3.1 Equações Diferenciais Parciais

1. Determine a solução da EDP:
$$4f_x + 3f_y = 0,$$
que satisfaz à condição $f(x,0) = \operatorname{sen} x$, para todo x.

2. Sejam $u(x,y) = f(xy)$ e $v(x,y) = g(x/y)$ sendo f e g deriváveis. Mostre que:
$$xu_x - yu_y = 0 \quad \text{e} \quad xv_x + yv_y = 0.$$
Determine uma solução $u(x,y)$ que satisfaz $u(x,x) = x^4 e^{x^2}$, $\forall x$. Encontre uma solução $v(x,y)$ que satisfaz $v(1,1) = 2$ e $v_x(x, 1/x) = 1/x$, $\forall x \neq 0$.

3. Encontre a solução geral da equação $u_{xy} = 0$.

4. Uma função $u(x,y)$ é definida pela equação $u(x,y) = xyf\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$, sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável. Determine uma função $G(x,y)$, de modo que u satisfaça à EDP:
$$x^2 u_x - y^2 u_y = G(x,y)\, u$$

5. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^2 que depende apenas da distância à origem, digamos, $f(x) = g(\|x\|)$. Mostre que $\Delta f = \dfrac{n-1}{\|x\|} g'(\|x\|) + g''(\|x\|)$. Se f satisfaz a equação de Laplace, deduza que $f(x) = a\|x\|^{2-n} + b$, $x \neq 0$.

6. FUNÇÕES HOMOGÊNEAS Seja f um campo escalar diferenciável em um aberto S do $\mathbb{R}^n$, com a seguinte propriedade: $f(tx) = t^p f(x)$, $\forall\, t > 0$ e todo x de S, para o qual $tx \in S$. Uma tal função f recebe o nome de *função homogênea de grau* p. Se f é homogênea de grau p, mostre que:
$$\langle x, \nabla f(x) \rangle = pf(x), \quad \text{para todo } x \text{ em } S.$$
Como sugestão calcule a derivada $g'(1)$, sendo $g(t) = f(tx)$.

3.2 Funções Implícitas

1. Suponha que a equação $F(x,y,z)=0$ defina z como função de x e y, digamos, $z=f(x,y)$, sendo F de classe C^2. Mostre que:

$$f_{xx}=-\frac{F_{zz}F_x^2-2F_{xz}F_zF_x+F_z^2F_{xx}}{F_z^3}.$$

Encontre expressões análogas para as derivadas f_{yy} e f_{xy}.

2. Se a equação $f(y/x,z/x)=0$ define z como fução de x e y, mostre que $xz_x+yz_y=z$.

3. Considere a superfície $xy-z\ln y+e^{yz}-e=0$. É possível representá-la na forma $z=f(x,y)$ em uma vizinhança de $P_0(0,1,1)$?

4. Mostre que a curva interseção dessas superfícies $S_1: x^2\left(y^2+z^2\right)=5$ e $S_2:(x-z)^2+y^2=2$ pode ser parametrizada, em uma vizinhança do ponto $P(1,-1,2)$, sob a forma $y=f(x)$ e $z=g(x)$.

5. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1, com $f(1)=1$, e seja

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 2f(xy)=f(x)^2+f(y)\}.$$

   (a) Se $f'(1)\neq 0$, mostre que existe $\delta>0$, tal que $S\cap V_\delta(1,1)$ é o gráfico de uma função $y=\varphi(x)$, de classe C^1.

   (b) Admitindo f é de classe C^2 e $f'(1)\neq 0$, mostre que $x=1$ é um ponto de máximo ou mínimo local para φ. Seria S o gráfico de uma função $x=\psi(y)$, em uma vizinhança de $(1,1)$?

   (c) Se S é o gráfico de uma função $x=\psi(y)$ em uma vizinhança de $(1,1)$, mostre que $f'(1)=0$.

6. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, com $f(0,0)=0$. Determine uma condição para f, que permita resolver a equação $f(f(x,y),y)=0$, para explicitar y como função de x, em uma vizinhança de $(0,0)$.

7. Seja $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1, com $f(0,0)=0$, e considere as matrizes $A=[f_x(0,0)]$ e $B=[f_y(0,0)]$.

   (a) Escreva a matriz $Jf(0,0)$ em termos dos blocos A e B.

   (b) Se $\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é definida por $\varphi(x,y)=f(f(x,y),f(x,y))$, calcule, em termos de A e B, as matrizes $[\varphi_x(0,0)]$, $[\varphi_y(0,0)]$ e $J\varphi(0,0)$.

   (c) Se A é invertível e $\|B\|<1/\left\|A^{-1}\right\|$, mostre que a equação $\varphi(x,y)=0$ pode ser resolvida, para explicitar x em função y, em uma vizinança de $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^n$.

8. Mostre que o sistema
$$\left| \begin{array}{l} x^2 - y\cos uv + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin uv + 2z^2 = 2 \\ xy - \sin u \cos v + z = 0 \end{array} \right.$$
define, ao menos implicitamente, x, y e z como funções de u e v, em uma vizinhança do ponto de coordenadas $x = y = 1,\ z = 0,\ u = \pi/2,\ v = 0$. Calcule as derivadas x_u e x_v nesse ponto.

3.3 Máximos & Mínimos

1. Determine o(s) ponto(s) da curva $x = \cos t,\ y = \operatorname{sen} t,\ z = \operatorname{sen}(t/2)$ mais distante(s) da origem.

2. Quais das funções seguintes tem um máximo ou mínimo em todo plano $\mathbb{R}^2$?

   (a) $z = e^{x^2 - y^2}$ **(b)** $z = e^{-x^2 - y^2}$ **(c)** $z = x^2 - 2x(\operatorname{sen} y + \cos y)$.

3. Determine a distância (mínima) da origem à curva $y^2 = (x-1)^3$. Por que o Método dos Multiplicadores de Lagrange não se aplica nesse caso?

4. Seja $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Mostre que na reta $y = mx$ a função f tem um mínimo em $(0, 0)$, mas a origem não é um mínimo local. Esboce o conjunto dos pontos (x, y) onde $f < 0$ e onde $f > 0$.

5. Determine constantes a e b que tornam a integral $\int_0^1 \left(ax + b - x^2\right)^2 dx$ mínima.

6. Seja $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$, onde $A > 0$ e $B^2 < AC$.

   (a) Determine o valor mínimo de f.

   (b) Mostre que no ponto P_0, onde f assume seu valor mínimo, tem-se:
$$f(P_0) = \frac{1}{AC - B^2} \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

7. Determine 3 números positivos cuja soma seja 5 e o produto o maior possível.

8. Se x, y e z são números reais não negativos, mostre que $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{1}{3}(x + y + z)$.

9. Fixe n pontos distintos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ do $\mathbb{R}^m$ e defina $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sum_{k=1}^n \|x - z_k\|^2$. Prove que f atinge seu valor mínimo no ponto $\mathbf{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n z_k$. **o centroide**

10. MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADDOS A reta $f(x) = ax + b$ que melhor se ajusta aos dados $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ é aquela em que os coeficientes a e b minimizam a função

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2.$$

Esta reta é denominada *Regressão Linear*. Determine a reta que melhor se ajusta aos dados $A(1,3)$, $B(2,7)$ e $C(3,8)$.

11. Calcule o valor máximo de $f(x) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2$, sob a restrição $\|x\|^2 = 1$. Use o resultado e mostre a desigualdade:

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

válida para números reais positivos.

12. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função do exercício precedente e considere n números reais positivos $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Determine o valor máximo de f no conjunto $G = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \sum p_i x_i^2 = 1\}$.

FIQUE ALERTA! A condição $\nabla f + \lambda \nabla g = \vec{0}$ é necessária, mas não suficiente, para garantir a ocorrência de um valor extremo de $f(x,y)$ sujeito à restrição (vínculo) $g(x,y) = 0$. Por exemplo, considerando $f(x,y) = x + y$ e a restrição $xy = 16$, o método dos Multiplicadores de Lagrange produz os pontos $P_1(-4,-4)$ e $P_2(4,4)$ como candidatos a pontos extremos. Ainda assim, f não tem máximo na hipérbole $xy = 16$. Quanto mais distante da origem estiver $P(x,y)$ nessa hipérbole no 1^o quadrante maior será o valor de $x + y$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.1