4.1 Trajetórias & Integral de Linha

1. Calcule a integral de linha do campo vetorial $f(x,y,z) = \left(y^2 - z^2\right)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$, ao longo do caminho descrito por $\gamma(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$.

2. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, onde γ é o quadrado de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, percorrido no sentido anti-horário.

3. Verifique que o caminho descrito por $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathrm{sen}\,(1/t)\,\mathbf{j}$, $0 < t \le 1$, e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$ não é regular nem retificável.

4. Considere um fio uniforme semicircular de raio a.

   (a) Mostre que o *centróide* jaz no eixo de simetria a uma distância $2a/\pi$ do centro

   (b) Calcule o momento de inércia em relação ao diâmetro que passa nas extremidades do fio.

5. Seja $S = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ e considere o campo vetorial f definido em S por $f(x) = \|x\|^p\, x$, sendo p uma constante real. Encontre uma função potencial para f. O caso $p = -2$ deve ser tratado em separado.

6. Repita o Exercício 5 com o campo vetorial f definido por:

$$f(x) = \frac{g'(\|x\|)}{\|x\|}x,$$

   sendo g uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$.

7. Dê exemplo de uma curva $\boldsymbol{\gamma} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$, ligando dois pontos do $\mathbb{R}^2$ que não é retificável.

8. Sejam P_1, P_2 e P_3 três pontos do $\mathbb{R}^2$ e suponha que a trajetória de uma partícula em $\mathbb{R}^2$ seja descrita por:

$$\gamma(t) = (1-t)^2 P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2 P_3, \quad t \in [0,1].$$

   (a) Descreva o movimento da partícula.

   (b) Calcule $\gamma'(0)$ e $\gamma'(1)$.

   (c) Se P_1, P_2 e P_3 são linearmente independentes, mostre que $\gamma([0,1])$ está contido no triângulo de vértices P_1, P_2 e P_3.

9. Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ uma curva fechada diferenciável e suponha que K seja um convexo fechado do $\mathbb{R}^n$, tal que $\{\gamma'(t) : t \in [0,1]\} \subset K$. Mostre que $\mathbf{0} \in K$.

10. Seja $\boldsymbol{\gamma} : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = \left(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}\right)$. Mostre que a curva γ é retificável e calcule seu comprimento.

11. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e convexo e admita que f é um campo contínuo e conservativo em S. Verifique que é possível construir um potencial φ para f por meio da relação:

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle f(a + t(x-a)), (x-a)\rangle dt,$$

onde $a \in S$ é um ponto fixado. Se, em particular, $0 \in S$, então pode-se considerar:

$$\varphi(x) = \int_0^1 \langle f(tx), x\rangle dt.$$

4.2 Domínios & Integral Múltipla

1. Mostre que o conceito de integral dupla para funções escadas não depende da escolha da partição. Isso torna o conceito consistente!

2. OSCILAÇÃO DE UMA FUNÇÃO LIMITADA Dada uma função limitada $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, a OSCILAÇÃO de f em um ponto x_0 é definida por:

$$o(f;x_0) = \lim_{\delta \to 0^+} [M_\delta(f;x_0) - m_\delta(f;x_0)],$$

onde $M_\delta(f;x_0) = \sup\{f(x) : x \in \Omega \cap B_\delta(x_0)\}$ e $m_\delta(f;x_0) = \inf\{f(x) : x \in \Omega \cap B_\delta(x_0)\}$.

   (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem limites laterais no ponto x_0, mostre que $o(f;x_0) = |f(x_0+0) - f(x_0-0)|$.

   (b) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é crescente e $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_k < b$, mostre que

$$\sum_{j=1}^{k} o(f;x_j) < f(b) - f(a).$$

3. CONJUNTO DE MEDIDA ZERO Um subconjunto S do $\mathbb{R}^N$ tem MEDIDA ZERO, e anota-se $\text{med}(S) = 0$, quando dado $\varepsilon > 0$ existir uma cobertura $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de S por retângulos fechados tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol}(A_k) < \varepsilon.$$

(a) Mostre que todo subconjunto enumerável do $\mathbb{R}^N$ tem medida zero.

(b) Se $\text{med}\,(S_k) = 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots$, mostre que

$$\text{med}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\right) = 0.$$

4. Calcule a integral dupla $\displaystyle\iint_Q y^{-3} \exp\left(tx/y\right) dxdy$, onde $Q = [0, t] \times [1, t]$, $t > 0$, dado que a integral existe.

5. Se Q é um retângulo do $\mathbb{R}^2$, mostre que uma integral dupla da forma $\displaystyle\iint_Q f(x)\, g(y)\, dxdy$ é igual ao produto de duas integrais unidimensionais.

6. Seja f definida no retângulo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ como segue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y, & \text{se } x + y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Faça um esboço do conjunto $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q \quad \text{e} \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\right\}$ e calcule $\text{vol}\,(S)$ por integral dupla.

7. Considere o exercício precedente com a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{se } x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

8. Resolva o Exercício 5, quando $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ e

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

9. Seja f definida no retângulo $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ como segue:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

   Prove que a integral dupla de f sobre Q existe e é igual a zero.

10. Um sólido S do $\mathbb{R}^3$ abaixo do gráfico de $z = f(x, y)$ e acima de uma região R do plaxo-xy tem volume dado por:

$$\text{vol}\,(S) = \int_1^2 \left[\int_x^{x^2} f(x, y)\, dy\right] dx + \int_2^8 \left[\int_x^8 f(x, y)\, dy\right] dx.$$

(a) Faça um esboço da região R e escreva $\operatorname{vol}(S)$ como uma integral dupla com a ordem de integração invertida.

(b) Calclule o volume de S.

11. Seja A um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. Se A é finito, mostre que A tem *conteúdo* zero. Se as coordenadas dos pontos de A são todas racionais, mostre que A tem *medida* zero. Dê exemplo de um conjunto limitado em $\mathbb{R}^2$ de *medida* zero e *conteúdo* não nulo.

12. Considere a função de Dirichlet no retângulo $Q = [0,1] \times [0,1]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ e } y \text{ são racionais} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O conjunto D_f de descontinuidades de f tem medida zero? A função f é integrável sobre Q?

13. Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ descrita por:

$$x = Au + Bv \quad \text{e} \quad y = au + bv$$

e suponha que o jacobiano $J(T) \neq 0$. Mostre que T transforma retas em retas e determine a imagem do triângulo $\mathcal{R}$ de vértices $(0,0)$, $(2,2)$ e $(-2,2)$ pela transformação T. Qual a relação entre as áreas de $\mathcal{R}$ e de $T(\mathcal{R})$?

14. Use uma transformação linear adequada e calcule a integral dupla de $(x-y)^2 \operatorname{sen}^2(x+y)$ sobre o paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, $(0, \pi)$.

15. Dado $r > 0$, cosidere $I(r) = \displaystyle\int_{-r}^{r} \exp\left(-t^2\right) dt$.

(a) Mostre que $I^2(r) = \displaystyle\iint_Q \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy$, onde Q é o quadrado $Q = [-r, r] \times [-r, r]$.

(b) Se $\alpha \leq r \leq \beta$, mostre que:

$$\iint_{V_\alpha(0)} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy \leq I^2(r) \leq \iint_{V_\beta(0)} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy.$$

(c) Calcule o limite: $\lim_{r\to\infty} I(r)$ e deduza que $\displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-t^2\right) dt = \sqrt{\pi}/2$.

(d) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dxdy$.

16. Se $V_r^n(x_0)$ representa o volume da bola do $\mathbb{R}^n$ de centro em x_0 e raio r, estabeleça uma relação entre $V_r^n(x_0)$ e $V_1^n(0)$. (sug.: use a fórmula de mudança de variáveis para integrais múltiplas sobre regiões limitadas do $\mathbb{R}^n$).

17. Seja $B_n(0;a) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_S \leq a\}$ e represente por $V_n(a)$ o volume de $B_n(0;a)$, isto é:

$$V_n(a) = \int\int \cdots \int_{B_n(0;a)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

(a) Prove que $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

(b) Para $n \geq 2$, expresse $V_n(1)$ como uma iteração de uma integral simples e uma integral em $\mathbb{R}^{n-1}$ e mostre que:

$$V_n(1) = V_{n-1}(1) \int_{-1}^{1} (1 - |x|)^{n-1}\, dx = \frac{2}{n} V_{n-1}(1).$$

(c) Use (a) e (b) para deduzir que $V_n(a) = \dfrac{2^n a^n}{n!}$.

4.3 Gráficos & Integral de Superfície

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.1

8. Sejam $x(t) = (1-t)P_1 + tP_2$ e $y(t) = (1-t)P_2 + tP_3$ parametrizações dos segmentos $[P_1, P_2]$ e $[P_2, P_3]$, respectivamente.

(a) Verifique que $\gamma(t) = (1-t)x(t) + ty(t)$ e, portanto, para cada t o ponto $\gamma(t)$ da trajetória jaz no segmento $[x(t), y(t)]$. Além disso,

$$\frac{\|\gamma(t) - x(t)\|}{\|y(t) - x(t)\|} = \frac{\|x(t) - P_1\|}{\|P_2 - P_1\|} = \frac{\|y(t) - P_2\|}{\|P_3 - P_2\|} = t$$

1. e isto nos diz que $\gamma(t)$ é o ponto do segmento $[x(t), y(t)]$ distante das extremidades, na mesma proporção com que $x(t)$ está distantes das extremidades de $[P_1, P_2]$ e $y(t)$ está das extremidades $[P_2, P_3]$.

(b) $\gamma'(0) = 2(P_2 - P_1)$ e a trajetória é tangente ao segmento $[P_1, P_2]$ no ponto P_1. Interpretação similar para $\gamma'(1) = 2(P_3 - P_2)$.

(c) Se $\mathcal{R}$ é o triângulo de vértices P_1, P_2 e P_3, então

$$P \in \mathcal{R} \Leftrightarrow P = x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad 0 \le x_i \le 1.$$

Note que

$$\gamma(t) = \underbrace{(1-t)^2}_{=x_1}P_1 + \underbrace{2t(1-t)}_{=x_2}P_2 + \underbrace{t^2}_{=x_3}P_3, \quad t \in [0,1]$$

e como $x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad 0 \le x_i \le 1$, segue que $\gamma(t) \in \mathcal{R}$.

9. Raciocine por absurdo e suponha que $\mathbf{0} \notin K$. Seja $x_0 = P_K(\mathbf{0})$ (a projeção de $\mathbf{0}$ em K), isto é, x_0 é o ponto de$K$ mais próximo de $\mathbf{0}$.

(a) Mostre que $K \cap \{x \in R^n : \langle x, x_0 \rangle = 0\} = \varnothing$. Use o fato que $\langle \mathbf{0} - x_0, y - x_0 \rangle \le 0, \ \forall y \in K$.

(b) Defina $g(t) = \langle \gamma(t), x_0 \rangle, \quad a \le t \le b$, e use o Teorema de Rolle para concluir que existe t_0 tal que $g'(t_0) = 0$ e daí deduza que $\gamma'(t_0) \in \{x \in R^n : \langle x, x_0 \rangle = 0\}$.

(c) Conclua que $\gamma'(t_0) \in K \cap \{x \in R^n : \langle x, x_0 \rangle = 0\}$, contradizendo o ítem (a). Logo, $\mathbf{0} \in K$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.2

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.3