1, \ldots, t_p$ números reais tais que $t_0 + t_1 + \ldots + t_p = 0$. Mostre que a sequência (a_n) definida por $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} t_k \sqrt{n+k}$ converge para zero.

11. Se $x_n \to x$, mostre que o conjunto X constituído dos pontos x e x_n, $n \in \mathbb{N}$, é compacto.

12. Se uma sequência monótona possui uma subsequência convergente, prove que a sequência é, ela própria, convergente. O mesmo ocorre com uma sequência de Cauchy.

13. Mostre que a sequência $a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$ é convergente.

14. Se $a_n > 0$, $\forall n$, mostre que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ o for.

15. **SEQUÊNCIA DE QUADRADO SOMÁVEL** Represente por l_2 o conjunto de todas as sequências reais de quadrado somável, isto é:

$$l_2 = \{\mathbf{x} = \{x_n\};\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}.$$

(a) Dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, mostre que $\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y} \in l_2$.

(b) Mostre que a função $\varphi : l_2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por: $\varphi(\mathbf{x}) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 \right)^{1/2}$, $\mathbf{x} = \{x_n\} \in l_2$, goza das seguintes propriedades:

(i) $\varphi(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall\ \mathbf{x} \in l_2$, e que $\varphi(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(ii) $\varphi(\lambda \mathbf{x}) = |\lambda| \varphi(\mathbf{x}), \quad \forall\ (\lambda, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times l_2$.

(iii) $\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y}), \quad \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in l_2$.