4.1 Funções Deriváveis

1. Em cada caso, encontre a derivada da função $y = f(x)$, usando a definição.

   (a) $y = x^2 + 1$ (b) $y = 2x^3$ (c) $y = x^2 - 5$ (d) $y = 2x^2 - 3x$ (e) $y = \dfrac{1}{x+1}$.

2. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por: $f(x) = -x$, para $x \leq 0$, e $f(x) = 2$, para $x > 0$.

   (a) Calcule $f'(-1)$ (b) Existem as derivadas $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$? (c) f é derivável em $x = 0$?

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = |x| + x$.

   (a) Existe $f'(0)$? (b) Existe $f'(x)$ para $x \neq 0$? (c) Como se define a função f'?

4. Investigue a derivabilidade da função dada no ponto indicado.

   (a) $x = 0$; $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ x, \text{ se } x > 0 \end{cases}$ (b) $x = 1$; $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ se } 0 < x < 1 \\ 2x - 1, \text{ se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

   (c) $x = 1$; $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ se } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}(x+1), \text{ se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$ (d) $x = 0$; $f(x) = |x|$

5. Existe algum ponto no qual a função $y = \left|x^2 - 4x\right|$ não é derivável? Por quê?

6. Seja f uma função derivável em $x = 1$ tal que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)}{h} = 5$. Calcule $f(1)$ e $f'(1)$.

7. Suponha que f seja uma função derivável em $\mathbb{R}$, satisfazendo $f(a+b) = f(a) + f(b) + 5ab$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$. Se $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h)}{h} = 3$, determine $f(0)$ e $f'(x)$.

8. Calcule a e b, de modo que a função $f(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ ax + b, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ seja derivável em $x = 1$.

9. Em cada caso, determine as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f, no ponto cuja abscissa é fornecida.

   (a) $f(x) = x^{2/3}$, $x = 8$ (b) $f(x) = x^{-3/4}$, $x = 16$ (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 3$.

10. Determine a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$, com inclinação $m = -8$. Faça um gráfico ilustrando a situação.

11. Determine a equação da reta normal à curva $y = -x^3/6$, com inclinação $m = 8/9$.

12. Se $y = f(x)$ é a função definida por $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, \text{ se } x \geq 2 \\ -\sqrt{2-x}, \text{ se } x \leq 2 \end{cases}$, encontre as equações das retas tangente e normal ao gráfico de f, no ponto de abscissa $x = 2$.

13. Determine a equação da reta que tangencia o gráfico da função $y = x^2$ e é paralela à reta $y = 4x+2$.

14. Verifique que a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 1/x$, no ponto de abscissa $x = a$, intercepta o eixo x no ponto $A(2a, 0)$.

15. Determine as retas horizontais que são tangentes ao gráfico da função $g(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x - 1$.

16. Considere a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$.

    (a) Esboce o gráfico de f (b) f é contínua em $x = 1$? (c) f é derivável em $x = 1$?

    (b) Repita o exercício precedente, considerando agora $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 1 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$.

17. Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x|x|$.

    (a) Determine $f'(x)$, para $x \neq 0$. (b) Existe $f'(0)$? (c) Esboce os gráficos de f e de f'.

4.2 Regras Básicas de Derivação

1. Se $f(x) = 3x^4 + x^3 - 2x$, calcule as derivadas $f'(0)$, $f''(0)$ e $f^{(30)}(0)$.

2. Se $y = \dfrac{x+1}{x-1}$, verifique que $(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2\dfrac{dy}{dx}$.

3. Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

   (a) $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2$ (b) $y = \dfrac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0.5x^4$ (c) $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2$

   (d) $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ (e) $y = \dfrac{\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x - x}{2}$ (f) $y = x \operatorname{arcsen} x$

(g) $y = e^x \cos x$ (h) $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$ (i) $y = (3 - 2\,\text{sen}\, x)^5$

(j) $y = 2x + 5\cos^3 x$ (k) $y = \sqrt{\dfrac{3\,\text{sen}\, x - 2\cos x}{5}}$ (l) $y = \sqrt{xe^x + x}$

(m) $y = \arccos(e^x)$ (n) $y = \text{sen}\,(3x) + \cos(x/5) + \text{tg}\,(\sqrt{x})$ (o) $y = \dfrac{1 + \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}$

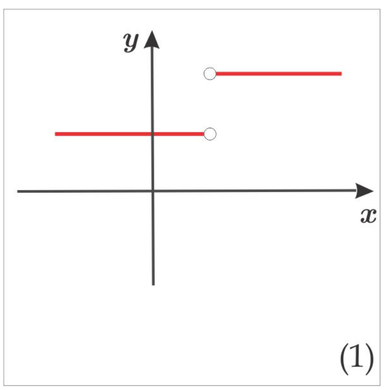
(p) $y = \text{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (q) $y = \ln(\text{sen}\, x)$ (r) $y = (\ln x)^2 + \ln(\ln x)$

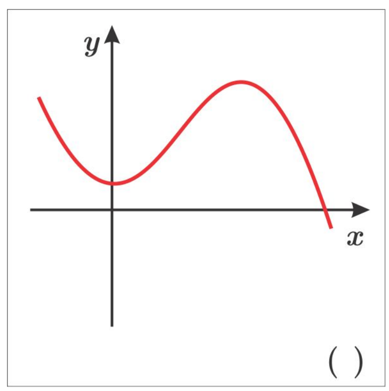
4. Verifique que a função $y = xe^{-x}$ é solução da equação $xy' = (1 - x)\, y$.

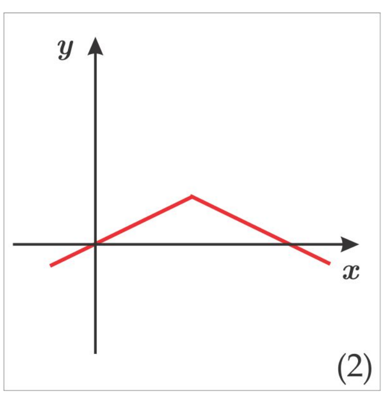
5. Verifique que a função $y = \dfrac{1}{1 + x + \ln x}$ é solução da equação $xy' = (y \ln x - 1)\, y$.

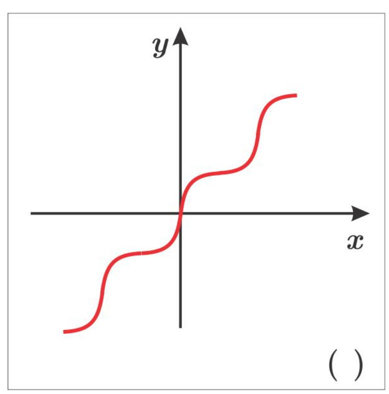
6. Se a e b são constantes quaisquer, verifique que a função $y = ae^{-x} + be^{-2x}$ é solução da equação $y'' + 3y' + 2y = 0$.

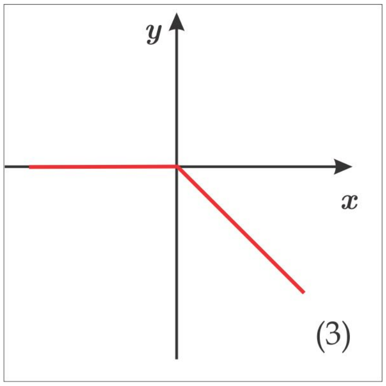
7. Os gráficos da coluna da esquerda são das derivadas das funções cujos gráficos estão na coluna da direita. Faça a correspondência, numerando, convenientemente, a coluna da direita.

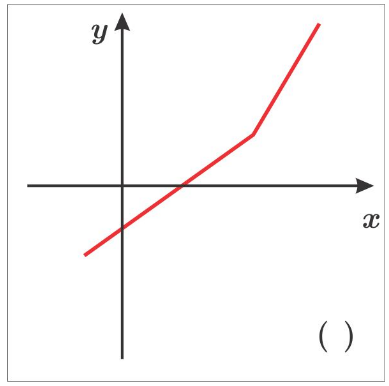


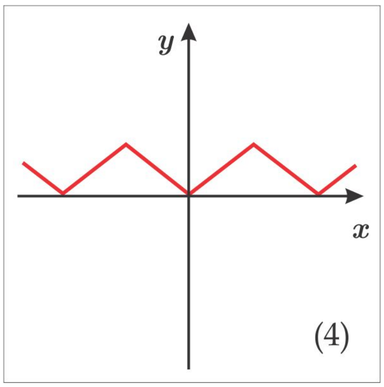


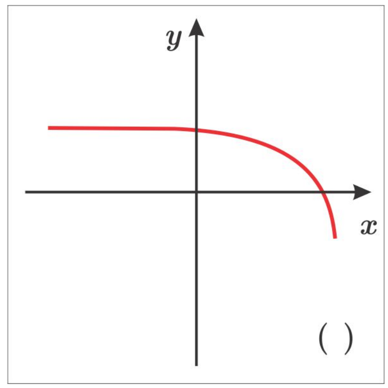












4.3 Regra da Cadeia e Derivação Implícita

1. Se $y = x^2 - \sqrt{1+u^2}$ e $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

2. Cada uma das equações abaixo define, implicitamente, y como função de x. Encontre $\dfrac{dy}{dx}$.

   (a) $y^3 = x + y$ (b) $y^3 + 2xy = \sqrt{x}$ (c) $\sqrt{x+y} = \sqrt{y+1}$

   (d) $4\cos x \operatorname{sen} y = 1$ (e) $xy = \operatorname{cotg}(xy)$ (f) $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$

3. Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável em $\mathbb{R}$. Se $y = \dfrac{1}{x^2+1}$, verifique que

$$\frac{dy}{dt} = -2xy^2 \frac{dx}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

4. Suponha que $x = x(t)$ seja uma função derivável até a segunda ordem. Se $y = x^3$, verifique que

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 6x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2\frac{d^2x}{dt^2}.$$

5. Sejam f e g funções deriváveis, tais que $g(-1) = 2$, $f(2) = -3$, $g'(-1) = -1/3$ e $f'(2) = 6$. Encontre as retas tangente e normal à curva $y = f(g(x))$, no ponto de abscissa $x = -1$.

6. Se $h(x) = [f(x)]^3 + f\left(x^3\right)$, calcule $h'(2)$, sabendo que $f(2) = 1$, $f'(2) = 7$ e que $f'(8) = -3$.

7. Suponha que a equação
$$\frac{y}{x-y} - \frac{x}{y} + \sqrt{x} = 0 \tag{4.1}$$
defina y como função de x em torno do ponto $x = 1$. Calcule $y'(1)$.

8. Se n é um número natural, qual é a derivada de ordem n da função $y = (ax+b)^n$?

9. Determine as retas tangente e normal à circunferência $x^2 + y^2 = 25$, no ponto $P_0 = (3, 4)$.

10. Mesma questão precedente, considerando agora a hipérbole $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ e $P_0 = (-5, 9/4)$.

11. Suponha que f seja uma função derivável em seu domínio D e que, para todo x em D, satisfaça $xf(x) + \operatorname{sen}[f(x)] = 4$. Se $x + \cos[f(x)] \neq 0$, mostre que $f'(x) = \dfrac{-f(x)}{x + \cos[f(x)]}$.

12. Para cada uma das funções f definidas abaixo, comprove a existência da inversa g, determine o domínio desta última e uma expressão que a defina explicitamente. Esboce os gráficos de f e g.

    (a) $f(x) = x^2 - 4,\ x \geq 0$ (b) $f(x) = x^2 - 4,\ x \leq 0$ c) $f(x) = -\sqrt{1-x},\ x \leq 1$

    (d) $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ x > -1$ (e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1},\ x \geq 0$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1},\ x \leq 0$

13. Por meio de restrições adequadas, faça com que cada uma das funções dadas abaixo gere duas funções invertíveis f_1 e f_2, determinando, em seguida, as respectivas inversas g_1 e g_2. Calcule as derivadas dessas inversas e esboce os gráficos das funções f_1, f_2, g_1 e g_2, em cada caso.

    (a) $y = x^2 - 2x - 3$ (b) $y = -x^2 + x + 2$ (c) $y = \sqrt{1-x^2}$ (d) $y = -\sqrt{4-x^2}$

14. Verifique que a função $y = f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, definida em $\mathbb{R}$, tem como inversa a função $x = g(y) = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, definida para $|y| < 1$.

15. Determine a inversa de função $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $x \neq 1$, especificando o domínio e a imagem da inversa. Comprove diretamente a fórmula
$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

16. Considere a função $y = f(x) = x^2 - x - 2$, definida para $x \geq 1/2$, e seja $x = g(y)$ sua inversa.

    (a) Qual o domínio e qual a imagem de g? (b) Sabendo-se que $g(-2) = 1$, calcule $g'(-2)$

17. Use a Regra da Cadeia para mostrar que a derivada de uma função par é uma função ímpar e que a derivada de uma função ímpar é uma função par.

4.4 Mais Funções Elementares

1. Considere as funções $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1/x)$ e $g(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x$, definidas, respectivamente, para $x > 0$ e para $x \in [-1, 1]$.

   (a) Mostre que $f'(x) = 0, \ \forall x > 0$, e que $g'(x) = 0, \ \forall x \in (-1, 1)$.

   (b) Lembrando que as funções constantes são as que possuem derivada nula, deduza que $f(x) = \pi/2$, $\forall x > 0$, e que $g(x) = \pi/2, \ \forall x \in [-1, 1]$.

2. Se f é uma função derivável, tal que $f(2) = 1$ e $f'(2) = 1/2$, determine a equação da reta tangente à curva $y = \operatorname{arctg}[f(x)]$, no ponto de abscissa $x = 2$.

3. Sabendo-se que no ponto $A(0, 1)$ o gráfico da função $f(x) = \exp\left(x^2 + 2x\right)$ possui a mesma reta tangente que o de uma certa função g, determine $g'(0)$.

4. Se f é uma função derivável, tal que $f'(x) = 2xf(x)$, mostre que a função $g(x) = f(x)e^{-x^2}$ é constante.

5. Para cada uma das funções definidas abaixo, determine o domínio e calcule a derivada de primeira ordem.

   (a) $f(x) = \ln(\sqrt{5 - x^2})$ (b) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$ (c) $f(x) = x \ln x - x$

   (d) $f(x) = \ln|x|$ (e) $f(x) = 1/\ln x$ (f) $f(x) = \ln(\ln x)$

   (g) $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{2 - x}{3 - x}}\right)$ (h) $f(x) = \ln(\cos(3x + 5))$ (i) $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(2x + 3))$

6. Considere a função $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

   (a) Qual o domínio de f?

   (b) Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abscissa $x = -1$? E no ponto de abscissa $x = 0$?

7. O *logaritmo* de um número positivo N, em uma base b, $0 < b \neq 1$, é definido por meio da eqüivalência

$$\log_b N = a \Longleftrightarrow b^a = N.$$

   (a) Prove a propriedade de Mudança de Base: $\log_b N = \dfrac{\ln N}{\ln b}$.

   (b) Se f é definida por $f(x) = \log_b x$, para $x > 0$, mostre que $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln b}$.

8. Calcule a derivada de primeira ordem de cada uma das funções abaixo.

(a) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ (b) $f(x) = e^{x^2}$ (c) $f(x) = (e^x)^2$

(d) $f(x) = 3^{-x}$ (e) $f(x) = x^x$ (f) $f(x) = x^{(x^x)}$

(g) $f(x) = x^2 3^{x \operatorname{sen} x}$ (h) $f(x) = (x^x)^x$ (i) $f(x) = 2^{x^x}$

9. As funções trigonométricas hiperbólicas - *seno hiperbólico, cosseno hiperbólico, tangente hiperbólica* e *cotangente hiperbólica* - denotadas, respectivamente, por senh, cosh, tgh e cotgh, são definidas pelas expressões:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x}, \qquad \operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^x}$$

Com base nessas definições, mostre que:

(a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1$ (c) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x$

(d) $\dfrac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$ (e) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tgh} x) = (\cosh x)^{-2}$ (f) $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotgh} x) = -(\operatorname{senh} x)^{-2}$

(A identidade (a) e as derivadas são comprovadas usando as definições das funções hiperbólicas e as regras de derivação. Para provar (b), use o fato: $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \tfrac{d}{dx}(e^x)\big|_{x=0} = 1$.)

10. Para cada uma das funções dadas abaixo, calcule o limite quando $x \to 0$.

(a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ (b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3x}$ (c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$

(d) $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} x}$ (e) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$ (f) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x^2)}{3x}$

(g) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3}$ (h) $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x^2)}$ (i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x}{x \operatorname{sen} 3x}$

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e suponha que exista uma constante k tal que $f'(x) = kf(x)$, $\forall x$. Derive o quociente f/e^{kx} e deduza que existe uma constante C tal que $f(x) = Ce^{kx}$.

12. No exercício precedente, suponha que f satisfaça $f'(x) = -2xf(x)$. Mostre que existe uma constante C tal que $f(x) = Ce^{-x^2}$.

13. Se f satisfaz $f'(x) = g'(x) f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, mostre que existe C tal que $f(x) = C \exp[g(x)]$.

14. Esboce o gráfico da função $y = \ln(1 + x)$ e determine a reta normal ao gráfico, que é paralela à reta $x + 2y = 5$.

15. Considere a função $f(x) = |x + 2|^3$.

(a) Verifique que f é derivável em qualquer x e ache uma expressão para a derivada.

(b) Encontre o ponto P_0 onde a tangente ao gráfico de f é horizontal.

(c) Encontre o ponto P_0 onde o ângulo da tangente ao gráfico de f com o eixo x é 60^o.

16. Determine as retas tangentes à curva $y = x^2$ que passam no ponto $(0, -1)$.

4.5 Problemas de Taxa de Variação

1. Uma partícula se move de modo que, no instante t, a distância percorrida é dada por

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t.$$

   (a) Encontre as expressões que fornecem a velocidade e a aceleração da partícula.

   (b) Em que instante a velocidade é zero?

   (c) Em que instante a aceleração é zero?

2. Uma partícula move-se sobre a parábola $y = x^2$. Sabendo-se que suas coordenadas $x(t)$ e y(t) são funções deriváveis, em que ponto da parábola elas deslocam-se à mesma taxa?

3. Um ponto move-se ao longo da curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, de tal modo que sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 3 cm/s. Qual será a velocidade da ordenada y, quando $x = 2$ cm?

4. Um ponto move-se sobre a parábola $y = 3x^2 - 2x$. Supondo-se que suas coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ são funções deriváveis e que $x'(t) \neq 0$, em que ponto da parábola a velocidade da ordenada y será o triplo da velocidade da abscissa x?

5. Um cubo se expande de modo que sua aresta varia à razão de $12,5$ cm/s. Encontre a taxa de variação de seu volume, no instante em que a aresta atinge 10 cm de comprimento.

6. Uma esfera aumenta de modo que seu raio cresce à razão de $2,5cm/s$. Quão rapidamente varia seu volume no instante em que o raio mede $7,5cm$? (o volume da esfera de raio r é $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$).

7. Sejam x e y os catetos de um triângulo retângulo e θ o ângulo oposto a y. Supondo-se que $x = 12$ e que θ decresce à razão de $1/30\ \mathrm{rad}/s$, calcule $y'(t)$, quando $\theta = \pi/3\ \mathrm{rad}$.

8. Uma escada de 8 m está encostada em uma parede vertical. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de 2 m/s, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3 m da parede?

9. Uma viga medindo 30 m de comprimento está apoiada em uma parede e o seu topo está se deslocando a uma velocidade de $0,5$ m/s. Qual a taxa de variação de medida do ângulo formado pela viga e pelo chão, quando a topo da viga estiver a uma altura de 18 m?

10. A Lei de Boyle para a dilatação dos gases é dada pela equação $PV = C$, onde P é a pressão, medida em Newtons por unidade de área, V é o volume e C é uma constante. Num certo instante, a pressão é de 3.000 N/m^2, o volume é de 5 m^3 e está crescendo à taxa de 2 $m^3/\min$. Qual a taxa de variação da pressão nesse instante?

11. Expresse a taxa de crescimento do volume V de uma esfera, relativamente à superfície S, em função do raio r da esfera. Faça o mesmo para o raio, relativamente ao volume.

12. Num reservatório contendo um orifício, a vazão pelo orifício é de $110\sqrt{h}\ cm^3/s$, onde h é a altura, em centímetros, do nível da água no reservatório, acima do orifício. O reservatório é alimentado à taxa de 88 $l/\min$. Calcule a altura h do nível a que o reservatório se estabiliza.

13. Um balão sobe verticalmente com uma velocidade v e um observador, a certa distância d, vê o balão sob um ângulo de levação θ. Ache uma expressão para a taxa $\dfrac{d\theta}{dt}$ de variação de θ em termos de $v,\ \theta$ e d. A que velocidade sobe o balão se $d = 500\ m$ e $\dfrac{d\theta}{dt} = 0,02\ \text{rad}/s$, quando $\theta = \pi/4\ \text{rad}$.

14. Uma bola de neve derrete a uma taxa volumétrica dV/dt proporcional à sua área. Mostre que o seu raio r decresce a uma taxa dr/dt constante.

15. Um reservatório cônico, com vértice para baixo, contém água de volume V até uma altura h. Supondo que a evaporação da água se processa a uma taxa dV/dt proporcional à sua superfície, mostre que h decresce a uma taxa dh/dt constante

16. Uma piscina está sendo esvaziada de tal forma que $V(t) = 300(20-t)^2$ representa o número de litros de água na piscina t horas após o início da operação. Calcule a velocidade (instatânea) de escoamento da água ao cabo de 8 horas e a velocidade média desse escoamento no mesmo tempo.

17. Uma estátua de altura h está sendo instalada sobre um pedestal de altura l acima do plano horizontal que passa pelo olho de um observador. Com o observador a uma distância x, calcule a taxa de variação, em relação a x, do ângulo θ sob o qual o observador vê a estátua, em termos de $h,\ l$ e x. Qual o valor dessa taxa se $h = 20,\ l = 5$ e $x = 50$?

18. A figura ao lado mostra um reservatório cônico de $10m$ de altura e $4m$ de raio contendo água, que escoa a uma vazão de $5m^3/hora$.

    (a) Qual a relação entre as variáveis R e H?

    (b) A que taxa o nível da água diminui, quando $H = 6m$?

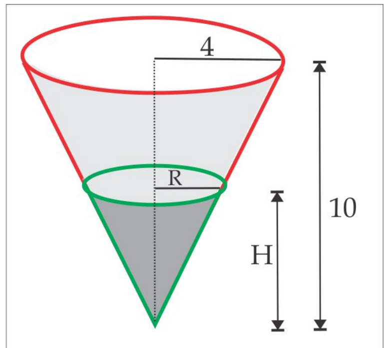


Fig. 4.1

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.1

1. (a) $2x$ (b) $6x$ (c) $2x$ (d) $4x-3$ (e) $-1/(x+1)^2$.
2. (a) -1 (b) $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0)$ não existe (c) não.
3. (a) não (b) sim (c) $f'(x) = 2$, se $x > 0$ e $f'(x) = 0$, se $x < 0$.
4. (a) Não existe $f'(0)$ (b) Não existe$f'(1)$ (c) $f'(1) = 1/2$.
5. 0 e 4.
6. $f(1) = 0$ e $f'(1) = 5$.
7. $f(0) = 0$ e $f'(x) = 5x + 3$.
8. $a = 6$ e $b = -3$

    (a) $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ e $y = -3x + 28$.
    (b) $y = \frac{1}{8} - \frac{3}{2^9}(x-16)$ e $y = \frac{1}{8} - \frac{2^9}{3}(x-16)$.
    (c) $y = \sqrt{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-3)$ e $y = \sqrt{3} - 2\sqrt{3}(x-3)$.
9. $y = -8x - 16$.
10. $y \pm \frac{9}{16} = \frac{8}{9}(x \mp \frac{3}{2})$.
11. $x = 2$ e $y = 0$.
12. A reta tangente é $x = 2$ e a reta normal é $y = 0$ (o eixo x).
13. $y = 4x - 4$.

14. $y = -13/6$ e $y = 7/3$.

15. (b) não (c) não.

16. (a) sim (b) não.

17. (a) $f'(x) = -2x$, se $x < 0$ e $f'(x) = 2x$, se $x > 0$ (b) $f'(0) = 0$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.2

1. $f'(0) = -2,\quad f''(0) = 0$ e $f^{(30)}(0) = 0$.

2. Calcule as derivadas y' e y'' e comprove a relação.

3. Antes de iniciar, veja as regras de derivação e as derivadas das funções elementares.

   (a) $-\pi/x^2$.

   (b) $-1/3 + 2x - 2x^3$.

   (c) $4/3x^2\sqrt[3]{x} - 2/3x^3\sqrt{x^2}$.

   (d) $1/\sqrt{x}\,(1-\sqrt{x})^2$.

   (e) $\operatorname{arcsen} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

   (f) $x \operatorname{arctg} x$.

   (g) $e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$.

   (h) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}$.

   (i) $-10(3 - 2\operatorname{sen} x)^4 \cos x$.

   (j) $2 - 15\cos^2 x \operatorname{sen} x$.

   (k) $\dfrac{3\cos x + 2\operatorname{sen} x}{2\sqrt{15\operatorname{sen} x - 10\cos x}}$.

   (l) $\dfrac{e^x(x+1)+1}{2\sqrt{x(e^x+1)}}$.

   (m) $\dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

   (n) $3\cos 3x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}(x/5) + \dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$.

   (o) Usando as relações $1 + \cos(2x) = \cos^2 x$ e $1 - \cos(2x) = \operatorname{sen}^2 x$, obtemos $y = \operatorname{cotg}^2 x$ e dái $y' = -2\operatorname{cotg} x \operatorname{cosec}^2 x$.

   (p) $\dfrac{1}{1+x^2}$.

(q) $\operatorname{cotg} x$.

(r) $\dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{1}{x\ln x}$.

4. Fazer.

5. Fazer.

6. Fazer.

7. De cima para baixo, a correpondência segue a seqüência 2, 4, 1 e 3.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.3

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{2u}{(x-1)^2\sqrt{1+u^2}}$.

2. Derivação Implícita.

   (a) $y' = \dfrac{1}{3y^2-1}$.

   (b) $y' = \dfrac{1-4\sqrt{x}y}{2\sqrt{x}\,(3y^2+2x)}$.

   (c) $y' = \dfrac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{1+y}}$.

   (d) $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

   (e) $y' = \dfrac{-y}{x}$.

   (f) $y' = \dfrac{4xy\sqrt{xy}-y}{x-2x^2\sqrt{xy}}$.

3. Da Regra da Cadeia, temos

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\cdot\frac{dx}{dt} = -2xy^2\cdot\frac{dx}{dt}.$$

4. Temos da Regra da Cadeia que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= 3x^2\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(3x^2\right)\cdot\frac{dx}{dt} + 3x^2\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\\ &\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = 6x\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned}$$

5. $2x+y+5=0$ e $x-2y-5=0$.

6. Usando a Regra da Cadeia, deduza que

$$h'(x) = 3[f(x)]^2 f'(x) + 3x^2 f'\left(x^3\right)$$

e por substituição direta de x por 2, obtenha $h'(2) = -15$.

7. Considerando em (4.1) $x = 1$, encontramos $y = 1/2$ e por derivação implícita, chegamos a:

$$\frac{y'(x-y) - y(1-y')}{(x-y)^2} - \frac{y - xy'}{y^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0. \tag{4.2}$$

Em (4.2) fazemos $x = 1$ e $y = 1/2$ e encontramos $y'(1) = 7/16$.

8. $n!a^n$.

9. $3x + 4y = 25 \quad \text{e} \quad 4x - 3y = 0$.

10. $y = \frac{-5}{4}x - 4 \quad \text{e} \quad y = \frac{4}{5}x + \frac{25}{4}$.

11. Derivando a igualdade $xf(x) + \operatorname{sen}[f(x)] = 4$ em relação a x, encontramos

$$f(x) + xf'(x) + \cos[f(x)] \cdot f'(x) = 0$$

e daí segue o resultado.

12. Função Inversa.

    (a) $g(y) = \sqrt{y+4}, \quad -4 \leq y$.

    (b) $g(y) = -\sqrt{y+4}, \quad -4 \leq y$.

    (c) $g(y) = 1 - y^2, \quad y \leq 0$.

    (d) $g(y) = \dfrac{y}{1-y}, \quad y < 1$.

    (e) $g(y) = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}, \quad 0 \leq y < 1$.

    (f) $g(y) = -\sqrt{\dfrac{y}{1-y}}, \quad 0 \leq y < 1$.

13. Mais Função Inversa.

    (a) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \; x \leq 1 \\ x = 1 - \sqrt{y+4}, \; y \geq -4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \; x \geq 1 \\ x = 1 + \sqrt{y+4}, \; y \geq -4 \end{cases}.$

    (b) $\begin{cases} y = -x^2 + x + 2, \; x \leq 1/2 \\ x = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - y}, \; y \leq \frac{9}{4} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = -x^2 + x + 2, \; x \leq 1/2 \\ x = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - y}, \; y \leq \frac{9}{4} \end{cases}.$

(c) $\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 0 \\ x = -\sqrt{1-y^2}, & 0 \le y \le 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 0 \\ x = \sqrt{1-y^2}, & 0 \le y \le 1 \end{cases}$.

(d) $\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2}, & -2 \le x \le 0 \\ x = -\sqrt{4-y^2}, & -2 \le y \le 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = -\sqrt{4-x^2}, & 0 \le x \le 2 \\ x = \sqrt{4-y^2}, & -2 \le y \le 0 \end{cases}$.

14. Verifique diretamente que $f(g(y)) = y$ e $g(f(x)) = x$, válidas para $|y| < 1$ e pata todo x.

15. Se $g(y)$ representa a inversa de $f(x)$, então $\text{Dom}(g) = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$ e $g(y) = \dfrac{y}{1-y}$. Para comprovar a fórmula

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

calcule diretamente as derivadas $g'(y)$ e $f'(x)$.

(a) $D(g) = [\frac{-9}{4}, +\infty)$ e $\text{Im}(g) = [\frac{1}{2}, +\infty)$.

(b) $g'(-2) = 1$.

16. Se f é par, então $f(x) = f(-x)$ e usando a Regra da Cadeia, obtemos:

$$f'(x) = -f'(-x)$$

e daí resulta que f' é´uma função ímpar.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.4

1. Fazer.

2. $y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(x-2)$.

3. $g'(0) = 2$.

4. É suficiente mostrar que $g'(x) = 0$. Temos

$$g'(x) = f'(x)\, e^{-x^2} - 2xf(x)\, e^{-x^2} = 0$$

e, portanto, $g(x)$ é constante.

5. Calculando derivadas.

(a) $\text{Dom}(f) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ e $f'(x) = -\dfrac{x}{5-x^2}$.

(b) $\text{Dom}(f) = (2k\pi, (2k+1)\pi)$ e $f'(x) = \text{cotg}\, x$.

(c) $\text{Dom}\,(f) = (0, +\infty)$ e $f'(x) = \ln x$.

(d) $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ e $f'(x) = 1/x$.

(e) $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ e $f'(x) = -\dfrac{1}{x\,(\ln x)^2}$.

(f) $\text{Dom}\,(f) = (1, +\infty)$ e $f'(x) = -\dfrac{1}{x \ln x}$.

(g) $\text{Dom}\,(f) = (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ e $f'(x) = -\dfrac{1}{2\,(2-x)\,(3-x)}$.

(h) $\text{Dom}\,(f) = (-\frac{1}{3}(2k\pi + \frac{\pi}{2} + 5), \frac{1}{3}(2k\pi + \frac{\pi}{2} - 5))$ e $f'(x) = -3\,\text{tg}\,(3x+5)$.

(i) $\text{Dom}\,(f) = (-\frac{3}{2}, +\infty)$ e $f'(x) = \dfrac{2}{2x+3}\cos[\ln(2x+3)]$.

6. Reta Tangente.

(a) $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$.

(b) No ponto $A\,(-1, \ln 2)$ a reta tangente é $y = -x + \ln 2 + 1$ e no ponto $B\,(0,0)$ a reta tangente é $y = 0$ (o eixo x).

7. Derivando $\log_b x$

(a) Basta notar que $N = b^a \Rightarrow \ln N = a \ln b$ e, portanto, $\log_b N = a = \dfrac{\ln N}{\ln b}$.

(b) Por (a), temos:

$$f(x) = \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln b}.$$

8. Derivando exponenciais.

(a) $\frac{d}{dx}\left(e^{\text{sen}\,x}\right) = e^{\text{sen}\,x}\frac{d}{dx}(\text{sen}\,x) = \cos x \exp(\text{sen}\,x)$.

(b) $2x\exp\left(x^2\right)$.

(c) $2\exp(2x)$.

(d) $-3^{-x}\ln 3$ (e) $x^x(1+\ln x)$.

(e) $\frac{d}{dx}(x^x) = \frac{d}{dx}(e^{\ln x^x}) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln x}) = e^{x\ln x}\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(1+\ln x)$.

(f) $x^{(x^x)}[x^x \ln x\,(1+\ln x) + x^{x-1}]$.

(g) $3^{x\,\text{sen}\,x}[2x + x^2\ln 3\,(\text{sen}\,x + x\cos x)]$.

(h) $(x^x)^x[x + 2x\ln x]$.

(i) $2^{x^x}[x^x(1+\ln x)]\ln 2$.

9. Como ilustração, veja a derivada do seno hiperbólico:

$$\tfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dx}\left(e^x - e^{-x}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^x + e^x\right) = \cosh x.$$

10. Usando limites fundamentais.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\operatorname{sen}(2x)}{2x} = (\text{faça } 2x = t) = 2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 2.$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{3x} = \frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1/3.$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = 1.$

   (d) 1.

   (e) 0.

   (f) 0.

   (g) 1.

   (h) 1/2.

   (i) 2/3.

11. Note que $\frac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{e^{kx}}\right] = 0$ e deduza que $\dfrac{f(x)}{e^{kx}} = C.$

12. Mesmo raciocínio anterior. Agora, derive o quociente $\dfrac{f(x)}{e^{-x^2}}.$

13. Ao derivar o quociente $\dfrac{f(x)}{\exp[g(x)]}$, encontramos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{\exp[g(x)]}\right) = \frac{f'(x)\,e^{g(x)} - f(x)\,g'(x)\,e^{g(x)}}{\left[e^{g(x)}\right]^2} = 0.$$

14. O gráfico da função $y = \ln(1+x)\,,\ x > -1$, corresponde ao deslocamento de uma unidade para a esquerda do gráfico de $y = \ln x$. A declividade da reta normal é $m_N = -1/2$ e a reta tangente tem declividade

$$m_T = 2 = f'(a) \Rightarrow a = -1/2.$$

O ponto de tangência é $A\left(-\frac{1}{2}, -\ln 2\right)$ e a equação da normal é

$$r_N : x + 2y + \ln 4 + 1/2 = 0.$$

15. Dado que $f(x) = |x+2|^3$, temos:

   (a) $f'(x) = 3\,|x+2|\,(x+2)$ (b) $(-2, 0)$ (c) $(-2 \pm 1/3^{3/4}, \pm 1/81\sqrt{3}).$

16. $y = \pm 2x - 1.$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 4.5

1. Equação do movimento.

   (a) $v(t) = t^2 - 2t - 3;\ a(t) = 2t - 2$ (b) $t = 3$ (c) $t = 1.$

2. O ponto $P(1/2, 1/4)$.
3. $-\dfrac{12}{25} cm/s.$
4. No ponto de abscissa $x = \frac{5}{6}$.
5. $3750 cm^3/s.$
6. $562,5\pi cm^3/s.$
7. $-\dfrac{8}{5}$ unid/s.
8. $-\dfrac{6}{\sqrt{55}} m/s.$
9. $-\dfrac{1}{48}$ rad $/s.$
10. $-1200 N/m^2.$
11. $\dfrac{dV}{dS} = \dfrac{r}{3}$ e $\dfrac{dr}{dV} = \dfrac{1}{4\pi r^2}.$
12. $h = \frac{1600}{9} cm.$
13. $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v\cos^2\theta}{d}$ e $v = 20 m/s.$
14. Temos que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e por derivação em relação a t, chegamos a

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Considerando que $\dfrac{dV}{dt} = k\left(4\pi r^2\right)$, obtemos:

$$k\left(4\pi r^2\right) = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = k.$$

15. Temos $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e, considerando que $r/h = C$, encontramos $V = \frac{1}{3}\pi C^2 h^3$ e daí resulta

$$\frac{dV}{dt} = \pi C^2 h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Use $\dfrac{dV}{dt} = k\pi r^2, \quad k = cte < 0$, para chegar a $\dfrac{dh}{dt} = k$.

16. $\dfrac{dV}{dt} = -7200\ l/h$ e $\dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{V(8) - V(0)}{8 - 0} = -76808\ l/h.$

17. $\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{l}{x^2 + l^2} - \dfrac{h + l}{x^2 + (h + l)^2}$ e $\dfrac{d\theta}{dx} \simeq -\dfrac{1}{166}.$

18. Vazão em um resevatório cônico.

(a) Usando semelhança de triângulos, temos

$$\frac{4}{R} = \frac{10}{H}, \quad \text{isto é,} \quad R = \frac{2H}{5}.$$

(b) Desejamos encontrar $\dfrac{dH}{dt}$, nos instante em que $H = 6$ e a vazão é $\dfrac{dV}{dt} = 5m^3/h$. O volume do cone de raio R e altura H é

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{4\pi H^3}{75}. \tag{4.3}$$

Derivando (4.3) em relação ao tempo t, encontramos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi H^2}{25}\frac{dH}{dt}$$

e com os dados chegamos a $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{125}{144\pi}\ m/h.$