5.1 O Teorema do Valor Médio

1. Se $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, encontre o número c que satisfaz a conclusão do TVM (Teorema do Valor Médio) no intervalo $[1, 8]$.

2. Seja $f(x) = |x - 1|$. Mostre que não existe um número c satisfazendo $3f'(c) = f(3) - f(0)$. Isso contradiz o TVM?

3. Verifique que a função $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ é tal que $f(-1) = f(1)$ e, contudo, não existe um número c no intervalo $(-1, 1)$, satisfazendo a $f'(c) = 0$. Isso contradiz o *Teorema de Rolle*? Por quê?

4. Prove que a equação $x^3 + x - 1 = 0$ tem exatamente uma raiz real.

5. Prove que existe um único número real x talque $e^x + x = 0$.

6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) e $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, mostre que f é uma função constante.

7. Mostre que $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \pi/2$. (*sug.*: mostre que a função $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x$ é constante e, então, calcule $f(1)$).

8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é derivável em (a, b) e $f'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$, mostre que existe uma constante C tal que $f(x) = Ce^x$, $\forall x \in [a, b]$. (*sug.*: verifique que a função $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$ é constante).

9. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Se ambas são deriváveis em (a, b) e $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in (a, b)$, mostre que essas funções diferem por uma constante, isto é, $f(x) = g(x) + C$.

10. Considere $g(x) = x^4 - 4x + 1$. Encontre a função f que satisfaz $f'(x) = g'(x)$ e $f(1) = 2$.

11. Mostre que $e^x \geq 1 + x$, para $x \geq 0$. Mostre, em seguida, que $e^x \geq 1 + x + x^2/2$, com a mesma restrição $x > 0$. Use o processo indutivo para provar, em geral, que:

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}, \quad \text{para } x \geq 0. \tag{5.1}$$

    E se $x < 0$ a desigualdade (5.1) continua válida?

12. Mostre que $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$, seja qual for o $x > 0$.

13. Mostre que $\operatorname{sen} x < x$, seja qual for o $x > 0$.

14. Mostre que a equação $x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x = 0$ tem duas e somente duas raízes, uma negativa e a outra positiva.

15. Mostre que $\theta < \operatorname{tg} \theta$, para $0 < \theta < \pi/2$.

5.2 Máximos & Mínimos

1. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

   (a) Decida sobre a existência de máximos ou mínimos locais e absolutos de f.

   (b) Calcule os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[-2, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

2. Considere a função $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$.

   (a) Decida sobre a existência de máximos ou mínimos locais e absolutos de f.

   (b) Calcule os valores máximo e mínimo de f no intervalo $[0, 3]$ e determine os pontos nos quais esses valores são assumidos.

   (c) Repita o ítem (b), considerando o intervalo $[1/2, 3]$.

   (d) Repita o ítem (b), considerando o intervalo $[1/2, 5/2]$.

   (e) Repita o ítem (b), considerando o intervalo $[3/4, 9/4]$.

3. Analise cada uma das funções definidas abaixo com relação à existência de máximos ou mínimos locais e absolutos.

   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$ (b) $f(x) = xe^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = 3\cos(2x), \quad x \in [0, \pi]$ (d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$

   (e) $f(x) = x^2 + 1/x, \quad x \neq 0$ (f) $f(x) = x^2\sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$

4. A função $f(x) = 2 - |1 - x|$, definida para $0 \leq x \leq 2$, admite algum ponto de máximo ou de mínimo?

5. Determine, se existirem, os pontos de mínimo e de máximo da função $y = 2xe^{2x}$. Analise, ainda, o gráfico dessa função quanto à concavidade.

6. Esboce o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$ (b) $f(x) = x^4 - 2x^2$ (c) $f(x) = x^4 - x^3$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(e) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ (g) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$ (h) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-3}$

(i) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2-9}$ (j) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$ (k) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ (l) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

(m) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ (n) $f(x) = x - \operatorname{sen} x$ (o) $f(x) = xe^{-x}$ (p) $f(x) = e^{-x^2}$

7. Na Figura 5.1 ilustramos uma função real $y = f(x)$, suposta derivável no intervalo $[1, 4)$.

(a) Em que intervalo f é crescente?

(b) Em que intervalo f é decrescente?

(c) Essa função possui pontos de máximo ou de mínimo? E ponto de inflexão ela possui?

(d) O que representa, no gráfico, a reta $y = 4$?

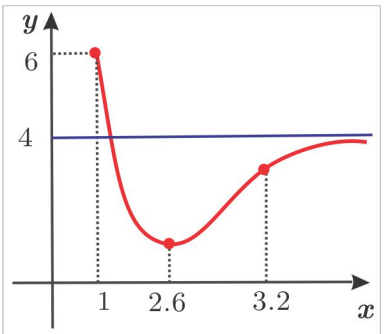


Fig. 5.1

8. Suponha que a Figura 5.2 corresponda ao gráfico da derivada $f'(x)$ de certa função $y = f(x)$.

(a) Qual a inclinação da tangente ao gráfico de f em $x = 1$?

(b) Com relação ao crescimento e à concavidade, descreva o gráfico de f no intervalo $[1, 2]$.

(c) O gráfico de f possui alguma tangente horizontal?

(d) A função f possui ponto de máximo ou de mínimo local?

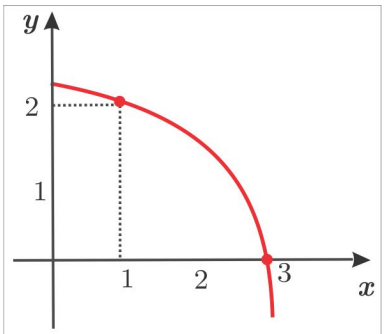


Fig. 5.2

9. Existe algum valor para m, de modo que a função $f(x) = mx - m^2 \ln\left(1 + x^2\right)$ tenha $x = 2$ como ponto de mínimo local?

10. Se $a^2 < 3b$, deduza que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ não possui máximo nem mínimo.

5.3 Problemas de Máximos & Mínimos

1. Determine dois números positivos x e y com produto p e cuja soma seja a menor possível.

2. Determine as dimensões de uma caixa retangular de base quadrada, sem tampa, de forma que sua área total tenha um valor prefixado A e seu volume V seja o maior possível.

3. Demonstre que o retângulo de área máxima inscrito em um círculo de raio r é um quadrado.

4. De todos os triângulos isóceles de igual perímetro, o que tem maior área é o triângulo eqüilátero.

5. Dois corretores, de larguras a e b, encontram-se num ângulo reto, como indica a Figura 5.3, e desejamos construir uma viga de comprimento mínimo l passando horizontalmente de um corredor ao outro. Sabendo que tal comprimento l coincide com o mínimo da função

$$l(\theta) = \frac{a}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{b}{\cos\theta},$$

determine l, em função de a e b.

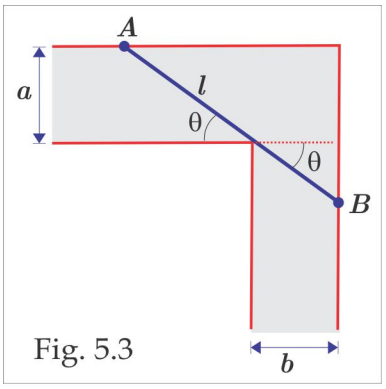


Fig. 5.3

6. Encontre sobre a curva $y^2 - x^2 = 1$, o ponto mais próximo do ponto $A(-1, 0)$.

7. Qual o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado resulta no maior valor possível?

8. Qual ponto da parábola $y = 1 - x^2$ está mais próximo da origem? (*sug.*: esse problema consiste em minimizar a função $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + \left(1 - x^2\right)^2$, que representa o quadrado da distância de um ponto da parábola à origem).

9. Qual ponto da parábola $y = x^2$ está mais próximo da reta $y = x - 2$? (*sug.*: minimize o quadrado da distância de um ponto a uma reta!).

10. Dentre todos os retângulos com o mesmo perímetro p, mostre que o quadrado é o de maior área.

11. Para encontrar a reta que passa no ponto $A(3, 2)$ e forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima, proceda assim:

    (a) Observe a ilustração na Figura 5.4.

    (b) Admita a reta na forma $y = ax + b$ e note que $3a + b = 2$.

    (c) A função a ser minimizada é a função área:

    $$A(a, b) = \frac{x_0 y_0}{2} = \frac{-b^2}{2a}.$$

    (d) Determine a e b e, em seguida, a equação da reta.

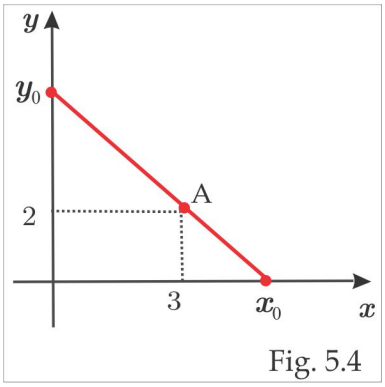


Fig. 5.4

12. Encontre os comprimentos dos lados do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio r, estando a base do retângulo sobre o diâmetro do semicírculo. (*sug.*: a função a ser maximizada é a área e esta vem dada por:

$$A = 2xy = 2x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

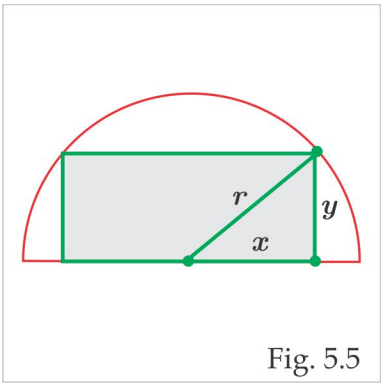


Fig. 5.5

13. Uma indústria de embalagens de metal onde você trabalha é escolhida para fornecer latinhas de cerveja de $500ml$ para um fabricante multinacional. O gerente da fábrica descobre que você é um funcionário que já estudou cálculo e, por essa razão, lhe procura e pergunta: as dimensões da lata (*altura* e *raio*) podem influir no custo da produção? (*sug.*: lembre-se das fórmulas básicas da área total e volume do cilindro de raio x e altura y: $A_T = 2\pi x^2 + 2\pi xy$ e $V = \pi x^2 y = 500$).

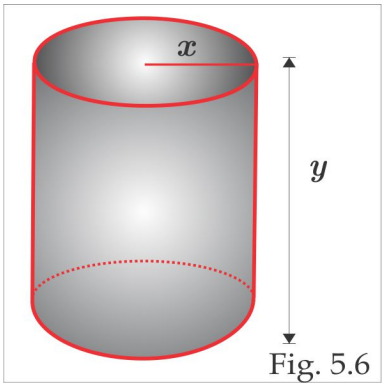


Fig. 5.6

14. Uma indústria produz determinado artigo e vende-o com um lucro mensal dado pela expressão $L(q) = -q^3 + 12q^2 + 60q - 4$, onde q representa a quantidade produzida mensalmente. Qual a produção que maximiza o lucro? Qual é esse lucro máximo?

15. Duas torres têm, respectivamente, 50 e 30 metros de altura, estando separadas por uma distância de 150 metros e um cabo guia deve ser estendido do ponto A até o topo de cada torre. (veja Figura 5.6).

    (a) Localize exatamente o ponto A de modo que o comprimento total do cabo seja mínimo.

    (b) Mostre que o comprimento do cabo usado é mínimo sempre que os ângulos em A são iguais, independente da altura das torres.

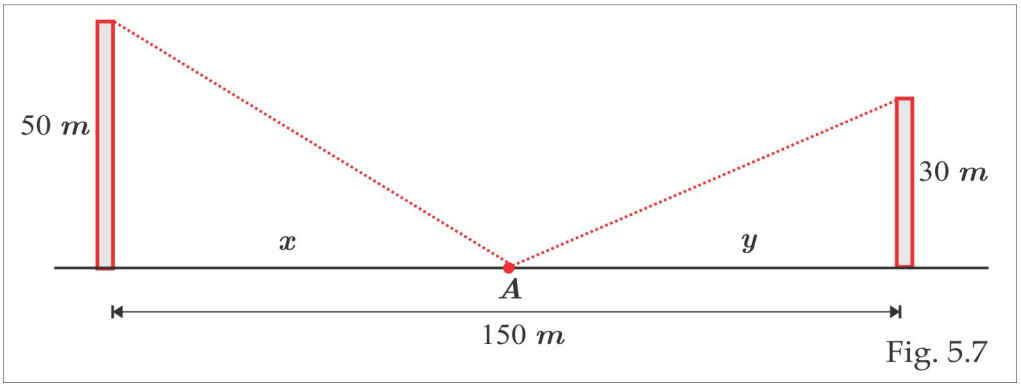


Fig. 5.7

16. Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica feita de um fio. Com $800m$ de fio à disposição, qual é a maior área que se pode cercar e quais são suas dimensões?

17. Uma folha com perímetro de $36m$ será enrolada para formar um cilindro, como é mostrado na figura ao lado. Que valores de x e y fornecem o maior volume?

    A mesma folha sofrerá uma revolução em torno de seu lado y gerando um outro cilindro. Que valores de x e y fornecem, agora, o maior volume?

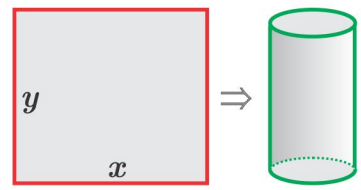


Fig. 5.8

18. Determine o raio r e a altura h do maior cilindro circular reto que pode ser colocado dentro de uma esfera de raio $\sqrt{3}$, como sugere a figura 5.9 ao lado. (recorde-se que o volume da esfera e do cilindro sã o dados, respectimaente por:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_C = \pi r^2 h).$$

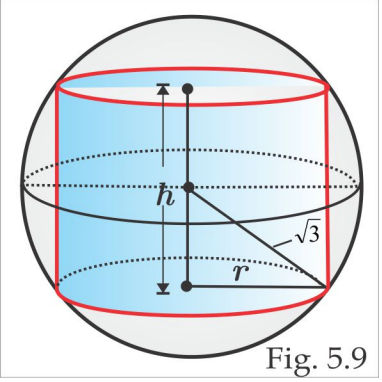


Fig. 5.9

19. Se o perímetro do setor circular apresentado na figura 5.10 ao lado for fixado em $100m$, que valores de r e s darão ao setor a maior área?

    O perímetro e a área do setor são dados, respectivamente, por:

$$100 = 2r + s \;\text{ e }\; A = \frac{rs}{2}$$

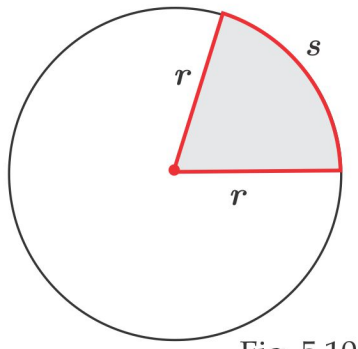


Fig. 5.10

5.4 A Regra de L'Hôpital

John Bernoulli descobriu uma regra para o cálculo de limites de frações cujos numeradores e denominadores tendem para zero. A regra é conhecida atualmente como **Regra de l'Hôpital**, em homenagem ao marquês de St. Mesme, *Guillaume François Antoine de l'Hôpital* (1661-1704), um nobre francês que escreveu o primeiro texto elementar de cálculo diferencial, onde a regra foi impressa pela primeira vez.

FORMA INDETERMINADA $0/0$

Se as funções contínuas $f(x)$ e $g(x)$ são zero em $x = a$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

não pode ser calculado com a substituição $x = a$. A substituição gera a expressão $0/0$, sem significado algum. Recorde-se dos argumentos que utilizamos em sala de aula para calcular $\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen} x)/x$, em que a substituição $x = 0$ produziu a forma indeterminada $0/0$. Por outro lado, fomos bem sucedidos com o limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

com o qual calculamos a derivada $f'(a)$ e que sempre resulta na forma $0/0$ com a substituição $x = a$. A Regra de l'Hôpital nos permite usar derivadas para calcular limites que, abordados de outra forma, conduzem à formas indeterminadas.

Teorema 5.1 (Regra de l'Hôpital) *Suponha que $f(a) = g(a) = 0$, que f e g sejam deriváveis em um intervalo aberto contendo a e que $g'(x) \neq 0$ nesse intervalo exceto, possivelmente, em $x = a$. Então:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{5.2}$$

desde que exista o limite do lado direito de (5.2).

Alerta! Ao aplicar a Regra de l'Hôpital não caia na armadilha de usar a derivada de f/g. O quociente a ser usado é f'/g' e não $(f/g)'$.

Ilustração *Aplicando a Regra de l'Hôpital*
A expressão $\dfrac{1 - cosx}{x + x^2}$ com $x = 0$ produz a indeterminação $0/0$ e aplicando a regra (5.3), encontramos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{x + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{senx}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0$$

FORMAS INDETERMINADAS ∞/∞, $\infty \times 0$ e $\infty - \infty$

Uma versão da Regra de l'Hôpital também se aplica a quocientes que produzem as formas indeterminadas ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$. Por exemplo, se $f(x)$ e $g(x)$ tendem ao infinito, quando $x \to a$, então a fórmula (5.2) continua válida, desde que o limite do lado direito exista. Aqui, como também na forma indeterminada $0/0$, o *ponto* a onde investigamos o limite pode ser finito ou $\pm\infty$.

Exemplo 5.2 *Calcular os limites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \operatorname{tg} x}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$.

Solução

(a) Note que o numerador e o denominador sendo descontínuos em $x = \pi/2$, investigaremos os limites laterais nesse ponto. Temos:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x}{1+\operatorname{tg} x} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = (\text{l'Hôpital}) = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{sen} x = 1.$$

O limite lateral à direita também é 1 e, neste caso, a forma indeterminada é $\dfrac{-\infty}{-\infty}$. Logo, o limite existe e tem valor 1.

(b) Temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = (\text{l'Hôpital}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Exemplo 5.3 (Usando as formas $\infty \cdot 0$ e $\infty - \infty$) *Calcular os limites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right)$.

Solução

(a) Temos que

$$\lim_{x\to\infty} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = \boxed{\infty \cdot 0} = (\text{fazer } t = 1/x) = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{t} \operatorname{sen} t\right) = 1.$$

(b) Se $x \to 0^+$, então $\operatorname{sen} x \to 0^+$ e, portanto, $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \to \infty - \infty$. De maneira similar, se $x \to 0^-$, então $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} \to -\infty + \infty$. Nenhuma das duas formas revela o que acontece com o limite. A saída é combinarmos as frações:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$$

e, então, aplicamos a Regra de l'Hôpital ao resultado:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \boxed{\tfrac{0}{0}} = (\text{l'Hôpital}) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \boxed{\tfrac{0}{0}} = (\text{l'Hôpital}) = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

FORMAS INDETERMINADAS 1^∞, 0^0 e ∞^0

Os limites que produzem essas formas indeterminadas podem, às vezes, ser tratados utilizando-se logarítmos. De fato, da relação $f(x) = \exp[\ln f(x)]$ deduzimos que:

$$\lim_{x\to a} \ln[f(x)] = L \Longrightarrow \lim_{x\to a} \exp[\ln f(x)] = \exp\left[\lim_{x\to a} \ln f(x)\right] = e^L. \tag{5.3}$$

Em (5.3) o *ponto a* pode ser finito ou $\pm\infty$.

Exemplo 5.4 *Calcular os seguintes limites:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ **(c)** $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

Solução

(a) Trata-se de uma indeterminação do tipo 1^∞, a qual será convertida em $0/0$ por aplicação do logarítimo. Considerando $f(x)=(1+1/x)^x$, temos:

$$\ln f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\Longrightarrow f(x)=\exp\left[\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\right]$$

e, portanto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\exp[\ln f(x)]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x}\right]=\exp(\boxed{\tfrac{0}{0}})=(\text{l'Hôpital})=\\ &= \exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x}\right]=e^1=e.\end{aligned}$$

(b) Trata-se de uma indeterminação do tipo 0^0 e procederemos como no ítem (a). Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^x &= \boxed{0^0}=\lim_{x\to 0^+}\exp[\ln x^x]=\exp\left[\lim_{x\to 0^+} x\ln x\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\right]=\exp(\boxed{\tfrac{-\infty}{\infty}})=\\ &= (\text{l'Hôpital})=\exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}\right]=\exp\left[\lim_{x\to 0^+}(-x)\right]=e^0=1.\end{aligned}$$

(c) Temos agora uma indeterminação do tipo ∞^0 e procederemos como no ítem (a). Temos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^{1/x} &= \boxed{\infty^0}=\lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln x^{1/x}\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\right]=\exp(\boxed{\tfrac{\infty}{\infty}})=\\ &= (\text{l'Hôpital})=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}\right]=\exp\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right]=e^0=1.\end{aligned}$$

5.4.1 Escrevendo para aprender

Como parte do processo de treinamento, vamos demonstrar a Regra de l'Hôpital (5.2), no caso em que o limite é finito, isto é, quando a for um número real. A demonstração é na verdade uma aplicação do *Teorema do Valor Médio de Cauchy*, que é uma versão um pouquinho mais geral do Teorema do Valor Médio apresentado em sala de aula.

Teorema 5.5 (Valor Médio de Cauchy) *Suponha que as funções f e g sejam contínuas no intervalo fechado $[a,b]$ e deriváveis no intervalo aberto (a,b) e suponha, ainda, que $g'(x)\neq 0$ em qualquer x do intervalo (a,b). Então existe um número c em (a,b) tal que:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.4}$$

Demonstração

Daremos o roteiro e deixaremos os detalhes da demonstração para você preencher. Não deixe de fazê-lo.

(i) Aplique o Teorema de Rolle para a função g em $[a,b]$ e deduza que $g(b) \neq g(a)$; essa condição é necessária em (5.5).

(ii) Aplique o Teorema de Rolle à função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]$$

para deduzir que existe c em (a,b) tal que $F'(c) = 0$ e a partir dessa igualdade obtenha (5.4) □

Demonstração da Regra de L'Hôpital

Comece revendo as condições exigidas na regra. Suponha que x esteja à direita de a e aplique o TVM de Cauchy ao intervalo $[a,x]$. Existe c entre a e x tal que:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{(lembre-se que } f(a) = g(a) = 0\text{)}.$$

Logo,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Conforme x tende para a, o número c também se aproxima de a, porque está entre x e a. Conseqüentemente, tomando o limite na última igualdade, com $x \to a^+$, obtemos:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{5.5}$$

que estabelece a Regra de l'Hôpital. O caso em que x está à esquerda de a o TVM de Cauchy é aplicado ao intervalo $[x,a]$ e o limite obtido é o limite lateral à esquerda. ■

Observação 5.6 (Sobre as formas 0^∞ e $0^{-\infty}$.) *Seriam as formas 0^∞ e $0^{-\infty}$ indeterminadas. Presuma que uma função $f(x)$ não é negativa em um intervalo aberto contendo c e que $\lim_{x \to c} f(x) = 0$.*

(a) *Se $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$, então $\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = 0$.*

(b) *Se $\lim_{x \to c} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = \infty$.*

De fato: primeiro, recorde-se que $\exp(+\infty) = +\infty$ e $\exp(-\infty) = 0$ e, depois, que

$$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = \exp\left[\lim_{x \to c} g(x) \ln f(x)\right] = \exp[(\pm\infty) \cdot (-\infty)] = \exp(\mp\infty).$$

5.4.2 Exercícios Complementares 5.4

1. Calcule os limites indicados.

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$

   (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$ (g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{x^2-1}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{cotg} x$

   (i) $\lim\limits_{y\to \pi/2} \left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)\operatorname{tg} y$ (j) $\lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{\ln(1+t)}{\log_2 t}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{1/x}$ (l) $\lim\limits_{x\to \infty} x(\pi/2-\operatorname{arctg} x)$

2. A Regra de l'Hôpital não ajuda a encontrar os limites apresentados abaixo. Tente, você voltará sempre ao mesmo ponto. Calclule os limites de outra maneira.

   (a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$ (b) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\operatorname{tg} x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x}$

3. Qual está correto e qual está errado? Justifique suas respostas.

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{6}$ (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \dfrac{0}{6} = 0$

4. Em cada caso, construa duas funções deriváveis f e g, com $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$, que satisfaçam à condição especificada.

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$ (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$

5. Considere as funções

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \neq 0 \\ 0, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

   (a) Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$, e, contudo, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2.$

   (b) Por que isso não contradiz a Regra de l'Hôpital?

5.5 Assíntotas

Quando a distância do gráfico de certa função $y = f(x)$ a uma reta fixa γ se aproxima de zero, à medida que a curva se afasta da origem, diremos que a curva se aproxima *assintóticamente* da reta γ ou que a reta γ é uma *assíntota* do gráfico da função $y = f(x)$.

Exemplo 5.7 (Assíntota Horizontal) *A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $y = f(x)$ se:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \qquad ou \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b. \tag{5.6}$$

Exemplo 5.8 (Assíntota Vertical) *A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $y = f(x)$ se:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad ou \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty. \tag{5.7}$$

Se a função $y = f(x)$ é invertível, a condição (5.7) é equivalente a

$$\lim_{y\to\infty} f^{-1}(y) = a \qquad ou \qquad \lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y) = a. \tag{5.8}$$

Exemplo 5.9 (Assíntota Oblíqua) *A reta $y = ax + b$, $a \neq 0$, é uma assíntota oblíqua do gráfico da função $y = f(x)$ se:*

$$\lim_{|x|\to\infty} |f(x) - (ax + b)| = 0. \tag{5.9}$$

Exemplo 5.10 *A função $y = x + 1/x$ tem o eixo y como assíntota vertical e a reta $y = x$ como uma assíntota oblíqua. De fato:*

(a) $\lim_{|x|\to\infty} |f(x) - x| = \lim_{|x|\to\infty} |1/x| = 0.$ (*isso indica que $y = x$ é uma assíntota oblíqua*)

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$ (*isso indica que $x = 0$ é uma assíntota vertical*)

5.5.1 Exercícios Complementares 5.5

1. Verifique que o gráfico de cada uma das funções $y = f(x)$ definidas abaixo possui ao menos um tipo de assíntota.

   (a) $y = x + \ln x$ (b) $y = \dfrac{1}{x^2}$ (c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ (d) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ (e) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

   (f) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x + 1}}$ (g) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ (h) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ (i) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ (j) $y = x^2 e^{-x}$

2. Determine a e b, de modo que $y = ax + b$ seja uma assíntota oblíqua da curva $y = \dfrac{4 - x^2}{x + 1}$.

3. Verifique que as retas $ay \pm bx = 0$ são assintotas da hipérbole $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.1

1. $c = 2\sqrt{2}$

2. Não há contradição, porque f não é derivável em $]0, 3[$.

3. Não há contradição, porque f não é derivável em $]-1,1[$.

4. Estamos diante de um problema de *existência* e *unicidade*. A existência é consequência do Teorema do valor Intermediário, tendo em vista que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(x^3+x-1\right)=\pm\infty.$$

Aunicidade é obtida como conseqüência do *Teorema de Rolle*, utilizando-se, para tanto, um argumento de contradição. De fato, se existissem dois valores a e b, tais que $f(a)=f(b)=0$, existiria um número c, entre a e b, tal que $f'(c)=0$. Ocorre que a derivada da função $f(x)=x^3+x-1$ não se anula em ponto algum.

5. Se $f(x)=e^x+x$, então $f(1)>0$ e $f(-1)<0$. A existência de uma raiz segue do TVI. Para a unicidade, use o raciocício do exercício precedente.

6. Dados x_1 e x_2 no intervalo $[a,b]$, com $x_1<x_2$, então existe, pelo TVM, um número c, entre x_1 e x_2, tal que

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)=0\Rightarrow f(x_2)=f(x_1).$$

7. Se $f(x)=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arccotg}x$, então $f'(x)=0$, de onde resulta que $f(x)$ é constante. Como $f(1)=\pi/2$, então $f(x)=\pi/2,\ \forall\ x$, e daí segue o resultado.

8. A função $\varphi(x)=f(x)e^{-x}$ tem derivada nula em (a,b) e, sendo assim, ela é constante, isto é, $f(x)e^{-x}=C$.

9. A função $f-g$ tem derivada nula no intervalo (a,b), sendo, portanto, constante nesse intervalo.

10. Se $f'=g'$, então $f(x)=g(x)+C$ e o valor da constante C é calculado com o dado $f(1)=2$. A função f é, portanto, $f(x)=x^4-4x+5$.

11. inicialmente, recordamos que $e^x\geq 1,\ \forall x\geq 0$, e considerando $f(x)=e^x-x$, temos

$$f'(x)=e^x-1\geq 0,\quad \forall x\geq 0,$$

e, portanto, f é não decrescente em $[0,+\infty)$. Logo, se $x\geq 0$, então $f(x)\geq f(0)=1$, isto é, $e^x-x\geq 1$. Para concluir que

$$e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2},$$

considere $g(x)=e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2$ e note que $g'(x)\geq 0,\ \forall x\geq 0$.

12. Se $x>0$ e $f(x)=\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)$, então

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}<0$$

e isso indica que f é decrescente em $(0, +\infty)$. Logo,

$$x > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow \frac{x}{1+x} - \ln(1+x) < 0.$$

13. Use o raciocínio de Exercício 12, com $f(x) = \operatorname{sen} x - x$.

14. Se $f(x) = x^2 - x \operatorname{sen} x - \cos x$, então $f(0) = -1$ e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, e do TVI segue que $f(x)$ tem ao menos uma raiz positiva e uma raiz negativa. Se f tivesse duas raízes positivas (resp. negativas), então pelo Teorema de Rolle a derivada se anularia em algum x positivo (resp. negativo). Ocorre que derivada $f'(x)$ é nula apenas quando $x = 0$.

15. Use o raciocínio de Exercício 12, com $f(\theta) = \theta - \operatorname{tg} \theta$, $0 < \theta < \pi/2$. Recorde-se que $f'(\theta) = 1 - \sec^2 \theta < 0$, no intervalo $0 < \theta < \pi/2$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.2

1. Uma maneira eficiente de comprovar que uma dada função $f(x)$ não tem máximo e/ou mínimo absolutos é mostrar que $\lim f(x) = +\infty$ e/ou $\lim f(x) = -\infty$.

   (a) A função não tem extremos absolutos porque $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty . x_1 = 1$ e $x_2 = 2$ são, respectivamente, pontos de máximo e de mínimo locais.

   (b) $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$ são pontos de máximos absolutos, nos quais f atinge o valor 3; $x_3 = 2$ é ponto de mínimo local com $f(2) = -1$; $x_4 = -2$ é ponto de mínimo absoluto com $f(-2) = -17$.

2. Representemos por x_M e x_m os pontos de máximos absolutos e mínimos absolutos, respectivamente.

	Max Loc	Max Abs	Min Loc	Min Abs	$f(x_M)$ e $f(x_m)$
(a)	$x_1 = 1$	*não há*	$x_2 = 2$	*não há*	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
(b)	$x_1 = 1$	$x_M = 3$	$x_2 = 2$	$x_m = 0$	$f(x_M) = 12;\ f(x_m) = 3$
(c)	$x_1 = 1$	$x_M = 3$	*não há*	$x_m = \frac{1}{2}$ e $x_m = 2$	$f(x_M) = 12;\ f(x_m) = 7$
(d)	*não há*	$x_M = 1$ e $x_M = \frac{5}{2}$	*não há*	$x_m = \frac{1}{2}$ e $x_m = 2$	$f(x_M) = 8;\ f(x_m) = 7$
(e)	$x_1 = 1$	$x_M = 1$	$x_2 = 2$	$x_m = 2$	$f(x_M) = 8;\ f(x_m) = 7$

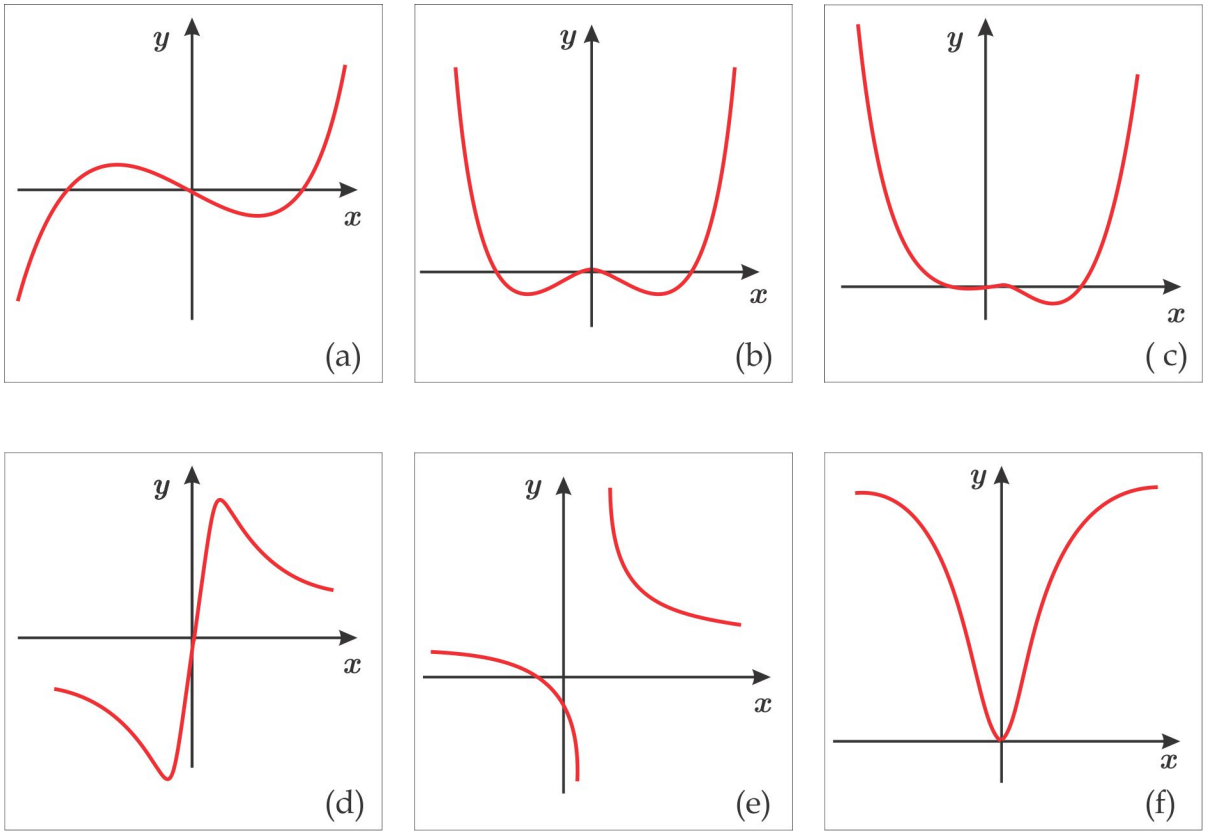
3. Veja a tabela abaixo.

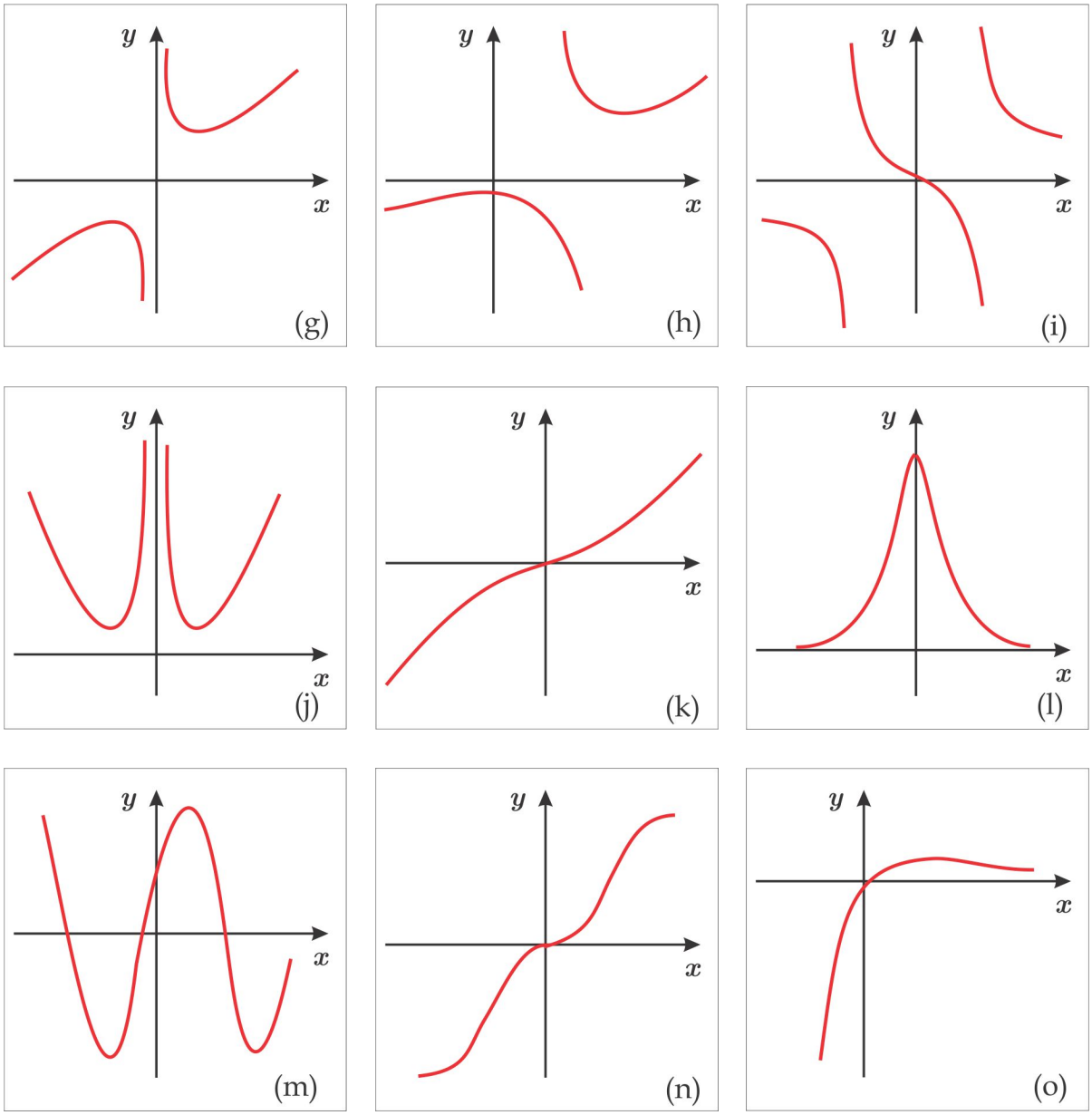
	Max Loc	Max Abs	Min Loc	Min Abs	$f(x_M)$ e $f(x_m)$
(a)	$\pi/4$	$\pi/4$	$5\pi/4$	$5\pi/4$	$f(x_M)=\sqrt{2}$; $f(x_m)=-\sqrt{2}$
(b)	1	1	não há	*não há*	$f(x_M)=1/e$; $\lim_{x\to-\infty} f=-\infty$
(c)	não há	0 e π	*não há*	$\pi/2$	$f(x_M)=3$; $f(x_m)=-3$
(d)	*não há*	0	*não há*	±1	$f(x_M)=1$; $f(x_m)=0$
(e)	*não há*	*não há*	$1/\sqrt[3]{2}$	*não há*	
(f)	*não há*	$\pm\sqrt{2/3}$	*não há*	-1, 0 e 1	

4. Mín. Abs. $x_m=1$ e $x_m=2$; Máx. Abs. $x_M=1$.

5. $x=-1/2$ é ponto de mínimo local; a concavidade f é voltada para baixo no intervalo $(-\infty,-1)$ e voltada para cima em $(-1,+\infty)$.

6. Antes de esboçar o gráfico não esqueça de determinar os pontos extremos , as regiões de crescimento ou decrescimento e as inflexões da função, caso existam.





7. Leitura do gráfico.

   (a) f decresce em $1 \leq x \leq 2.6$ e cresce em $x > 2.6$.

   (b) Min. Abs. em $x_m = 2.6$ e Max. Abs. em $x_M = 1$.

   (c) $x = 3.2$ é um ponto de inflexão.

   (d) $y = 4$ é uma assíntota horizontal.

8. Leitura do gráfico.

   (a) 2.

(b) Em $[1,2]$, f' positiva e decrescente. Logo, f é crescente e seu gráfico tem concavidade para baixo.

(c) Sim, em $x = 3$.

(d) $x = 3$ é máximo local, pois $f' < 0$, para $x > 3$, e $f' > 0$, para $x < 3$.

9. $m = 0$ ou $m = 5/4$.

10. Um ponto de máximo ou mínimo de f seria um ponto crítico. Ocorre que f não tem ponto crítico!

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.3

1. $x = \sqrt{p}$ e $y = \sqrt{p}$.

2. $b = \sqrt{A/3}$ e $h = b/2$.

3. Quadrado de lado $l = r\sqrt{2}$.

4. Se x é a base e $p = x + 2y$ é o perímetro, então a área do triângulo é $S = \frac{x}{4}\sqrt{p^2 - 2px}$, cujo ponto de máximo ocorre em $x = p/3$. Logo $x = y = p/3$ e o triângulo é equilátero.

5. Temos que $0 < \theta < \pi/2$ e, portanto,

$$\frac{dl}{d\theta} = \frac{b\,\mathrm{sen}^3\,\theta - a\cos^3\theta}{(\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)^2} = 0 \Leftrightarrow \tan\theta = (a/b)^{1/3}.$$

Logo,

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + (a/b)^{2/3}}} \quad \text{e} \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{a^{1/3}}{b^{1/3}\sqrt{1 + (a/b)^{2/3}}}$$

e substituindo na expressão de $l(\theta)$, encontramos $l = [(a^2b)^{1/3} + b]\sqrt{1 + (a/b)^{2/3}}$.

6. $(-1/2, \pm\sqrt{5}/2)$

7. $1/2$.

8. $(\pm\sqrt{2}/2, 1/2)$.

9. $(1/2, 1/4)$.

10. O problema consiste em maximizar a função área $A(x) = xy$, sendo $2x + 2y = p$.

11. Temos $y_0 = b = 4$ e $x_0 = -b/a = 6$. A equação da reta é $2x + 3y = 12$.

12. $r\sqrt{2}$ e $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$

13. $x = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$ e $y = \dfrac{500}{\pi x^2}$.

14. $q = 10$ e $L_{\max} = L(10)$

15. Observando a Figura 5.7 vemos que o comprimento total do cabo é:

$$L = \sqrt{2500 + x^2} + \sqrt{900 + y^2}, \quad \text{sendo} \quad x + y = 150.$$

Por derivaçção implícita, e notando que $y' = -1$, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx} &= \frac{x}{\sqrt{2500+x^2}} - \frac{y}{\sqrt{900+y^2}} = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{900+y^2} = y\sqrt{2500+x^2} \\ &\Leftrightarrow 9x^2 = 25y^2 \Leftrightarrow (3x-5y)(3x+5y) = 0 \Leftrightarrow 3x = 5y = 0, \quad \text{já que} \quad x, y > 0. \end{aligned}$$

Ao comparar as equações $x + y = 150$ e $3x = 5y = 0$, obtemos $x = 93.75$ e $y = 56.25$.

16. $x = 200$ e $y = 400$.

17. As dimensões da folha são $x = 12$ e $y = 6$. Já o cilindro tem altura $h = 6$ e $r = 6/\pi$.

18. $h = 2$ e $r = \sqrt{2}$.

19. $r = 25$ e $s = 50$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.4

1. Após a indeterminação especificada no box, aplicamos a Regra de L'Hôpital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \boxed{\tfrac{0}{0}} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1.$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \boxed{-\tfrac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/2x^{3/2}} = -\lim_{x\to 0^+} (2\sqrt{x}) = 0.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\right) = \boxed{\exp\left(\tfrac{\infty}{\infty}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\right) = 1.$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}\right] = \boxed{\exp\left(\tfrac{0}{0}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x}\right) = \mathrm{e} \approx 2.71.$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \exp\left[\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)}{1/x}\right] = \boxed{\exp\left(\tfrac{0}{0}\right)} = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1+x}\right) = 1/\mathrm{e}\,.$

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left(\dfrac{\ln x}{1/\operatorname{sen} x}\right) = \boxed{\exp\left(-\frac{\infty}{\infty}\right)} = \exp\left(-\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}\right) = 1.$

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{x^2-1} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-1}{2x(1-x)} = 0.$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{cotg} x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)\cos x}{\operatorname{sen} x} = \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x\,(2\cos x - 1)}{\cos x} = 0.$

(i) $\lim\limits_{y\to \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - y\right)\tan y = \lim\limits_{y\to \pi/2} \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\operatorname{sen} y}{\cos y} = \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{y\to \pi/2} \dfrac{-\operatorname{sen} y + \left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cos y}{-\operatorname{sen} y} = 1.$

(j) $\lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{\ln(1+t)}{\log_2 t} = \boxed{\frac{\infty}{\infty}} = \lim\limits_{t\to \infty} \dfrac{t\ln 2}{1+t} = \ln 2.$

(k) $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{1/x} = \boxed{1^\infty} = \lim\limits_{x\to 0} \exp\left[\dfrac{\ln(x+e^x)}{x}\right] = \boxed{\exp\left(\frac{0}{0}\right)} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+e^x}{x+e^x}\right) = \mathrm{e}^2.$

(l) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \boxed{\infty \times 0} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{1/x} = \boxed{\frac{0}{0}} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1.$

2. Limite sem a Regra de L'Hôpital.

(a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9+1/x}}{\sqrt{1+1/x}} = \sqrt{9} = 3.$

(b) $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = 1.$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}} = 1.$ ..... (limite fundamental: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$)

(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1.$

3. O ítem (a) está incorreto, porque a Regra de l'Hôpital não se aplica. O ítem (b) está correto; o limite é calculado com a substituição $x = 3$.

4. Considere os seguintes pares de funções:

(a) $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = x^2$ (b) $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = x$ (c) $f(x) = 3x$ e $g(x) = x^2$.

5. A regra de L'Hôpital não se aplica.

(a) Temos que
$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x+1} = 2.$$

(b) Esse exemplo não viola a Regra de l'Hôpital, porque as funções envolvidas não são deriváveis em $x = 0$ e, portanto, a regra não se aplica.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 5.5

1. As conclusões se baseiam em (5.6), (5.7) e (5.9).

   (a) $x = 0$ é uma assíntota vertical, porque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

   (b) $x = 0$ é uma assíntota vertical, porque $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. O eixo x é uma assíntota horizontal.

   (c) Temos que $\lim_{x\to \pm 2^\pm} f(x) = \pm\infty$ e isso indica que as retas $x = \pm 2$ são assíntotas verticais. Por outro lado, usando a regra de l'Hôpital, temos

   $$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1$$

   e, portanto, $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

   (d) Ao calcular $\lim_{x\to\infty} |f(x) - x|$, obtemos

   $$\lim_{x\to\pm\infty} |f(x) - x| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|}{x^2+1} = 0.$$

   de onde concluímos que $y = x$ é uma assíntota (oblíqua) ao gráfico de $f(x)$.

   (e) A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical e $y = x$ é uma assíntota oblíqua.

   (f) $x = 1$ é uma assíntota vertical.

   (g) $y = \pm x$ são assíntotas oblíquas.

   (h) $y = 1$ é uma assíntota horizontal.

   (i) Temos

   $$\lim_{x\to\pm 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

   e, portanto, $x = \pm 1$ são assíntotas verticais. Para verificar que $y = x$ é uma assíntota oblíqua, note que

   $$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left| x + x\sqrt{1-1/x^2} \right| \sqrt{1-1/x^2}} = 0.$$

   De modo similar, temos

   $$\lim_{x\to-\infty} \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + x \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left| x - x\sqrt{1-1/x^2} \right| \sqrt{1-1/x^2}} = 0.$$

   e isto indica que $y = -x$ é também assintota oblíqua.

   (j) Temos

   $$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

   e, portanto, a curva é assintótica ao eixo x.

2. O problema consiste em determinar a e b, com $a \neq 0$, tais que

$$\lim_{x\to\infty} \left| \frac{4-x^2}{x+1} - (ax+b) \right| = 0.$$

Um cálculo direto nos dá $a = b = -1$.

3. Se $y \geq 0$, então mostre que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left| \tfrac{b}{a}\sqrt{a^2+x^2} - \left(\pm\tfrac{b}{a}x\right) \right| = 0.$$

Racicocínio semelhante se aplica no caso em que $y \leq 0$.