3.1 Fundamentos Básicos

FORMAS INDETERMINADAS

$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$	∞^0	1^∞	$0 \times \infty$

OPERAÇÕES COM OS SÍMBOLOS $\pm\infty$

$\infty + \infty = \infty$	$\infty \times \infty = \infty$	$(-\infty) \times \infty = -\infty$
$k \times \infty = \infty, \quad \text{se } k > 0$	$k \times \infty = -\infty, \quad \text{se } k < 0$	$(-\infty) \times (-\infty) = \infty$
$k^\infty = \infty, \quad \text{se } k > 1$	$\infty^p = \infty, \quad \text{se } p > 0$	$\infty^p = 0, \quad \text{se } p < 0$
$\dfrac{k}{0} = \pm\infty \quad \text{e} \quad \dfrac{k}{\pm\infty} = 0$	$-\infty - \infty = -\infty$	$\infty \times (-\infty) = -\infty$

FUNÇÕES RACIONAIS

Ao calcular o limte no infinito (quando $x \to \pm\infty$) de uma função racional (quociente de dois polinômios), recomendamos colocar em evidência no numerador e no denominador o termo de maior grau:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \cdots + A_n x^n}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \cdots + B_k x^k} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n \left[\frac{A_0}{x^n} + \frac{A_1}{x^{n-1}} + \frac{A_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{x} + A_n\right]}{x^k \left[\frac{B_0}{x^k} + \frac{B_1}{x^{k-1}} + \frac{B_2}{x^{k-2}} + \cdots + \frac{B_{k-1}}{x} + B_k\right]}.$$

Cada termo que contém uma potência de x no denominador tem limite zero e, sendo assim, o valor do limite se reduz a:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{A_n x^n}{B_k x^k}.$$

O valor final depende dos coeficientes A_n e B_k e, naturalmente, de n e k que são os graus dos polinômios.

a) Se os polinômios têm mesmo grau, isto é, $n = k$, então o valor do limite é:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{A_n x^n}{B_n x^n} = \frac{A_n}{B_n}.$$

b) Se o grau do numerador (n) é maior do que o grau do denominador (k), então:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{A_n x^n}{B_k x^k} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{A_n}{B_n} x^{n-k} = \pm\infty. \qquad \text{(depende do sinal de } A_n/B_k; \quad \text{note que } n-k>0)$$

c) Se o grau do numerador (n) é menor do que o grau do denominador (k), então:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{A_n x^n}{B_k x^k} = \lim_{x\to\pm\infty} (A_n/B_k) \frac{1}{x^{k-n}} = 0. \qquad \text{(note que } k-n>0)$$

PROPRIEDADES ALGÉBRICAS

Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e que $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Então:

1. $\lim_{x\to a} k = k,\qquad k$ constante.
2. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M.$
3. $\lim_{x\to a} [kf(x)] = kL,\qquad k$ constante.
4. $\lim_{x\to a} [f(x) \times g(x)] = L \times M.$
5. $\lim_{x\to a} [f(x)/g(x)] = L/M,\qquad (M \neq 0 \quad \text{e} \quad g(x) \neq 0,\ \forall x \neq a).$

OUTRAS PROPRIEDADES

1. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$.
2. Se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ e $f(x)$ é uma função limitada[1], então $\lim_{x\to a} [f(x) \times g(x)] = 0$.
3. Confronto: se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x$, e se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Em cada caso abaixo calcule o limite de $f(x)$, quando $x \to a$.

   (a) $f(x) = 2x + 5;\quad a = -7.$

   (b) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1};\quad a = 0.$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x+5};\quad a = -5.$

   (d) $f(x) = \dfrac{-2x-4}{x^3 + 2x^2};\quad a = -2.$

   (e) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2};\quad a = 1.$

   (f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1};\quad a = -1.$

   (g) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^3-1};\quad a = 1.$

   (h) $f(x) = \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x};\quad a = 9.$

   (i) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x};\quad a = 0.$

[1] Uma função $f(x)$ é limitada quando existir uma constante C, tal que $|f(x)| \leq C$, $\forall x$.

(j) $f(x) = \dfrac{x^2+8x-20}{x^2-x-2}$; $a = 2$.

(k) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$; $a = 2$.

(l) $f(x) = \dfrac{x^4-2x+1}{x^3+2x^2+1}$; $a = 1$.

(m) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}-x}$; $a = 3$.

(n) $f(x) = \dfrac{\left(3-x^3\right)^4-16}{x^3-1}$; $a = 1$ (considere $u = 3 - x^3$)

(o) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}}$; $a = 1$

(p) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+2}-1}{x+1}$; $a = -1$ (considere $u = \sqrt[3]{x+2}$)

2. Se f é uma função definida em $\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, mostre que:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x} = 3$. (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f\left(x^2\right)}{x} = 0$.

3. Sabendo que $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x}$.

4. Sabendo-se que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-5}{x-2} = 3$, calcule $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

5. Se φ é uma função tal que $1 - \dfrac{x^2}{4} \le \varphi(x) \le 1 + \dfrac{x^2}{2}$, $\forall x \neq 0$, calcule $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$.

6. Sabendo que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e que $g(x)$ é uma função limitada, use a propriedade do Confronto e mostre que $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

7. Considere a função g definida por $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \le 0 \\ -1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$. Investigue a existência dos limites: $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} x^2 g(x)$.

8. Em cada caso abaixo, calcule os limites laterais de f no ponto a.

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}, \quad a = -2$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)^2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = \dfrac{2-x}{(1-x)^3}, \quad a = 1$

(d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}, \quad a = 2$

(e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{5}}{x}, \quad a = 0$

(f) $f(x) = \dfrac{(x+3)|x+2|}{x+2}, \quad a = -2$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}, \quad a = 1$

(h) $f(x) = \dfrac{x+3}{|x^2-9|}, \quad a = -3$

(i) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{|x-1|}, \quad a = 1$

(j) $f(x) = \dfrac{x+2}{|x^2-4|}, \quad a = -2$

9. Calcule $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2}$ e verifique se existe o limite $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{x-2}$.

10. Calcule os limites laterais indicados.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5}{x-3}$ (f) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{5}{x-3}$ (g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-3}{x^2}$

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{3}{x^2-x}$ (j) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3}{x^2-x}$ (k) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$ (l) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$ (n) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{3x^2-4}{1-x^2}$ (o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$ (p) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

11. Calcule os seguintes limites no infinito:

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4+3x+2\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-3x+2\right)$ (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^3+2x+1\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3x^3+2x+1\right)$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(5-4x+x^2-x^5\right)$ (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(5-4x+x^2-x^5\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$ (h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$ (i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x+3}\right)$ (k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$ (l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^3+3}\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{x^3+3}\right)$ (n) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5-x}{3+2x}$ (0) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-\sqrt{|x|}}{\sqrt{1-x}}$

3.2 Limite×Continuidade

Uma função $y = f(x)$ é *contínua* no ponto x_0 de seu domínio quando tiver limite no ponto x_0 e, além disso, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Quando $f(x)$ não for contínua no ponto x_0, diremos que f é *descontínua* em x_0 e isto ocorrerá quando ao menos uma das condições abaixo se verificar:

- ou f não estiver definida no ponto x_0;

- ou o limite de $f(x)$ no ponto x_0 não existir;
- ou f tiver limite em x_0, mas, o valor do limite não coincidir com $f(x_0)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER

1. Verdadeiro (V) ou Falso (F)?

   (a) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \Longrightarrow f$ é contínua em $x = a$.

   (b) Se $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ existe, então $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ também existe.

   (c) Se $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

2. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, \text{ se } x \neq 1 \\ 3, \text{ se } x = 1 \end{cases}$.

   Esta função é contínua em $x = 1$?

3. Seja f uma função real contínua, definida em torno do ponto $a = 1$, tal que $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$, para $x \neq 1$. Quanto vale $f(1)$? Por quê?

4. Em cada caso, determine o valor de k, de modo que a função $f(x)$ seja contínua no ponto a indicado.

   (a) $a = 2$; $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, \text{ se } x \neq 2 \\ k, \text{ se } x = 2 \end{cases}$ $\qquad$ (b) $a = 3$; $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, \text{ se } x > 0 \text{ e } \neq 3. \\ k, \text{ se } x = 3 \end{cases}$

5. Seja f a função definida por: $f(-1) = 2$ e $f(x) = \dfrac{x^2+x}{x+1}$, para $x \neq -1$. A função f é contínua no ponto $x = -1$? Por quê? E no ponto $x = 0$?

6. Dê exemplo de uma função f, definida em $\mathbb{R}$, descontínua no ponto $x = 2$, mas que satisfaça $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

7. Seja f uma função tal que $|f(x)| \leq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é continua em $x = 0$.

8. Esboce o gráfico e encontre os pontos de descontinuidade da função f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3}{5}, \text{ se } x \leq 1 \\ 6-5x, \text{ se } 1 < x < 3 \\ x-3, \text{ se } x \geq 3 \end{cases}.$$

9. Em cada caso, esboce o gráfico da função e diga se ela é contínua no ponto a indicado.

(a) $a = 0$; $f(x) = \begin{cases} 2 - x, \text{ se } x > 1 \\ x^2, \text{ se } x \leq 1 \end{cases}$ (b) $a = 0$; $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|}, \text{ se } x \neq 2 \\ 1, \text{ se } x = 2 \end{cases}$

(c) $a = -1$; $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$ (d) $a = 1$; $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ [x], \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$.

■ NOTA No Exercício 9(d), $[x]$ representa o *maior inteiro menor ou igual a* x e a função correspondente $x \longmapsto [x]$ é denominada *função escada*.

10. Seja f a função cujo gráfico encontra-se esboçado abaixo.
    (a) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
    (b) Calcule $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.
    (c) Calcule $f(0)$.
    (d) Calcule$f(3)$.
    (e) f é contínua no ponto $x = 0$?
    (f) f é contínua no ponto $x = 3$?

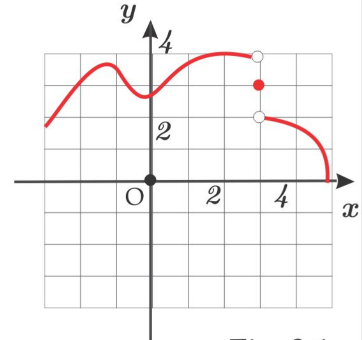

Fig. 3.1

11. Existe um número real α capaz de fazer com que $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + \alpha x + \alpha + 3}{x^2 + x - 2}$ exista?

12. Uma companhia ferroviária cobra R\$10 por km, para transportar um vagão até uma distância de $200km$, cobrando ainda R\$8 por cada km que exceda a 200. Além disso, essa mesma companhia cobra uma taxa de serviço de R\$1.000 por vagão, independentemente da distância a percorrer. Determine a função que representa o custo para transportar um vagão a uma distância de x km e esboce seu gráfico. Essa função é contínua em $x = 200$?

13. Uma fábrica é capaz de produzir 15.000 unidades de um certo produto, em um turno de 8 horas de trabalho. Para cada turno de trabalho, sabe-se que existe um custo fixo de R\$2.000,00, relativo ao consumo de energia elétrica. Supondo-se que, por unidade produzida, o custo variável, dado o gasto com matéria prima e salários, é de R\$2,00, determine a função que representa o custo total para a fabricação de x unidades e esboce seu gráfico. A função encontrada é contínua para $0 \leq x \leq 45.000$?

14. Um estacionamento cobra R\$3 pela primeira hora, ou parte dela, e R\$2 por hora sucessiva, ou parte dela, até o máximo de R\$10. Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido e analise as descontinuidades dessa função.

15. Prove que a equação $x^5 + x + 1 = 0$ tem ao menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

16. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais e distintas.

17. Considere a função f definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, \text{ se } -2 \le x < 0 \\ -x^2 - 2, \text{ se } 0 \le x \le 2 \end{cases}$. Mostre que não existe um número α no intervalo $[-2, 2]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Isto contradiz o corolário do Teorema do valor Intermediário?

18. Quais das seguintes afirmações sobre a função $y = f(x)$ ilustrada abaixo são verdadeiras e quais são falsas?

    (a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe.
    (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
    (c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
    (d) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.
    (e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.
    (f) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe no ponto a em $(-1, 1)$.

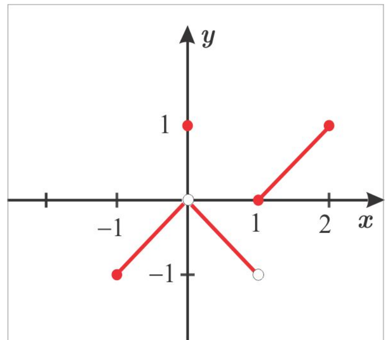

Fig. 3.2

19. Explique por que os limites abaixo não existem.

    (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ (b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}$ (c) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x+3}{(x-1)(x+2)}$ (d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3}{x}$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.1

1. (a) -9 (b) $3/2$ (c) -7 (d) $-1/2$ (e) 4 (f) $-1/3$ (g) $4/3$ (h) $1/6$ (i) 1 (j) 4 (k) $1/3\sqrt[3]{4}$ **(l)** 0 (m) $1/(3-\sqrt{2})$ (n) -32 (o) $1/2$ (p) $1/3$.

2. Nos dois casos, usaremos uma mudança de variável.

    (a) Com $u = 3x$, tem-se $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(3x)}{x} = 3 \lim_{u\to 0} \dfrac{f(u)}{u}$.

    (b) Faça $u = x^2$ e encontre $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x^2)}{x} = \pm \lim_{u\to 0} \dfrac{\sqrt{u} f(u)}{u}$.

3. 4 e -2.

4. 5.

5. 1.

6. Use a relação $0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq M |f(x)|$ e a propriedade do Confronto.

7. A função $g(x)$ não tem limite em $x = 0$ e $\lim_{x \to 0} \left[x^2 g(x) \right] = 0$.

8. Veja a tabela.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)
$\lim_{x \to a^-} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-4	$2\sqrt{5}/5$	-1	$-\sqrt{2}$	$-1/6$	-2	$-1/4$
$\lim_{x \to a^+} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	4	$2\sqrt{5}/5$	1	$\sqrt{2}$	$1/6$	2	$1/4$

9. Quando $x \to 2^+$ o limite existe e vale 0. Quando $x \to 2^-$ o limite não existe, porque a função não está definida à esquerda de $x = 2$.

10. Veja a tabela.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)	(p)
∞	$-\infty$	∞	∞	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	-1	∞	$-\infty$	1	$-\infty$

11. Veja a tabela.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)
∞	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	$5/6$	$5/6$	0	∞	$5/6$	$-\infty$	$-\infty$	$-1/2$	-1

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 3.2

1. (a) F (b) F (c) V

2. $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ e $f(1) = 3$. Logo, f é descontínua em $a = 1$.

3. Como f é contínua em $a = 1$, devemos ter $f(1) = -1$.

4. (a) $k = 12$ (b) $k = \sqrt{3}/6$.

5. f é descontínua em $x = -1$, porque $f(-1) = 2$ e $\lim_{x \to -1} f(x) = -1$. A função é contínua em $x = 0$.

6. Considere, por exemplo, a função f definida assim: $f(x) = x$, para $x \neq 2$ e $f(2) = 0$.

7. $x = 3$ é a única descontinuidade de f.

8. Use a Propriedade do Confronto.

9. (a) sim (b) sim (c) não (d) não.

10. (a) 3 (b) não existe (c) 3 (d) 4 (e) sim (f) não.

11. Se $\alpha = 15$, o limite será -1.

12. Se $x \leq 200$, o custo $C(x)$ é determinado em reais por $C(x) = 1.000 + 10x$. O custo para uma distância de 200 km é, portanto, $C(200) = R\$3.000$. Se a distância excede 200 km, isto é, se $x > 200$, então o custo total será dado por $C(x) = 3.000 + 8(x - 200)$. Resumindo, temos: $C(x) = 1000 + 10x$, se $0 < x \leq 200$, e $C(x) = 1400 + 8x$, para $x > 200$. Essa função é contínua em $x = 200$.

13. Se $0 \leq x \leq 15000$, um único turno de trabalho será suficente e, assim, $C(x) = 2000 + 2x$. Se $15000 < x \leq 45000$, então a fábrica deverá operar em 3 turnos e, nesse caso, $C(x) = 6000 + 10x$. Nesse intervalo a função custo é descontínua.

14. As descontinuidades ocorrem nos instantes $t = 1,\ t = 2,\ t = 3$ e $t = 4$

15. Basta observar que $f(-1) < 0$ e que $f(1) > 0$. A conclusão segue do Teorema do Valor Intermediário.

16. Use o Teorema do Valor Intermediário para a função $f(x)$, nos intervalos $[-3, 0]$, $[0, 1]$ e $[1, 2]$.

17. Não. Como a função não é contínua em $[-2, 2]$, o fato não contradiz o resultado citado.

18. V, V, F, F, F, V.

19. Em cada caso, note que os limites laterais, quando existem, são diferentes.