



Introdução

Neste capítulo faremos algumas aplicações da integral, tais como:

- (1) Área de uma região plana, nas formas cartesiana e polar.
- (2) Comprimento de curvas nas formas cartesiana, paramétrica e polar.
- (3) Volume e área de uma superfície de revolução.

Ao definir a integral como área tínhamos em mente uma primeira aplicação da integral: o cálculo de áreas planas. Suponhamos que certa região D do plano xy seja delimitada pelo eixo Ox , pelo gráfico de uma função contínua e não negativa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, e pelas retas $x = a$ e $x = b$, como ilustra a Figura 8.43. A área da região D é denotada por $A(D)$ e calculada com auxílio da fórmula:

$$A(D) = \int_a^b f(x) dx.$$

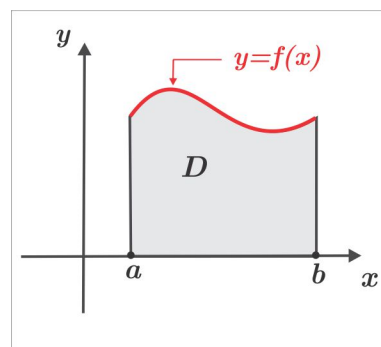


Figura 8.1: Área da região D

8.1 Comprimento de Curvas

Consideremos uma curva γ no plano xy , descrita por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, sendo f uma função contínua juntamente com a derivada primeira $f'(x)$. Na Figura 8.2 ilustramos uma tal curva γ e a porção elementar (infinitesimal) ds .

O comprimento elementar ds é aproximado, via Teorema de Pitágoras, por:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (8.1)$$

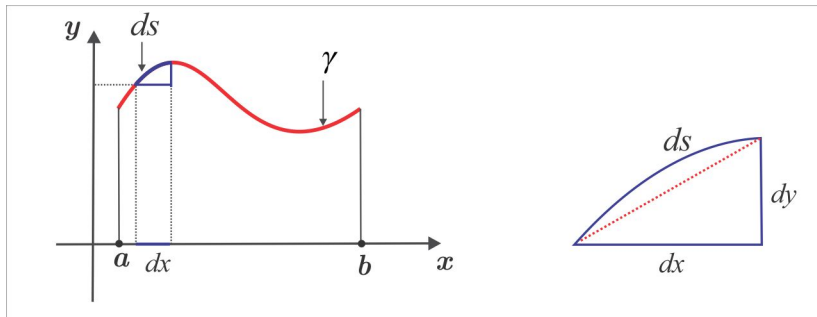


Figura 8.2: O comprimento Elementar $d\gamma$.

e obtemos, na forma cartesiana, a seguinte expressão para o comprimento da curva γ :

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (8.2)$$

Na forma paramétrica a curva γ é descrita por um par de equações:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \end{cases} \quad (8.3)$$

sendo $x(t)$ e $y(t)$, juntamente com as derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$, contínuas no intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$.

Considerando que:

$$dx = x'(t) dt \quad \text{e} \quad dy = y'(t) dt$$

encontramos:

$$d\gamma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

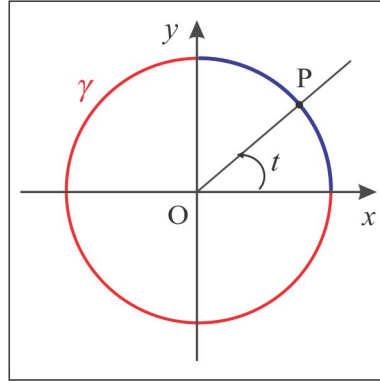
e, assim, obtemos a seguinte expressão para o comprimento da curva γ , agora na forma paramétrica:

$$L(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (8.4)$$

EXEMPLO 8.1.1 Como ilustração, vamos calcular o comprimento de uma circunferência de raio R .

SOLUÇÃO Não há perda de generalidade em considerar a circunferência de centro na origem, como ilustra a Figura 8.3. A parte da circunferência no 1º quadrante é descrita por $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, com $0 \leq x \leq R$, e usando (8.2), obtemos:

$$L(\gamma) = 4 \int_0^R \frac{R dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Figura 8.3: Curva $x^2 + y^2 = R^2$.

No cálculo da integral usamos a substituição $x = R \cos \theta$ e encontramos:

$$L(\gamma) = 4R \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = 4R \int_0^{\pi/2} d\theta = 2\pi R.$$

O cálculo torna-se mais simples se usarmos a forma paramétrica. De fato, se o parâmetro t representa o ângulo orientado do raio OP com o eixo Ox , como na Figura 8.3, obtemos a parametrização:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{cases}$$

e usando (8.4), encontramos:

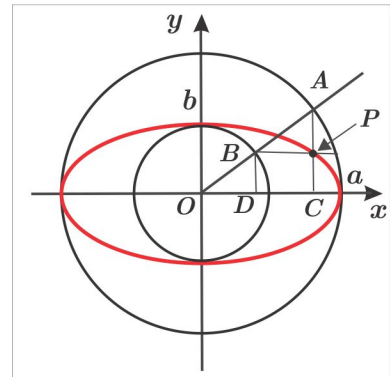
$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

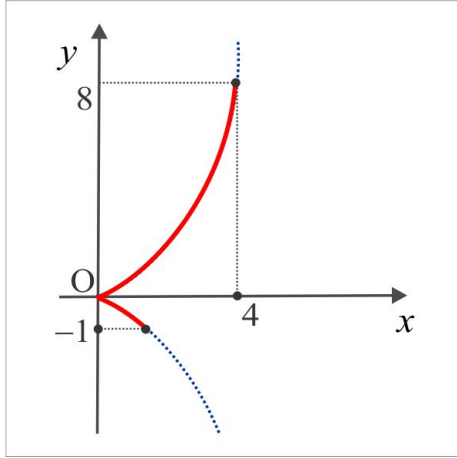
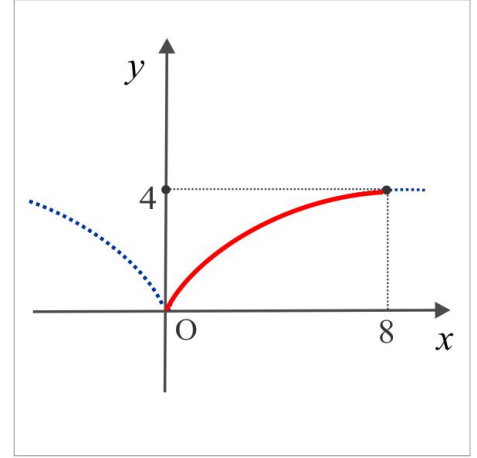
EXEMPLO 8.1.2 (Parametrizando a Elipse e a Hipérbole) O mesmo parâmetro t usado na parametrização da circunferência pode ser usado na elipse e na hipérbole.

(i) **Parametrizando a Elipse:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Observando a figura ao lado, notamos que as coordenadas do ponto $P(x, y)$ da elipse são: $x = OC$ e $y = DB$ e se t representa o ângulo entre o eixo x e o eixo OA , obtemos a seguinte parametrização para a elipse:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Figura 8.4: Parábola $y^2 = x^3$.Figura 8.5: Parábola $y^3 = x^2$.

EXEMPLO 8.1.5 Em alguns casos, o cálculo do comprimento de uma curva torna-se mais simples quando ela é descrita sob a forma $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$. A parábola semicúbica $\gamma: y^3 = x^2$, $0 \leq x \leq 8$, ilustrada na Figura 8.5, pode ser vista sob a forma $x = g(y) = y^{3/2}$, $0 \leq y \leq 4$, e o comprimento é dado por:

$$L(\gamma) = \int_0^4 \sqrt{1 + g'(y)^2} dy = \int_0^4 \sqrt{1 + 9y/4} dy.$$

Com a substituição $u = 1 + 9y/4$, chegamos a:

$$L(\gamma) = \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{u} du = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

8.1.1 Dedução das Fórmulas do Comprimento

A curva γ ilustrada na Figura 8.6 representa o gráfico de uma função contínua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, com derivada $f'(x)$ contínua.

Dada uma partição $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$, o comprimento da curva γ é aproximado pelo comprimento da poligonal que liga os pontos:

$$A(a, f(a)), A_1(x_1, f(x_1)), A_2(x_2, f(x_2)), A_3(x_3, f(x_3)), \dots, A_{n-1}(x_{n-1}, f(x_{n-1})), B(b, f(b))$$

e o segmento genérico $A_{k-1}A_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, tem comprimento:

$$\begin{aligned} |A_{k-1}A_k| &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + f'(c_k)^2 (x_k - x_{k-1})^2} = (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + f'(c_k)^2} \end{aligned}$$

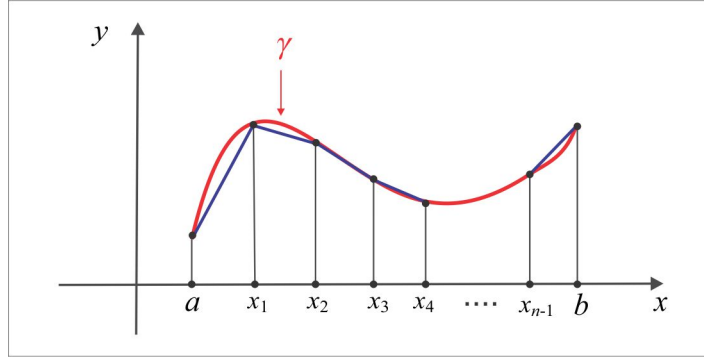


Figura 8.6: Comprimento do arco γ .

onde cada c_k , entre x_{k-1} e x_k , é determinado pelo Teorema do Valor Médio 6.2.2. O comprimento da poligonal que aproxima a curva γ é, portanto:

$$L_n = \sum_{k=1}^n |A_{k-1}A_k| = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + f'(c_k)^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f'(c_k)^2} \Delta x_k$$

com $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, e fazendo $n \rightarrow \infty$, chegamos ao comprimento da curva γ :

$$L(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |A_{k-1}A_k| = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Na forma parametrizada, a curva γ é descrita por um par de equações a um parâmetro t :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad c \leq t \leq d \end{cases}$$

e o ponto genérico A_k da poligonal tem coordenadas $x(t_k)$ e $y(t_k)$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$.

Mais uma vez usamos o Teorema do Valor Médio e encontramos:

$$\begin{aligned} |A_{k-1}A_k| &= \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2} \\ &= (t_k - t_{k-1}) \sqrt{x'(c_k)^2 + y'(d_k)^2} = \sqrt{x'(c_k)^2 + y'(d_k)^2} \Delta t \end{aligned}$$

onde c_k e d_k estão entre t_{k-1} e t_k , e, sendo assim:

$$L(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |A_{k-1}A_k| = \int_c^d \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.1

([click aqui](#) e veja a lista completa)

1. Calcule a área de um círculo de raio R e da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (resp.: πR^2 e πab)

2. Calcule a área da região delimitada pelo eixo x , pelas retas $x = \pm B$, $B > 0$, e pelo gráfico da função $y = x^2 \exp(-|x^3|)$. Verifique que a área limite, com $B \rightarrow \infty$, é $2/3$. (resp.: $\frac{2}{3}(1 - e^{-B^3})$)
3. Considere $B > 2$ e calcule a área sob a curva $y = x^{-1}(\ln x)^{-2}$, entre as retas $x = 2$ e $x = B$. Esta área tem um limite, com $B \rightarrow \infty$? (resp.: $1/\ln 2 - 1/\ln B$, com área limite $1/\ln 2$)
4. Em cada caso, calcule o comprimento do arco indicado.

(a) $y = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq 2$. (resp.: $13/12$)

(b) $y = \frac{2}{3}(1 + x^2)^{3/2}$, $0 \leq x \leq 3$. (resp.: 21)

(d) $x = \frac{y^3}{2} + \frac{1}{6y}$, $1 \leq y \leq 3$. (resp.: $\sqrt{6}(2 + \ln 3)$)

(e) $y = \sqrt{x}(1 - x/3)$, $0 \leq x \leq 3$. (resp.: $2\sqrt{3}$)

(f) $8x^2 = 27y^3$, $1 \leq x \leq 8$. (resp.: $62/3$)

(g) $y = x^{3/2}$, $1 \leq x \leq 4$. (resp.: $62/5$)

(h) $y + \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{3} = 0$, $2 \leq x \leq 3$. (resp.: $53/6$)

(i) $(y + 1)^2 = (x - 4)^3$, $5 \leq x \leq 8$. (resp.: $80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}$)

(j) $y = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2x^{3/2}}{3}$, $0 \leq x \leq 1$. (resp.: $\frac{1}{6}(30\sqrt{3} - 7)$)

5. Calcule o comprimento da *hipociclóide* de equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. (resp.: $6a$)

6. Calcule a distância percorrida por uma partícula entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$, se sua posição $P(x, y)$ no instante t vem dada por: $x = \frac{1}{2}t^2$ e $y = \frac{1}{3}(2t + 1)^{3/2}$. (resp.: 12)

7. Em cada caso, calcule o comprimento do arco γ indicado:

(a) $\gamma : x = t^3$, $y = t^2$, $-1 \leq t \leq 3$. (resp.: $\frac{1}{27}[(85)^{3/2} - (13)^{3/2}]$)

(b) $\gamma : x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $0 \leq t \leq 1$. (resp.: $\sqrt{2}(e - 1)$)

(c) $\gamma : x = 2(1 - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$. (resp.: 2π)

(d) $\gamma : x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $0 \leq t \leq \pi/4$. (resp.: $\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + \pi^2}$)

(e) $\gamma : x = \cos(2t)$, $y = \sin^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$. (resp.: $2\sqrt{5}$)

(f) $\gamma : x = \frac{1}{2}t^2 + t$, $y = \frac{1}{2}t^2 - t$, $0 \leq t \leq 1$. (resp.: $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\sqrt{2} - 1)$)

8. Seja γ a curva descrita por: $x = t^3 - 3t$, $y = t^3 - 5t - 1$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que $r : 7x - 9y = 41$ é a reta tangente à curva γ no ponto correspondente a $t = 2$. Note que nos pontos correspondentes a $t = \pm 1$ a reta tangente é vertical e será horizontal nos pontos correspondentes a $t = \pm\sqrt{5/3}$.

8.2 Comprimento & Área na Forma Polar

Com origem num ponto O , denominado *Pólo*, consideremos um eixo, denominado *Eixo Polar*. Um ponto $P(x, y)$ do plano xy estará determinado quando são conhecidos o ângulo θ , entre o eixo polar e o raio vetor OP , e o comprimento r desse raio vetor.

Normalmente considera-se o eixo polar coincidindo com o eixo cartesiano Ox e, dessa forma, obtemos as relações entre as variáveis cartesianas x e y e as variáveis polares r e θ :

$$\left| \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{array} \right| \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan(y/x) \end{array} \right| \quad (8.5)$$

As quantidades r e θ são as *coordenadas polares* do ponto P . É claro que as coordenadas (r, θ) e $(r, \theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, representam o mesmo ponto e convencionaremos que $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

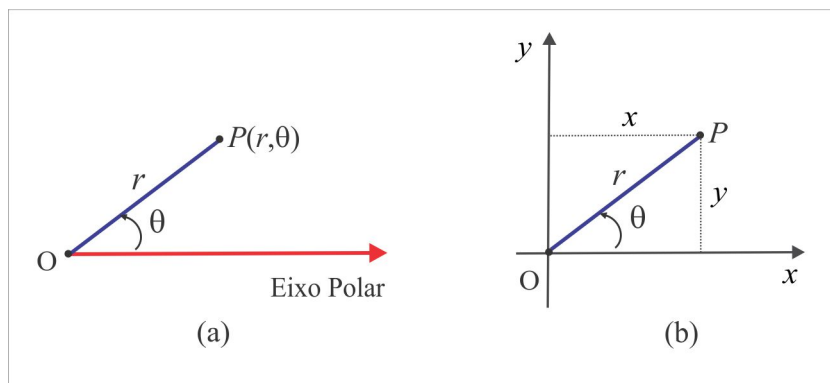
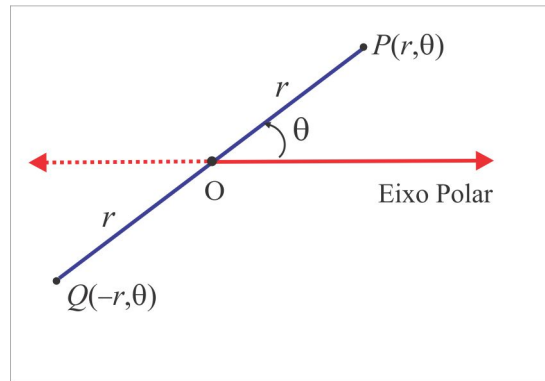


Figura 8.7: Coordenadas Polares r e θ .

Alguns autores admitem a possibilidade $r < 0$ e, nesse caso, o ponto (r, θ) é localizado na direção contrária ao eixo polar, como ilustra a Figura 8.8 onde o ponto $Q(r, \theta + \pi)$ é identificado por $Q(-r, \theta)$.

EXEMPLO 8.2.1 O ponto P de coordenadas polares $r = 1$ e $\theta = \pi/2$ tem coordenadas cartesianas

Figura 8.8: Os pontos $(\pm r, \theta)$.

$x = 0$ e $y = 1$. Já as coordenadas polares do ponto $Q(2, 2)$ são:

$$r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad e \quad \theta = \arctan 1 = \pi/4.$$

8.2.1 Lugar Geométrico (LG) na Forma Polar

■ A LINHA RETA: Fixado θ_0 no intervalo $[0, 2\pi]$, a equação polar $\theta = \theta_0$ representa a reta que passa pelo pólo, formando um ângulo de θ_0 rad com o eixo polar (o eixo Ox). Em coordenadas cartesianas a equação deste LG é $y = (\tan \theta_0)x$.

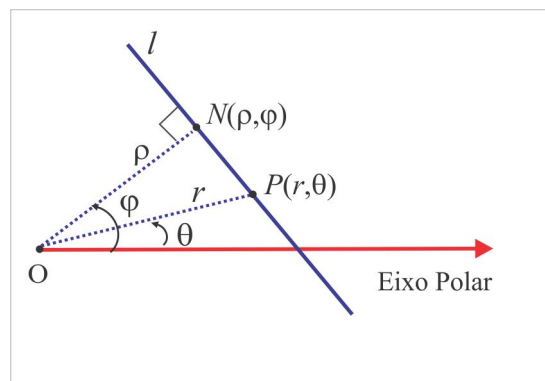


Figura 8.9: A linha Reta.

Dada uma reta l que não passa no pólo, seja $N(\rho, \varphi)$ o pé da perpendicular traçada da origem à reta l , como ilustra a Figura 8.9. Um ponto $P(r, \theta)$ está sobre a reta l se, e somente se, $r \cos(\varphi - \theta) = \rho$ e em símbolos, temos:

$$P(r, \theta) \in l \Leftrightarrow r = \frac{\rho}{A \cos \theta + B \sin \theta}, \quad (8.6)$$

onde $A = \cos \varphi$ e $B = \sin \varphi$. Temos os seguintes casos particulares ilustrados na Figura 8.10.

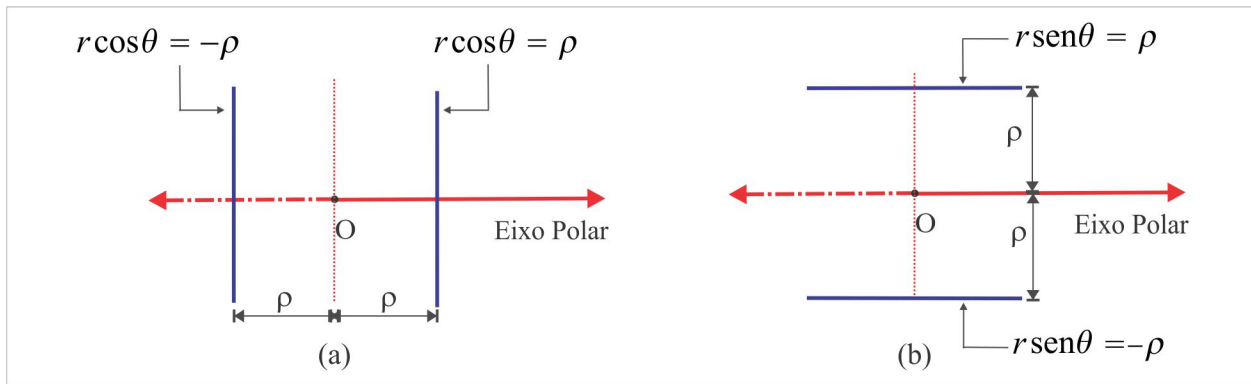


Figura 8.10: (a) Reta Vertical | (b) Reta Horizontal.

- (i) **Reta Vertical:** Se $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$ e $\rho > 0$, a equação (8.6) é do tipo $r \cos \theta = \pm \rho$ e representa a reta perpendicular ao eixo polar, distante ρ unidades do pólo, ilustrada na Figura 8.10(a).
- (ii) **Reta Horizontal:** A equação $r \sin \theta = \pm \rho$, decorrente de (8.6), com $\varphi = \pm \pi/2$ e $\rho > 0$, representa a reta paralela ao eixo polar, distante ρ unidades do pólo, ilustrada na Figura 8.10(b).

■ A CIRCUNFERÊNCIA: A Figura 8.11 ilustra a circunferência γ de centro $C(\rho, \varphi)$ e raio a .

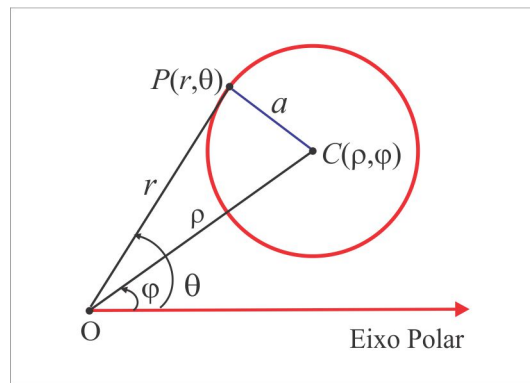


Figura 8.11: A Circunferência

Decorre da Lei dos Cossenos que:

$$P(r, \theta) \in \gamma \Leftrightarrow r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) = a^2$$

e temos os seguintes casos particulares:

- (i) **Circunferência I:** A Figura 8.12 ilustra o caso $\rho = 0$ e $\varphi = 0$ em que a equação se reduz a $r = a$ e representa a circunferência de raio a e centro no pólo. A equação cartesiana é $x^2 + y^2 = a^2$.

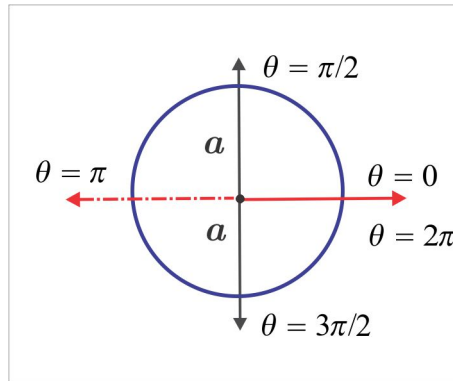


Figura 8.12: A Circunferência $r = a$.

- (ii) **Circunferências II:** No caso $\rho = a$ e $\varphi = 0$ temos as circunferências $r = \pm 2a \cos \theta$ ilustradas na Figura 8.13, com equação cartesiana $(x \pm a)^2 + y^2 = a^2$.

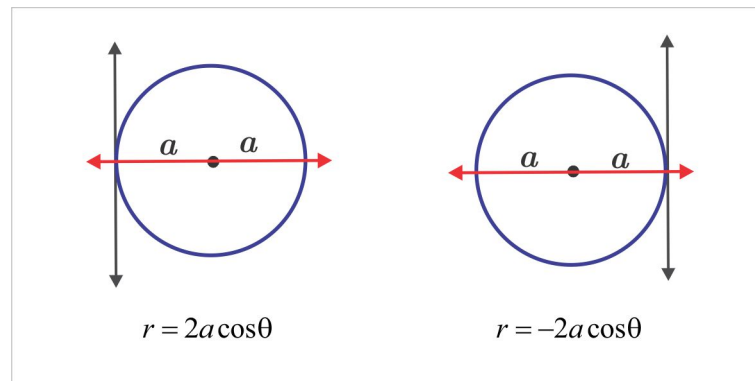


Figura 8.13: As Circunferências $r = \pm 2a \cos \theta$.

Por exemplo, para descrever a circunferência de equação cartesiana $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ na forma polar basta observar que:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + y^2 &= 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \\ \Leftrightarrow r^2 &= 2r \cos \theta \Leftrightarrow r = 2 \cos \theta. \end{aligned}$$

(iii) **Circunferências III:** No caso $\rho = a$ e $\varphi = \pi/2$ temos as circunferências $r = \pm 2a \sin \theta$, ilustradas na Figura 8.14, com equação cartesiana $x^2 + (y \pm a)^2 = a^2$.

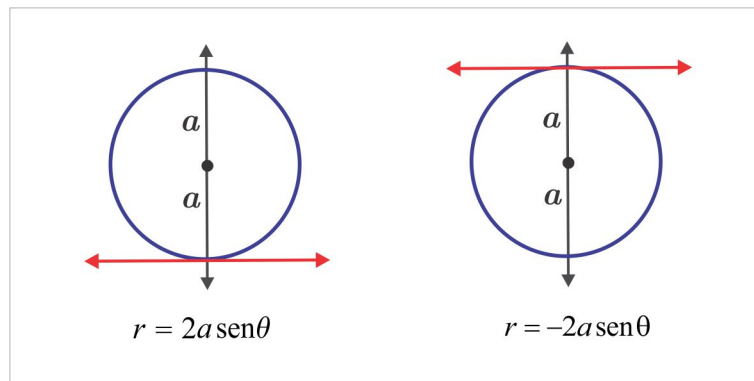


Figura 8.14: As Circunferências $r = \pm 2a \sin \theta$.

■ **AS CÔNICAS:** Dados uma reta l e um ponto F fora da reta l , a equação:

$$|FP| = e \cdot \text{dist}(P; l) \quad (8.7)$$

representa a *cônica* com *diretriz* l e *foco* F . O número real e , denominado *excentricidade* da cônica, mede o achatamento da curva e a reta que passa no foco, ortogonal à diretriz, é o *eixo focal*. A cônica é:

(a) uma parábola, se $e = 1$ (b) uma elipse, se $e < 1$ e (c) uma hipérbole, se $e > 1$.

Vamos investigar as situações mais frequentes:

SITUAÇÃO I: O foco F coincide com o pólo e o eixo focal é o eixo polar. Dado um ponto $P(r, \theta)$ da cônica, temos:

$$r = |FP| = e \cdot \text{dist}(P; l) = e \cdot |PQ|$$

e, por outro lado:

$$\begin{aligned} |PQ| &= |BD| = |FD| - |FB| = p - r \cos(\pi - \theta) \\ &= p + r \cos \theta, \end{aligned}$$

onde $p = |FD| = \text{dist}(F; l)$. Assim, temos $r = e(p + r \cos \theta)$, isto é:

$$r = \frac{e \cdot p}{1 - e \cos \theta} \quad (8.8)$$

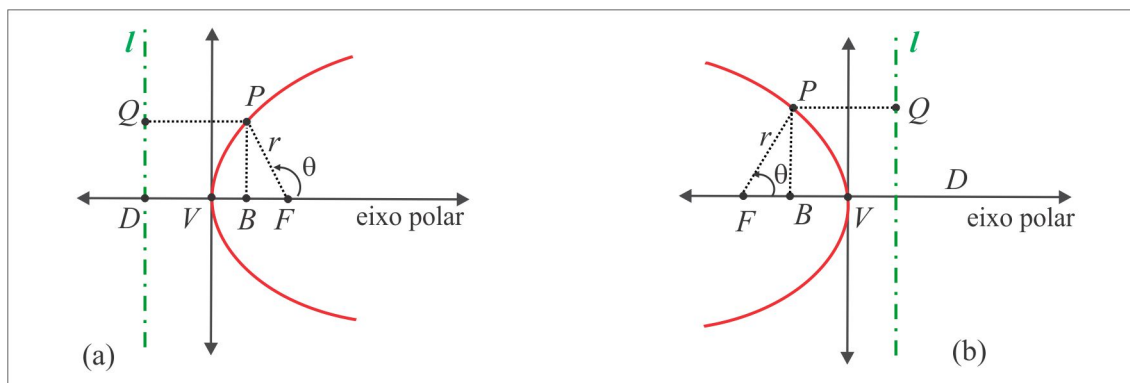


Figura 8.15: As cônicas $r = ep(1 \pm e \cos \theta)^{-1}$.

que representa a cônica com foco no pólo e diretriz l à esquerda do foco, como ilustra a Figura 8.15(a).

No caso em que a diretriz l situa-se à direita do foco, como na Figura 8.15(b), então $|FB| = r \cos \theta$ e a equação da cônica é:

$$r = \frac{e \cdot p}{1 + e \cos \theta}. \quad (8.9)$$

SITUAÇÃO II: O foco coincide com o pólo e o eixo focal é $\theta = \pi/2$. Existem dois casos a considerar a depender da posição da diretriz l , que pode estar acima ou abaixo do pólo. Supondo que a diretriz esteja abaixo do foco, como ilustra a Figura 8.16(a), então:

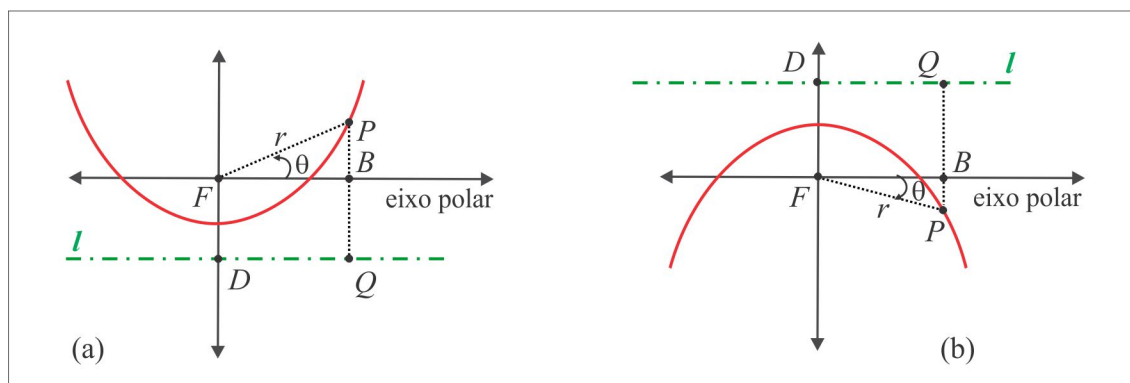


Figura 8.16: As cônicas $r = ep(1 \pm e \sin \theta)^{-1}$.

$$|PQ| = |BQ| + |PB| = p + r \sin \theta$$

e de (8.7), chegamos à equação da cônica:

$$r = \frac{e \cdot p}{1 - e \sin \theta} \quad (8.10)$$

No caso em que a diretriz l situa-se acima do foco, como ilustra a Figura 8.16(b), a equação da cônica é:

$$r = \frac{e \cdot p}{1 + e \sin \theta} \quad (8.11)$$

EXEMPLO 8.2.2 Considerando $\rho = a = \sqrt{2}/2$ e $\varphi = \pi/4$, a equação:

$$r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \varphi) = a^2 \quad (8.12)$$

é equivalente a $r = \sin \theta + \cos \theta$ e representa uma circunferência de raio $a = \sqrt{2}/2$ e centro $C(\rho, \varphi)$. Em coordenadas cartesianas, a circunferência $r = \sin \theta + \cos \theta$ é descrita por:

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 = 1/2.$$

EXEMPLO 8.2.3 A equação $r = 4(2 + \sin \theta)^{-1}$ se enquadra no modelo (8.11), com $p = 4$ e $e = 1/2$. Trata-se, portanto, de uma elipse com um foco no pólo, eixo focal $\theta = \pi/2$ e diretriz 4 unidades acima do pólo como ilustra a Figura 8.17. Com $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$ obtemos, respectivamente, $r = 4/3$ e $r = 4$

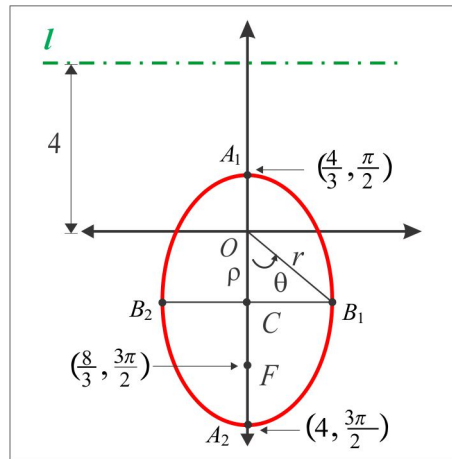


Figura 8.17: A Elipse $r = 4(2 + \sin \theta)^{-1}$.

e com isso encontramos os vértices $A_1(4/3, \pi/2)$ e $A_2(4, 3\pi/2)$. O centro da elipse, que corresponde ao ponto médio do eixo maior A_1A_2 , é o ponto $C(\rho, 3\pi/2)$, com $\rho + 4/3 = 4 - \rho$, isto é, $\rho = 4/3$. Os outros dois vértices são:

$$B_1(r, 3\pi/2 + \theta) \quad e \quad B_2(r, 3\pi/2 - \theta)$$

com r e θ dados por:

$$r = |FB_1| = \text{dist}(B_1; l) = \frac{1}{2}(4 + 4/3) = 8/3 \quad e \quad \theta = \pi/3.$$

EXEMPLO 8.2.4 A equação polar $r = 2(1 - \cos \theta)^{-1}$, $0 < \theta < 2\pi$, é do tipo (8.10) com $e = 1$ e $p = 2$. Trata-se, portanto, da parábola de equação cartesiana $y^2 = 4(x + 1)$.

■ **(IV) AS CARDIOIDES:** Seja $a > 0$ um número real fixado e consideremos a curva γ descrita pela equação polar $r = a(1 - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Vejamos alguns aspectos gráficos da curva γ .

(i) **Interseção com o eixo polar:** Se $\theta = 0$, então $r = 0$ e se $\theta = \pi$, então $r = 2a$ e a curva passa nos pontos $(0, 0)$ e $(2a, \pi)$.

(ii) **Interseção com os eixos $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$:** Com $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$, encontramos $r = a$ e a curva passa nos pontos $(a, \pi/2)$ e $(a, 3\pi/2)$.

(iii) **Simetria:** A equação não é alterada ao trocarmos θ por $-\theta$ e isto indica que a curva é simétrica em relação ao eixo polar. Se $0 \leq \theta < \pi/2$ então:

$$a(1 - \cos \theta) \neq a[1 - \cos(\pi - \theta)] \quad \text{e} \quad a(1 - \cos \theta) \neq a[1 - \cos(\pi + \theta)]$$

e isto indica que a curva não é simétrica nem ao eixo $\theta = \pi/2$ nem ao pólo.

(iv) **Extensão do Lugar Geométrico:** Considerando que $|\cos \theta| \leq 1$, segue que r é finito, seja qual for o valor real assumido por θ e isto indica que a curva é fechada. Os valores máximo e mínimo assumidos por r são $r = 2a$ e $r = 0$ e ocorrem para $\theta = \pi$ e $\theta = 0$, respectivamente.

(v) **O Gráfico:** A Figura 8.18 ilustra a *cardióide* descrita pela equação polar $r = a(1 - \cos \theta)$.

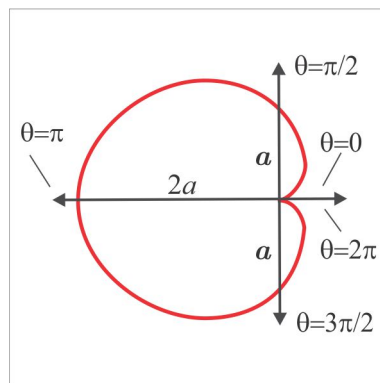


Figura 8.18: Cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$.

Uma análise similar é feita para as cardioides:

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad r = a(1 - \sin \theta) \quad \text{e} \quad r = a(1 + \sin \theta)$$

cujos gráficos estão ilustrados na Figura 8.19.

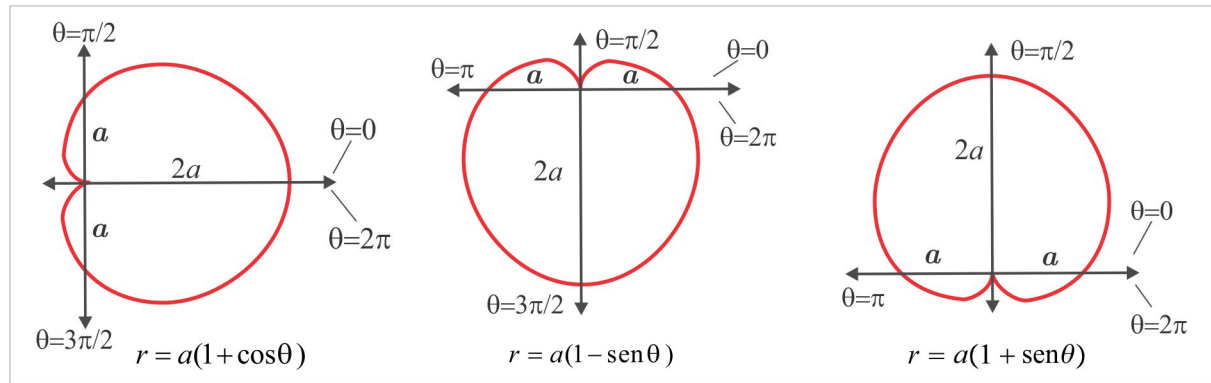


Figura 8.19: Outras Cardioides.

8.2.2 A Fórmula do Comprimento em Coordenadas Polares

Uma curva γ descrita em coordenadas polares pela equação $r = f(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, pode ser visualizada na forma paramétrica por:

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

e um cálculo direto nos dá:

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta \quad \text{e} \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta.$$

Usando a fórmula (8.4) para o comprimento, encontramos:

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta. \quad (8.13)$$

EXEMPLO 8.2.5 Com a fórmula (8.13), vamos calcular o comprimento da cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$ ilustrada na Figura 8.18.

SOLUÇÃO Temos $r = f(\theta) = a(1 - \cos \theta)$ e aplicando a fórmula (8.13), considerando que $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$, obtemos:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos \theta)} d\theta = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2(\theta/2)} d\theta \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin(\theta/2) d\theta = 2a \left[-2 \cos(\theta/2) \right]_0^{2\pi} = 8a. \end{aligned}$$

8.2.3 A Fórmula da Área em Coordenadas Polares

A fórmula para o cálculo da área em coordenadas polares tem sua origem na área do setor circular. A Figura 8.20(a) ilustra um setor circular S , cuja área corresponde à fração da área do círculo:

$$A(S) = \frac{\theta}{2\pi} (\pi r^2) = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

e uma região D do plano, descrita em coordenadas polares por:

$$D : 0 \leq r \leq f(\theta) \quad \text{e} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

ilustrada na Figura 8.20(b), tem porção elementar dA semelhante a um setor circular.

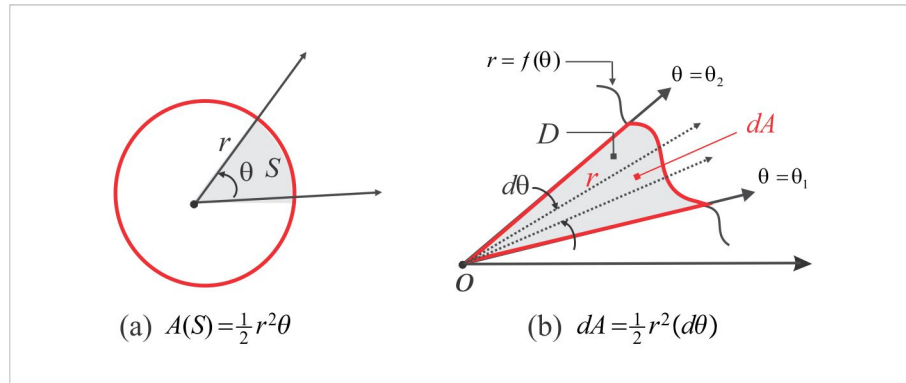


Figura 8.20: Área em Coordenadas polares.

A área da porção elementar dA é aproximada por $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ e por integração encontramos:

$$A(D) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dA = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta)^2 d\theta. \quad (8.14)$$

EXEMPLO 8.2.6 Como primeira ilustração, vamos calcular a área da região delimitada pela cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$ da Figura 8.18. Aplicando a fórmula (8.14) com $f(\theta) = a(1 - \cos \theta)$, encontramos:

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 - \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\theta - 2\sin \theta + \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

No caso em que a região D é delimitada por duas curvas, como ilustra a Figura 8.21, ela é descrita pelas desigualdades $D : g(\theta) \leq r \leq f(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$,

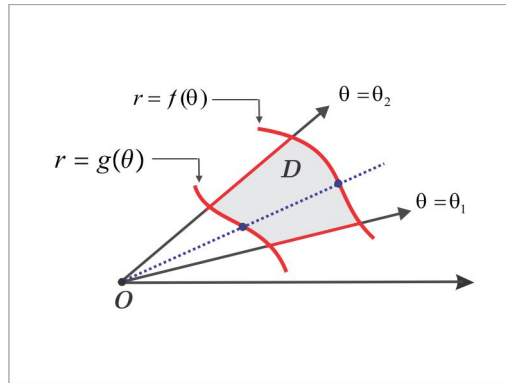


Figura 8.21: Área entre duas curvas.

e a fórmula para o cálculo da área torna-se:

$$A(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)^2 - g(\theta)^2] d\theta. \quad (8.15)$$

EXEMPLO 8.2.7 Para ilustrar a fórmula (8.15), inicialmente vamos calcular a área da região D sugerida nos seguintes casos:

(a) D ilustrada na Figura 8.22(a), é exterior à cardioide $r = a(1 - \sin \theta)$ e interior ao círculo $r = a$.

De (8.15), segue que:

$$A(D) = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [a^2 - a^2(1 - \sin \theta)^2] d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (2\sin \theta - \sin^2 \theta) d\theta = a^2(2 - \pi/2).$$

(b) D é a região comum às curvas $\gamma_1 : r = 2a \cos \theta$ e $\gamma_2 : r = 2a \sin \theta$, ilustrada na Figura 8.22(b).

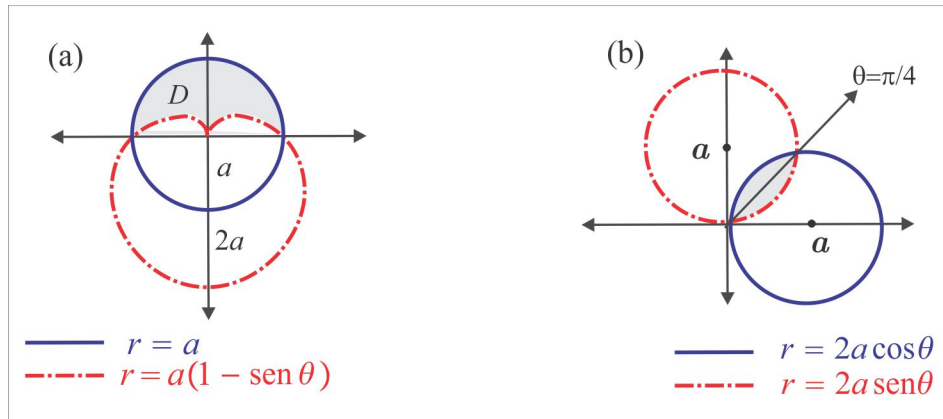


Figura 8.22: Regiões do Exemplo 8.2.7.

Neste caso, encontramos:

$$\begin{aligned}
 A(D) &= 2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (2a \sen \theta)^2 d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\theta)] d\theta \\
 &= 2a^2 \left[\theta - \frac{\sen(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/4} = a^2 (-1 + \pi/2).
 \end{aligned}$$

EXEMPLO 8.2.8 Calcular a área da região \mathcal{R} interior à lemniscata $\gamma_1 : r^2 = 2a^2 \cos(2\theta)$ e exterior ao círculo $\gamma_2 : r = a$ ilustrada na Figura 8.23.

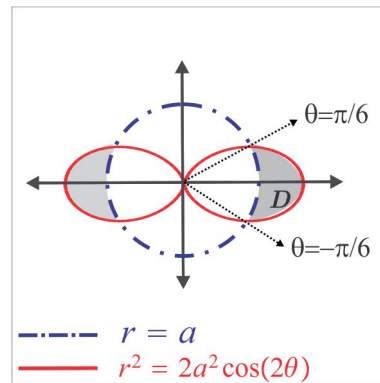


Figura 8.23: Região do Exemplo 8.2.8.

SOLUÇÃO Os pontos de interseção das curvas γ_1 e γ_2 são aqueles para os quais:

$$2a^2 \cos(2\theta) = a^2. \quad (8.16)$$

Resolvendo a equação (8.16) encontramos $\theta = \pm\pi/6$ e um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned} A(\mathcal{R}) &= 2A(D) = 2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1}{2} [2a^2 \cos(2\theta) - a^2] d\theta = a^2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} [2 \cos(2\theta) - 1] d\theta \\ &= a^2 \left(\sqrt{3} - \pi/3 \right). \end{aligned}$$

EXEMPLO 8.2.9 Calcular a área da região D interior à cardioide $\gamma_1 : r = a(1 + \sin \theta)$ e exterior ao círculo $\gamma_2 : r = a \sin \theta$.

SOLUÇÃO A Figura 8.24 ilustra a situação gráfica.

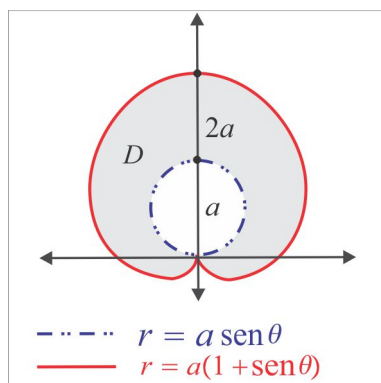


Figura 8.24: Região do Exemplo 8.2.9.

Para usar a fórmula (8.15), com $f(\theta) = a(1 + \sin \theta)$ e $g(\theta) = a \sin \theta$, primeiro separamos a região D em duas partes: a porção D_1 acima e a porção D_2 abaixo do eixo polar. Temos:

$$\begin{aligned} A(D_1) &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} [a^2 (1 + \sin \theta)^2 - a^2 \sin^2 \theta] d\theta = a^2 (2 + \pi/2), \\ A(D_2) &= 2 \int_{-\pi/2}^0 \frac{1}{2} a^2 (1 + \sin \theta)^2 d\theta = a^2 (-2 + 3\pi/4) \end{aligned}$$

e, dessa forma, encontramos:

$$A(D) = A(D_1) + A(D_2) = \frac{5\pi a^2}{4}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.2

([click aqui](#) e veja a lista completa)

1. Localize no plano cartesiano os seguintes pontos dados em coordenadas polares e, em seguida, determine suas coordenadas cartesianas:

- (a) $(2, \pi/4)$ (b) $(2, 3\pi/2)$ (c) $(3, \pi/6)$ (d) $(1, -\pi/4)$
 (e) $(2, 5\pi/6)$ (f) $(-1, -\pi/4)$ (g) $(-2, 7\pi/6)$ (f) $(-3, 13\pi/6)$
2. Determine as coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas são:
- (a) $(1, 1)$ (b) $(2, 0)$ (c) $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (d) $(3, 3\sqrt{3})$
 (e) $(-1, -1)$ (f) $(1, \sqrt{3})$ (g) $(-\sqrt{7}, 3)$ (h) $(0, -4)$
3. Passe para a forma polar $r = f(\theta)$ as seguintes curvas:
- (a) $xy = 2$ (b) $x^2 + y^2 - 3y = 0$ (c) $3x^2 + 5y^2 = 15$
 (d) $x + 1 = 0$ (e) $x^2 - y^2 = 1$ (f) $y^2 - 4x = 0$.
4. Passe para forma cartesiana $F(x, y) = 0$ e esboce o gráfico de cada curva abaixo:
- (a) $r = 2 + \sin 2\theta$ (b) $r = \sin 2\theta$ (c) $r = \frac{4}{1 + \cos \theta}$ (d) $r = a \cos \theta$ (e) $r = 5$
 (f) $r = 5 + 2 \cos \theta$ (g) $r = 3 \sec \theta$ (h) $r = 1 + \sqrt{2} \cos \theta$ (i) $r = 2 \tan \theta$ (j) $r = \theta$
5. Determine, caso exista, a interseção entre os seguintes pares de curvas:
- (a) $\gamma_1 : r = 2$ e $\gamma_2 : r = 4 \cos \theta$ (b) $\gamma_1 : r = 1 + \cos \theta$ e $\gamma_2 : r = 1/3(1 - \cos \theta)$
 (c) $\gamma_1 : r^2 = 4 \sin 2\theta$ e $\gamma_2 : r = 2\sqrt{2} \cos \theta$ (d) $\gamma_1 : \theta = \pi/4$ e $\gamma_2 : r = 2 \cos \theta$
6. Calcule o comprimento das seguintes curvas dadas na forma polar:
- (a) $\gamma : r = 3 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (b) $\gamma : r = 2 \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ (c) $\gamma : r = 1 - \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
 (d) $\gamma : r = \theta/3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (e) $\gamma : r = |\sin \theta|, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ (f) $\gamma : r = 3 \cos^2(\frac{\theta}{2}), 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
7. Calcule a área da região interior a cada curva γ dada abaixo:
- (a) $\gamma : r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (b) $\gamma : r = a(2 - \cos \theta)$ (c) $\gamma : r = 2a \sin \theta$
 (d) $\gamma : r = a(1 + \cos 2\theta)$ (e) $\gamma : r^2 = 1 - \cos \theta$ (f) $\gamma : r^2 = 2a^2 \cos^2(\theta/2)$
8. Em cada caso, esboce graficamente a região D e calcule a área $A(D)$.
- (a) D é interior ao círculo $r = a$ e exterior à *cardióide* $r = a(1 - \cos \theta)$. (resp.: $a^2(2 - \pi/4)$)
 (b) D é delimitada pelas curvas $r = 2, \theta = \pi/4$ e $\theta = \pi/2$. (resp.: $\pi/2$)
 (c) D é interior à *cardióide* $r = a(1 + \sin \theta)$ e exterior ao círculo $r = a \sin \theta$. (resp.: $5\pi a^2/4$)
 (d) D é comum aos círculos $r = 2a \cos \theta$ e $r = 2a \sin \theta$. (resp.: $a^2(-1 + \pi/2)$)
 (e) D é interior à lemniscata $r^2 = 8 \cos 2\theta$ e exterior ao círculo $r = 2$. (resp.: $\frac{4}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$)

- (f) D é interior ao círculo $r = 3 \cos \theta$ e exterior à cardióide $r = 1 + \cos \theta$. (resp.: π)
- (g) D é delimitada pela rosácea de 4 pétalas $r = a |\sin 2\theta|$ (resp.: $a^2 \pi/2$)
- (h) D é interior ao círculo $r = \cos \theta$ e exterior à cardióide $r = 1 + \sin \theta$. (resp.: $1 - \pi/4$)
- (i) D é interior ao círculo $r = \sin \theta$ e exterior à cardióide $r = 1 - \cos \theta$. (resp.: $1 - \pi/4$)

8.3 Volume de Revolução

Consideremos uma curva γ no plano xy , aqui denominada *geratriz*, descrita pela relação $F(x, y) = 0$ e denotemos por S a superfície obtida pela rotação da curva γ em torno do eixo Ox . É claro que cada ponto da curva γ irá descrever uma circunferência de centro no ponto $C(x, 0, 0)$ e a superfície S é caracterizada por $\|\overrightarrow{CP}\| = \|\overrightarrow{CQ}\|$, onde $P(x, y, z)$ é um ponto genérico da superfície S e $Q(x, \bar{y}, 0)$ é o ponto de interseção da curva γ com o plano que passa por P , perpendicularmente ao eixo x (*eixo de rotação*), como sugere a Figura 8.25.

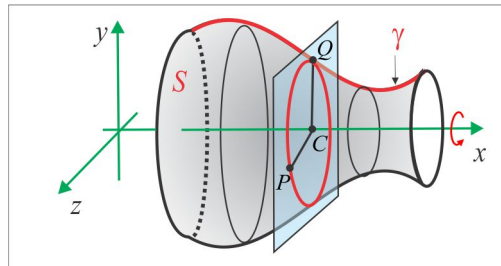


Figura 8.25: Superfície de Revolução.

A equação $\|\overrightarrow{CP}\| = \|\overrightarrow{CQ}\|$ que descreve a superfície S se reduz a $\bar{y}^2 = y^2 + z^2$ e como o ponto $Q(x, \bar{y}, 0)$ jaz sobre a curva γ , temos $F(x, \bar{y}) = 0$ e a equação de S é:

$$S : F(x, \pm \sqrt{y^2 + z^2}) = 0.$$

No caso em que a curva γ é o gráfico da função $y = f(x)$ a equação da superfície S é:

$$S : y^2 + z^2 = [f(x)]^2.$$

EXEMPLO 8.3.1 Ao girar o arco de circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ encontramos a esfera S , de centro na origem e raio R , descrita por:

$$y^2 + z^2 = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \Leftrightarrow S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

8.3.1 Volume de Revolução - Método das Fatias

O *Método das Fatias*, ou dos *Discos Circulares*, tem sua origem na fórmula clássica $V = \pi R^2 h$ que representa o volume de um cilindro circular reto de raio R e altura h . Para deprever o método, deixe-nos considerar um corpo Ω , gerado pela rotação de certa região D do plano xy , em torno do eixo Ox , e por simplicidade consideremos a região:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } 0 \leq y \leq f(x)\}$$

ilustrada na Figura 8.26.

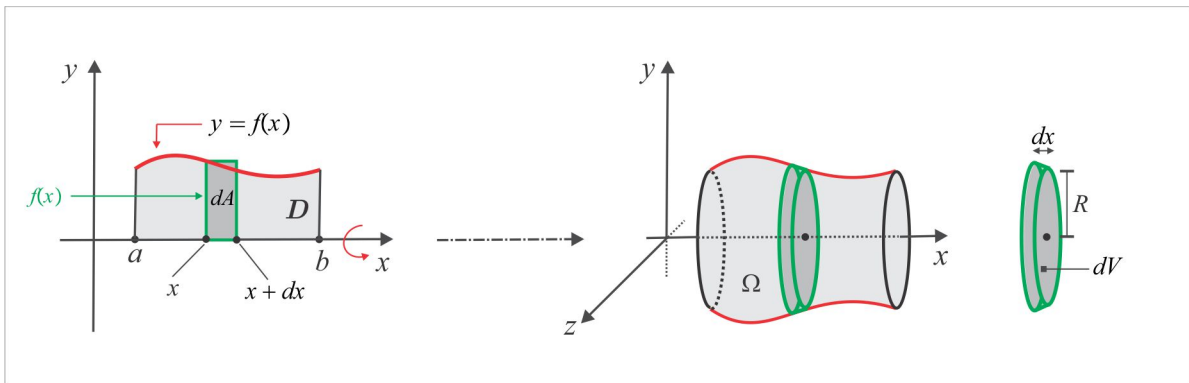


Figura 8.26: Volume de Revolução.

O volume elemental dV produzido pela rotação da fatia dA entre x e $x + dx$ assemelha-se ao volume do cilindro de raio $R = |f(x)|$ e altura $h = dx$ e, portanto:

$$dV \simeq \pi [f(x)]^2 dx.$$

Por integração, encontramos:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_a^b dV = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx. \quad (8.17)$$

EXEMPLO 8.3.2 (Volume da Bola Esférica.) A bola esférica de raio R é gerada pela rotação em torno do eixo Ox da região $D : -R \leq x \leq R; 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$, como ilustra a Figura 8.27.

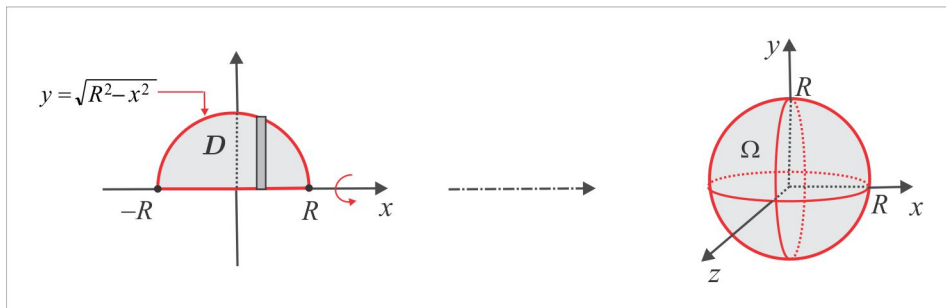


Figura 8.27: Volume da Bola Esférica.

Temos $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e de acordo com (8.17), encontramos:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{-R}^R \pi f(x)^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x \Big|_{-R}^R - \frac{x^3}{3} \Big|_{-R}^R \right) = \boxed{4\pi R^3/3}.$$

EXEMPLO 8.3.3 (Volume do Cone Circular Reto.) A rotação em torno do eixo Ox da região triangular D , ilustrada na Figura 8.28, produz o cone circular reto de raio R e altura H .

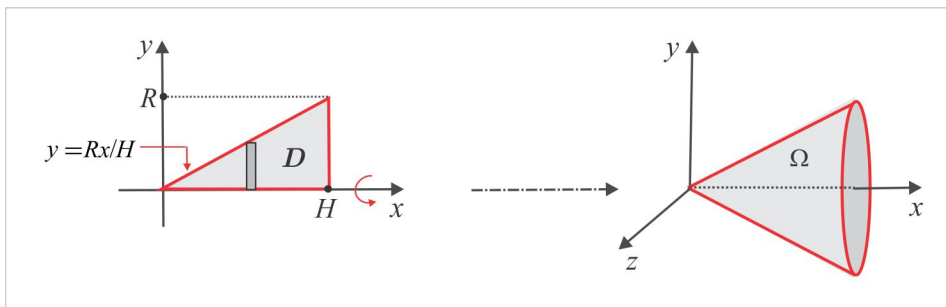


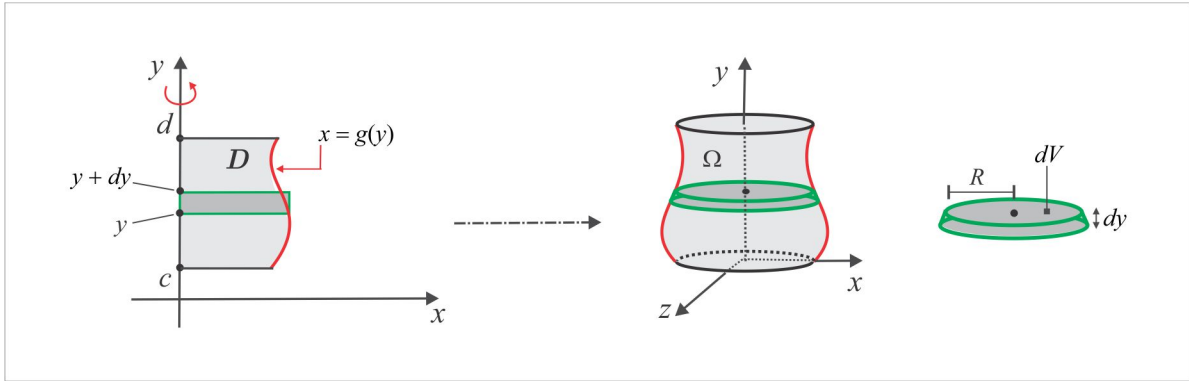
Figura 8.28: Volume do Cone Circular Reto.

Aqui $D : 0 \leq x \leq H; 0 \leq y \leq Rx/H$, de modo que $dV = \pi (Rx/H)^2 dx$ e, assim, temos:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^H \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^H \left(\frac{R^2}{H^2} \right) x^2 dx = \boxed{\pi R^2 H/3}.$$

OBSERVAÇÃO 8.3.4 No caso em que a rotação se processa em torno do eixo Oy , como sugere a Figura 8.29, a região D deve ser descrita sob a forma:

$$D : c \leq y \leq d \quad e \quad 0 \leq x \leq g(y)$$

Figura 8.29: Rotação em torno do eixo Oy .

O volume elementar dV é aproximado por:

$$dV \simeq \pi [g(y)]^2 dy.$$

e o volume do corpo Ω é a "soma" dos volumes elementares dV e vem dado por:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_c^d dV = \int_c^d \pi [g(y)]^2 dy. \quad (8.18)$$

EXEMPLO 8.3.5 (O volume do Parabolóide) A Figura 8.30 ilustra o parabolóide Ω gerado pela rotação da região D em torno do eixo Oy .

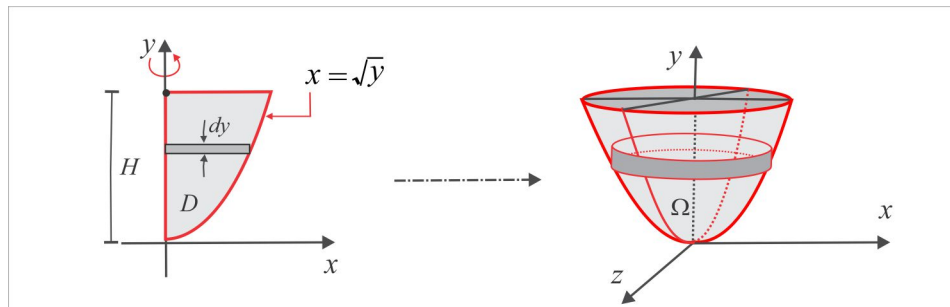


Figura 8.30: Parabolóide de Revolução.

Se D é a região do plano xy , descrita por $D : 0 \leq y \leq H$ e $0 \leq x \leq \sqrt{y}$, então o parabolóide Ω é descrito por:

$$\Omega : x^2 + z^2 \leq y \leq H$$

e tem volume dado por:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^H dV = \int_0^H \pi [\sqrt{y}]^2 dy = \boxed{\pi H^2/2}.$$

EXEMPLO 8.3.6 (Volume do Elipsoide de Revolução) A região D do plano xy , entre o eixo Oy e a curva:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x \geq 0,$$

gira em torno do eixo Oy , produzindo o elipsoide de revolução Ω ilustrado na Figura 8.31.

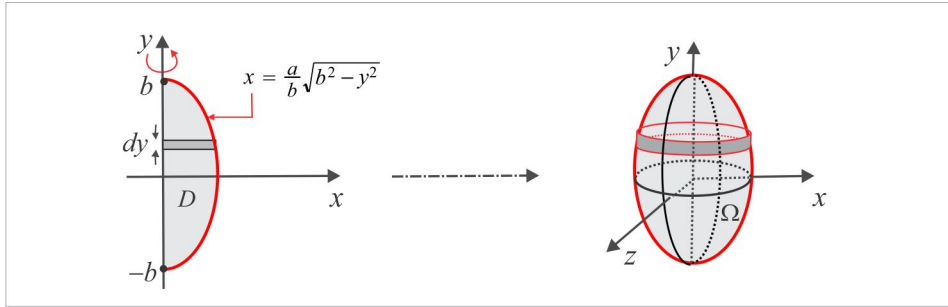


Figura 8.31: Elipsoide de Revolução.

A curva geratriz $x = g(y)$ e o volume elementar dV são dados por:

$$g(y) = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad \text{e} \quad dV = \pi \left[\frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) \right] dy$$

e de acordo com (8.18) o volume do corpo Ω é, portanto:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{-b}^b dV = \frac{\pi a^2}{b^2} \int_{-b}^b (b^2 - y^2) dy = \boxed{4\pi a^2 b/3}.$$

Rotação em torno de um Eixo Horizontal

Vamos, agora, considerar o caso em que a região D do plano xy gira em torno do eixo horizontal $L : y = p$, situado acima ou abaixo da região. A Figura 8.32 sugere o caso em que o eixo L está abaixo da região D , a qual é descrita por:

$$D : a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad f(x) \leq y \leq g(x), \quad (8.19)$$

sendo $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funções contínuas no intervalo $a \leq x \leq b$. É oportuno ressaltar que o processo se inicia medindo-se as distâncias dos gráficos das funções f e g ao eixo de rotação e, dessa

forma, o volume elementar dV aproxima-se de um cilindro vazado de raios R e r e altura dx , isto é:

$$dV \simeq \pi [R^2 - r^2] dx, \quad \text{com} \quad R = \text{dist}(A; C) \quad \text{e} \quad r = \text{dist}(B; C).$$

Em coordenadas, temos $A(x, g(x))$, $B(x, f(x))$ e $C(x, p)$, de modo que:

$$R^2 = [g(x) - p]^2, \quad r^2 = [f(x) - p]^2 \quad \text{e} \quad dV = \pi [(g(x) - p)^2 - (f(x) - p)^2] dx.$$

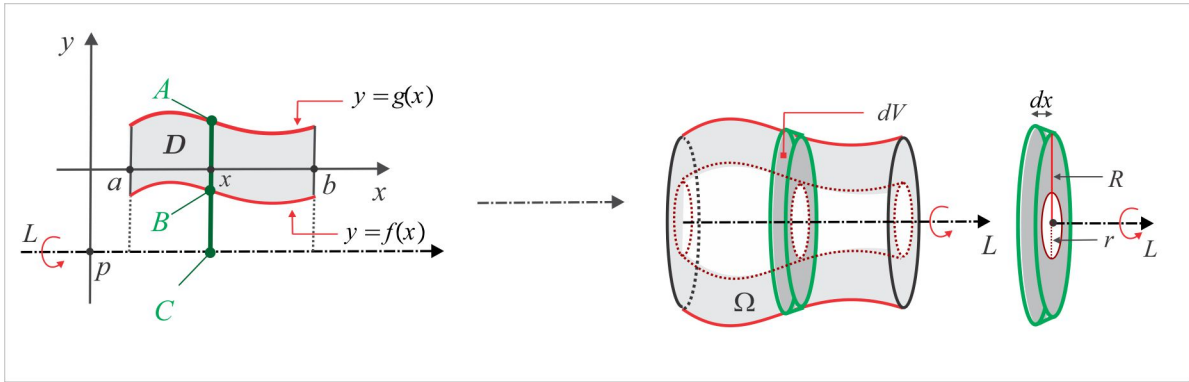


Figura 8.32: Rotação em torno de um eixo horizontal.

e, assim, o volume do corpo Ω é, dado por:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_a^b dV = \int_a^b \pi [(g(x) - p)^2 - (f(x) - p)^2] dx. \quad (8.20)$$

Rotação em torno de um Eixo Vertical

No caso em que o eixo de rotação é vertical, digamos $L : x = q$, situado à direita ou à esquerda da região, o processo é similar ao caso anterior, com uma ressalva: as funções que delimitam a área D devem ser postas na forma $x = g(y)$ e $x = f(y)$, isto é, D é descrita por:

$$D : c \leq y \leq d \quad \text{e} \quad f(y) \leq x \leq g(y), \quad (8.21)$$

sendo $f(y)$ e $g(y)$ funções contínuas no intervalo $c \leq y \leq d$. A Figura 8.33 ilustra a situação em que o eixo de rotação situa-se à direita da região, onde vemos o cilindro vazado dV de altura dy e raios $R = \text{dist}(A; C)$ e $r = \text{dist}(B; C)$. Neste caso, temos $dV \simeq \pi [R^2 - r^2] dy$, e considerando os pontos $A(f(y), y)$, $B(g(y), y)$ e $C(q, y)$, encontramos:

$$dV = \pi [(f(y) - q)^2 - (g(y) - q)^2] dy.$$

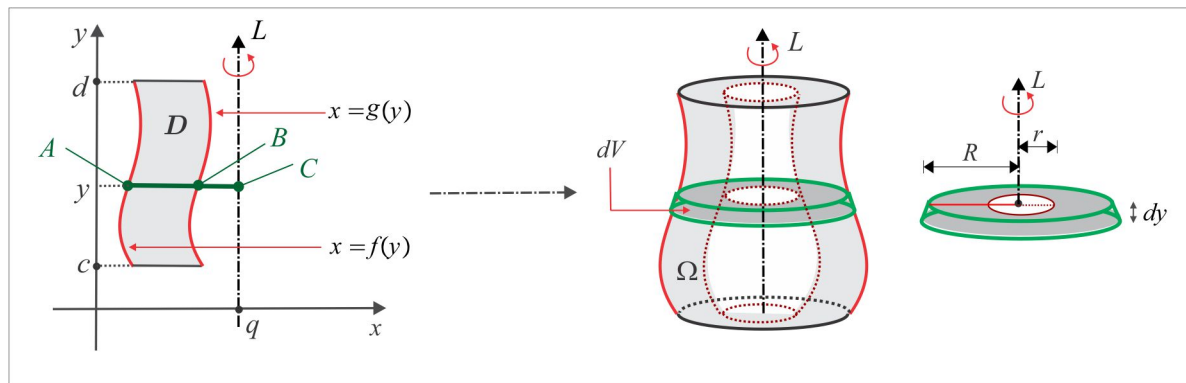


Figura 8.33: Rotação em torno de um eixo vertical.

O volume do corpo Ω , que é *Soma* dos volumes elementares dV , é calculado pela integral:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_c^d dV = \int_c^d \pi \left[(f(y) - q)^2 - (g(y) - q)^2 \right] dy. \quad (8.22)$$

EXEMPLO 8.3.7 A Figura 8.34 ilustra duas regiões D_1 e D_2 e desejamos calcular o volume do corpo Ω , sugerido nos seguintes casos:

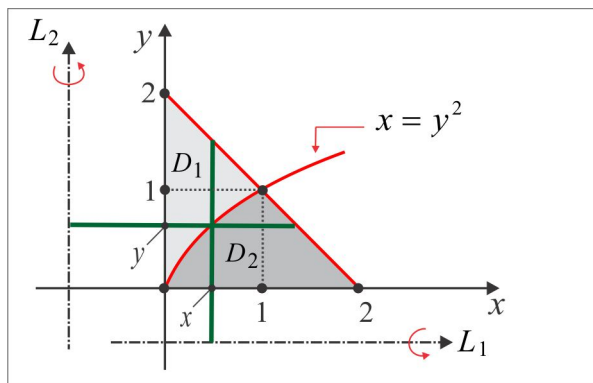


Figura 8.34: Ilustração gráfica do Exemplo 8.3.7.

- (i) Ω é gerado pela rotação da região D_1 , em torno do eixo $L_1 : y = -1/2$.
- (ii) Ω é gerado pela rotação da região D_2 , em torno do eixo $L_2 : x = -1$.
- (iii) Ω é gerado pela rotação da região D_2 , em torno do eixo $L_1 : y = -1/2$.

(iv) Ω é gerado pela rotação da região D_1 , em torno do eixo $L_2 : x = -1$.

SOLUÇÃO As regiões D_1 e D_2 são descritas por:

$$D_1 : 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x \quad \text{e} \quad D_2 : 0 \leq y \leq 1; y^2 \leq x \leq 2 - y$$

e assim, temos:

(i) $R^2 = (5/2 - x)^2$, $r^2 = (\sqrt{x} + 1/2)^2$ e $dV = \pi [R^2 - r^2] dx = \pi (x^2 - 4x - \sqrt{x} + 6) dx$. Logo:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 dV = \pi \int_0^1 (x^2 - 4x - \sqrt{x} + 6) dx = \boxed{11\pi/6}.$$

(ii) $R^2 = (3 - y)^2$, $r^2 = (y^2 + 1)^2$ e $dV = \pi [R^2 - r^2] dy = \pi (y^4 - y^2 - 6y + 8) dy$. Logo:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 dV = \pi \int_0^1 (y^4 - y^2 - 6y + 8) dy = \boxed{17\pi/10}.$$

(iii) Aqui é necessário dividir a região D_2 em subregiões R_1 e R_2 do tipo (8.19) e aplicar a cada uma delas a fórmula (8.20). Sejam então:

$$R_1 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{x} \quad \text{e} \quad R_2 : 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2 - x$$

e Ω_1 e Ω_2 os respectivos volumes gerados por R_1 e R_2 . Temos:

$$\text{vol}(\Omega_1) = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x} + 1/2)^2 - \frac{1}{4}] dx = 7\pi/6 \quad \text{e} \quad \text{vol}(\Omega_2) = \pi \int_1^2 [(5/2 - 1x)^2 - \frac{1}{4}] dx = 5\pi/6$$

e, portanto:

$$\text{vol}(\Omega) = \text{vol}(\Omega_1) + \text{vol}(\Omega_2) = \boxed{2\pi}.$$

(iv) A situação é semelhante ao caso anterior, com uma ressalva: as subregiões R_1 e R_2 devem descritas sob a forma (8.21). Temos:

$$R_1 : 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq y^2 \quad \text{e} \quad R_2 : 1 \leq y \leq 2; 0 \leq x \leq 2 - y$$

e usando (8.22), encontramos:

$$\text{vol}(\Omega_1) = \pi \int_0^1 [(y^2 + 1)^2 - 1^2] dy = 13\pi/15 \quad \text{e} \quad \text{vol}(\Omega_2) = \pi \int_1^2 [(2 - y + 1)^2 - 1^2] dy = 4\pi/3.$$

Logo:

$$\text{vol}(\Omega) = \text{vol}(\Omega_1) + \text{vol}(\Omega_2) = \boxed{11\pi/5}.$$

8.3.2 Volume de Revolução - Método das Cascas Cilíndricas

Ao contrário do que ocorre no Método das Fatias, em que a fatia dA é perpendicular ao eixo de rotação, agora a fatia dA é paralela ao eixo. Primeiro, suponhamos que o sólido Ω seja gerado pela rotação da região *vertical simples* D em torno do eixo (reta vertical), distante p unidades do eixo Oy , como ilustra a Figura 8.35.

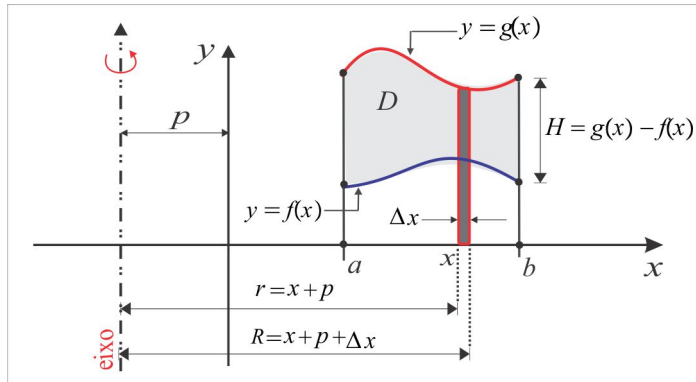


Figura 8.35: Volume por Cascas Cilíndricas.

O *volume infinitesimal* dV é aproximado por $dV \simeq \pi [R^2 - r^2] \cdot H$, onde $R = x + p + \Delta x$ e $r = x + p$, e assim temos:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \pi [(x + p + \Delta x)^2 - (x + p)^2] [g(x) - f(x)] \\ &= 2\pi (x + p) (\Delta x) [g(x) - f(x)] + (\Delta x)^2 [g(x) - f(x)] \end{aligned}$$

de onde resulta:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = 2\pi (x + p) [g(x) - f(x)] + (\Delta x) [g(x) - f(x)]. \quad (8.23)$$

Fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ em (8.23) encontramos $V'(x) = 2\pi (x + p) f(x)$ e daí segue o volume elementar:

$$dV = 2\pi (x + p) [g(x) - f(x)] dx.$$

O volume de Ω é a *Soma* desses volumes infinitesimais, isto é:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_a^b 2\pi (x + p) [g(x) - f(x)] dx. \quad (8.24)$$

EXEMPLO 8.3.8 Deixe-nos reconsiderar a situação (iv) do Exemplo 8.3.7 e calcular o volume do corpo Ω pelo Método das Cascas Cilíndricas. Neste caso, temos:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 2\pi(x+1)[2-x-\sqrt{x}]dx = 2\pi \int_0^1 (2+x-\sqrt{x}-x^2-x^{3/2})dx = \boxed{11\pi/5}.$$

Outra situação ocorre pela rotação da região horizontal simples $D : c \leq y \leq d; f(y) \leq x \leq g(y)$ em torno de um eixo horizontal, distante q unidades do eixo Ox , como ilustrado na Figura 8.36.

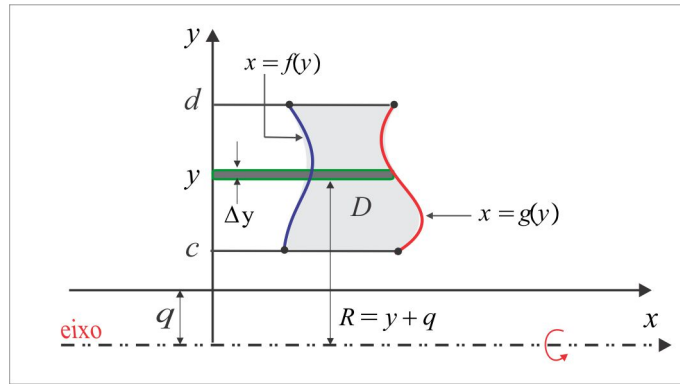


Figura 8.36: Volume por Cascas Cilíndricas.

Para esta situação, o volume elementar dV vem dado por:

$$dV = 2\pi(y+q)[g(y)-f(y)]dy$$

e o volume do corpo Ω é calculado pela fórmula:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_c^d 2\pi(y+q)[g(y)-f(y)]dy. \quad (8.25)$$

EXEMPLO 8.3.9 Com relação ao Exemplo 8.3.7, o volume do corpo Ω na situação (iii) pode ser calculado pelo Método das Cascas Cilíndricas. De fato, neste caso o volume elementar é:

$$dV = 2\pi(y+1/2)(2-y-y^2)dy = 2\pi(1+3y/2-3y^2/2-y^3)dy$$

e um cálculo direto nos dá:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_0^1 dV = \int_0^1 (1+3y/2-3y^2/2-y^3)dy = \boxed{2\pi}.$$

EXEMPLO 8.3.10 (Usando uma Rotação de Eixos) Calcular o volume do corpo Ω obtido por rotação, em torno da reta $y=x$, da região triangular D de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$ e $B(1,1)$.

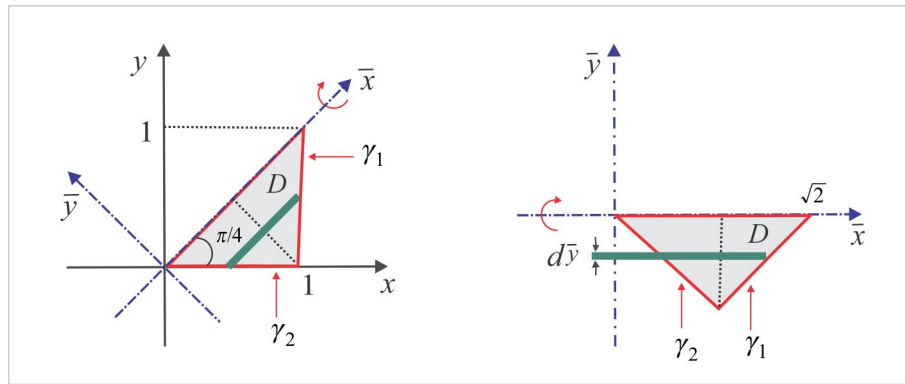


Figura 8.37: Usando uma rotação.

SOLUÇÃO A Figura 8.37 ilustra a situação gráfica antes e após a rotação.

No sistema $\bar{x}O\bar{y}$ a região D , situada no 4º quadrante, é delimitada pelo eixo \bar{x} e pelas retas:

$$\gamma_1 : \bar{x} = \bar{y} + \sqrt{2}/2 \quad \text{e} \quad \gamma_2 : \bar{x} = -\bar{y}$$

e usando (8.25), com $q = 0$, $g(\bar{y}) = \bar{y} + \sqrt{2}/2$ e $f(\bar{y}) = -\bar{y}$, encontramos:

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{-\sqrt{2}/2}^0 2\pi\bar{y}[g(\bar{y}) - f(\bar{y})]d\bar{y} = 2\pi \int_{-\sqrt{2}/2}^0 \bar{y}(2\bar{y} + \sqrt{2}/2)d\bar{y} = \boxed{\pi\sqrt{2}/6}.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.3

([click aqui](#) e veja a lista completa)

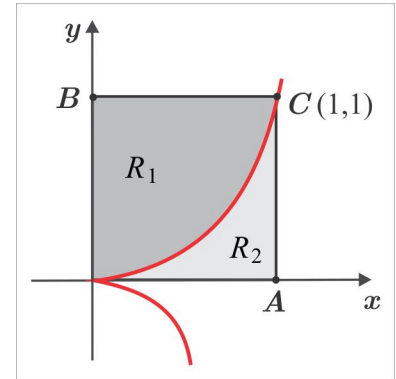
- Identifique o eixo e a geratriz da superfície de revolução, cuja equação cartesiana é:
 - $z = x^2 + y^2$
 - $x = y^2 + z^2$
 - $y^2 = x^2 + z^2$
 - $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
 - $x^2 + y^2 = 1$
 - $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$.
- Em cada caso abaixo, esboce a região D delimitada pelas curvas sugeridas e em seguida calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região D em torno do eixo indicado.
 - $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^2$, $x \geq 0$; eixo y
 - $y = x^2 - 4x$, $y = 0$; eixo x
 - $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; eixo $x = 4$
 - $x^2 + y^2 = 1$; eixo $x = 2$
 - $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; eixo $y = 2$
 - $y = x$, $y = 0$, $x = 2$; eixo y
 - $y = x^2$, $y = 4 - x^2$; eixo x
 - $xy = 1$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 2$; eixo x .
- Uma região D do plano xy é delimitada pelo triângulo de vértices $(0, 0)$, $(h, 0)$ e (h, r) , sendo h e r números positivos. Calcule o volume do sólido resultante da rotação da região D em torno do eixo x (resp. $\pi r^2 h/3$). E se a rotação fosse em torno do eixo y ? (resp.: $2\pi r h^2/3$)

4. Qual o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região do plano xy delimitada pela parábola $y = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $y = 2x - 1$ e $y = x + 2$? (resp.: $13\pi/6$)

5. Considere a curva de equação $y^2 = x^3$ e as regiões R_1 e R_2 , ilustradas na figura.

Determine o volume do sólido em cada situação a seguir:

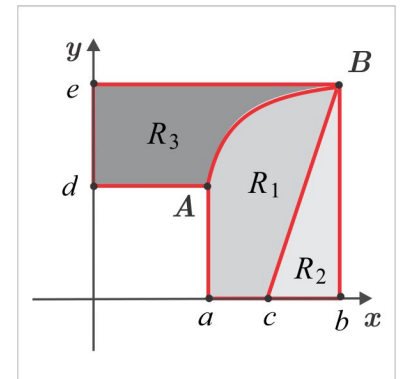
- (a) R_2 gira em torno do eixo x ;
 (b) R_1 gira em torno do eixo y ;
 (c) R_2 gira em torno do eixo BC ;
 (d) R_1 gira em torno do eixo AC .



6. O arco AB ilustrado na figura é o gráfico de certa função $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Identifique o sólido de revolução cujo volume é:

- (a) $\int_a^b \pi f(x)^2 dx$ (b) $\int_c^d \pi f^{-1}(y)^2 dy$
 (c) $\int_d^e 2\pi y f^{-1}(y) dx$ (d) $\int_a^b \pi f(x)^2 dx - \pi e^2(b-c)/3$
 (e) $\int_a^b 2\pi f(x) dx$ (f) $\pi(be^2 - ad^2) - \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.



7. É feito um orifício de raio $2\sqrt{3}$ pelo centro de um sólido esférico de raio $R = 4$. Calcule o volume da porção retirada do sólido. (resp.: $224\pi/3$)
8. Calcule o volume de um tronco de cone circular reto de altura h , raio da base inferior R e raio da base superior r .
9. Calcule o volume de uma calota determinada em uma esfera de raio r por um plano cuja distância ao centro da esfera é h , $h < r$. (resp.: $2\pi R^3/3 + \pi h^3/3 - \pi r^2 h$)
10. Calcule pelos dois métodos (Fatiamento e Cascas Cilíndricas) o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo y da região delimitada pela curva $y = 2x - x^2$ e o eixo x .

11. Ao girar em torno do eixo y uma certa região do plano xy , obteve-se a seguinte expressão para o volume do sólido resultante:

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} (x \cos x - x \sin x) dx.$$

Identifique a região e calcule o volume V .

12. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da região delimitada pelas retas $y = 0$, $x = 2$ e $x = 2y$, em torno da reta $y = x$ (Hint: use uma rotação de eixos).
13. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y do disco delimitado pela circunferência $(x - a)^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$.

8.4 Área de uma Superfície de Revolução

Antes de deduzir uma fórmula para a área de uma superfície de revolução, vamos calcular de maneira simples as áreas de duas superfícies bastante familiar: o cilindro e o cone circular reto. Para o cilindro de raio R e altura H , quando cortado e aberto, sua área lateral é calculada como se ele fosse um retângulo de altura H e base $2\pi R$, como sugere a Figura 8.38.

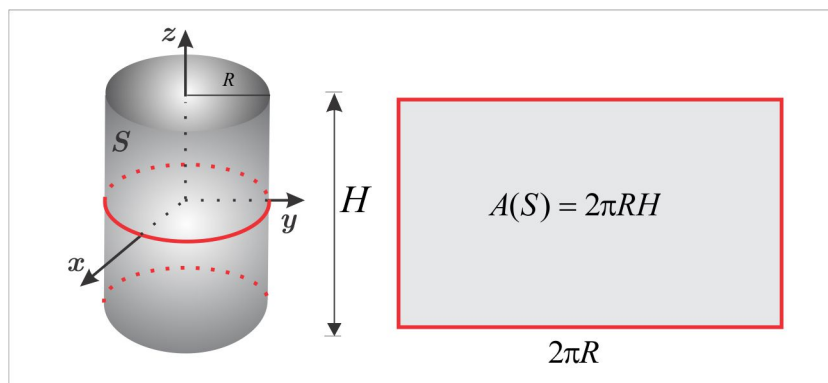


Figura 8.38: Área do Cilindro Circular Reto.

Para o cone o procedimento é análogo. Aqui usaremos a fórmula básica da área do setor circular: $A(D) = \frac{1}{2}Rs$, sendo R o raio e s o comprimento do arco. Um cone circular reto de altura H , geratriz de comprimento g e raio da base R , após cortado e aberto, se identifica com o setor circular de raio g e comprimento do arco $s = 2\pi R$, como ilustra a Figura 8.39(c).

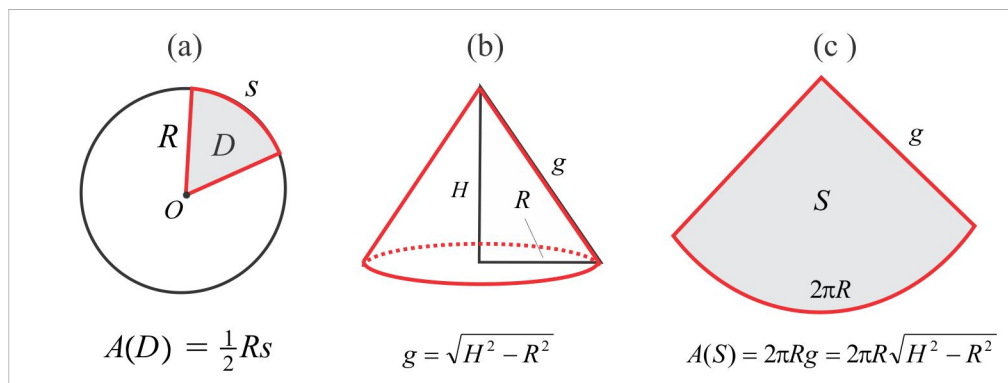
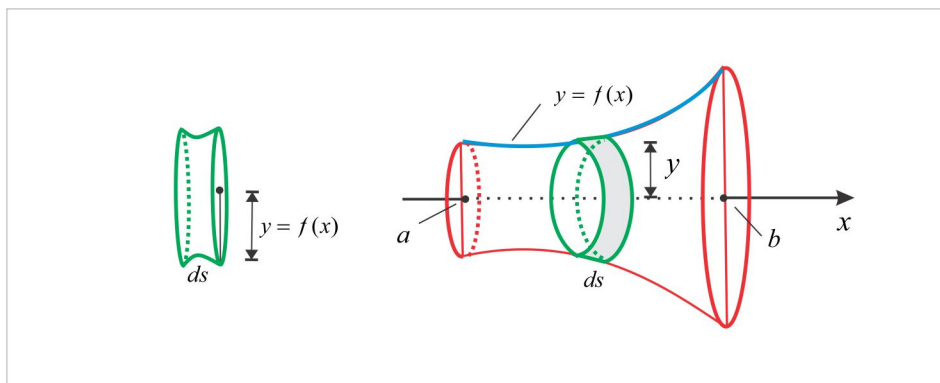


Figura 8.39: Área do Cone Circular Reto.

Em uma situação geral, suponhamos que S seja obtida por rotação, em torno do eixo Ox , do gráfico de uma *função suave* $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Por *função suave* entendemos um função f que é contínua e tem primeira derivada contínua no intervalo $[a, b]$. A área infinitesimal dS é aproximada pela área do cilindro de raio $f(x)$ e altura ds , sendo ds o comprimento do arco sobre o gráfico de f , como sugere a Figura 8.40.

Figura 8.40: Área da Superfície S .

Temos que $dS = 2\pi f(x) ds$ e, como vimos em (8.1) o comprimento elementar é $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, e por integração encontramos a seguinte fórmula para o cálculo da área de S :

$$A(S) = \int_a^b 2\pi f(x) ds = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad (8.26)$$

EXEMPLO 8.4.1 Como ilustração, vamos calcular a área de uma esfera de raio R . A esfera é obtida por rotação, em torno do eixo Ox , do arco de circunferência

$$\gamma : y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R,$$

e considerando em (8.26) : $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ e $\sqrt{1 + f'(x)^2} = R(R^2 - x^2)^{-1/2}$, encontramos:

$$A(S) = \int_{-R}^R 2\pi R dx = 4\pi R^2.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.4

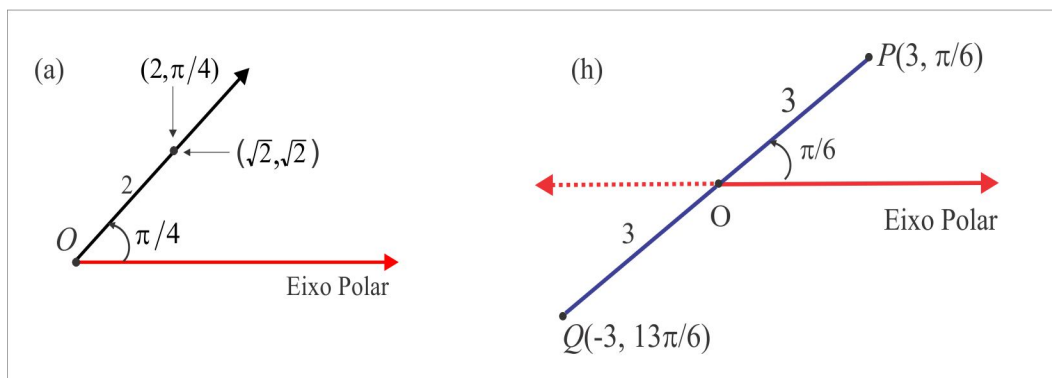
([click aqui](#) e veja a lista completa)

- Em cada caso, calcule a área da superfície S .
 - S é gerada pela rotação da curva $y = \sqrt{x}$, $1 \leq x \leq 4$, em torno do eixo x .
 - S é gerada pela rotação do segmento de reta $y = 3x + 2$, $0 \leq x \leq 3$, em torno do eixo x .
 - S é gerada pela rotação da curva $8x = y^4 + 2/y^2$, $1 \leq y \leq 2$, em torno do eixo y .
 - S é o parabolóide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 4$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 8.2

- Como ilustração, veja os itens (a) e (h).



- (a) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (b) $(0, -2)$ (c) $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ (d) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ (e) $(-\sqrt{3}, 1)$ (f) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

(g) $(\sqrt{3}, 2)$ (h) $(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3}{2})$.

2. (a) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \pi/4)$ (b) $(2, 0)$ (c) $(1, 3\pi/4)$ (d) $(6, \pi/3)$ (e) $(\sqrt{2}, 5\pi/4)$ (f) $(2, \pi/3)$

(g) $(2\sqrt{3}, \pi/3)$ (h) $(4, -\pi/2)$.

3. (a) $r^2 \sin 2\theta = 4$ (b) $r =$

4. (a) $\sqrt{x^2 + y^2} - 2xy = 2$ (b) $F(x, y) =$

5. Os pontos de interseção são apresentados em coordenadas polares. Localize-os no plano xy .

(a) $A(2, \pm\pi/3)$ (b) $A_1(1/2, 2\pi/3)$ e $A_2(1/2, 4\pi/3)$ (c) $A_1(0, \pi/2)$, $A_2(0, 3\pi/2)$ e $A_3(2, \pi/4)$.

(d) $A_1(1 + \sqrt{2}/2, \pi/4)$, $A_2(1 - \sqrt{2}/2, 3\pi/4)$, $A_3(1 - \sqrt{2}/2, 5\pi/4)$ e $A_4(1 + \sqrt{2}/2, 7\pi/4)$.

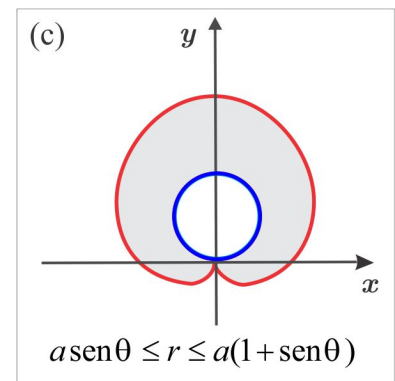
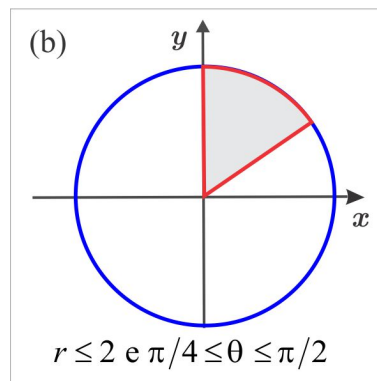
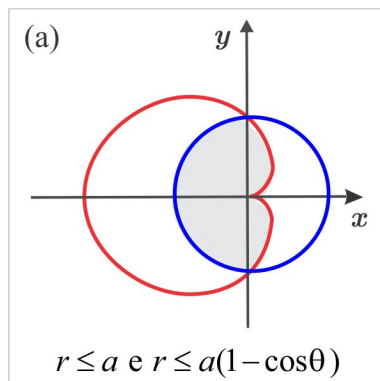
6. (a) $3\pi/2$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $2\sqrt{2} - 2$ (d) $\frac{\pi}{24}\sqrt{4 + \pi^2} + \frac{1}{6}\ln(\sqrt{1 + \pi^2/4} + \pi/4)$ (e) 2π (f) $3\sqrt{2}$

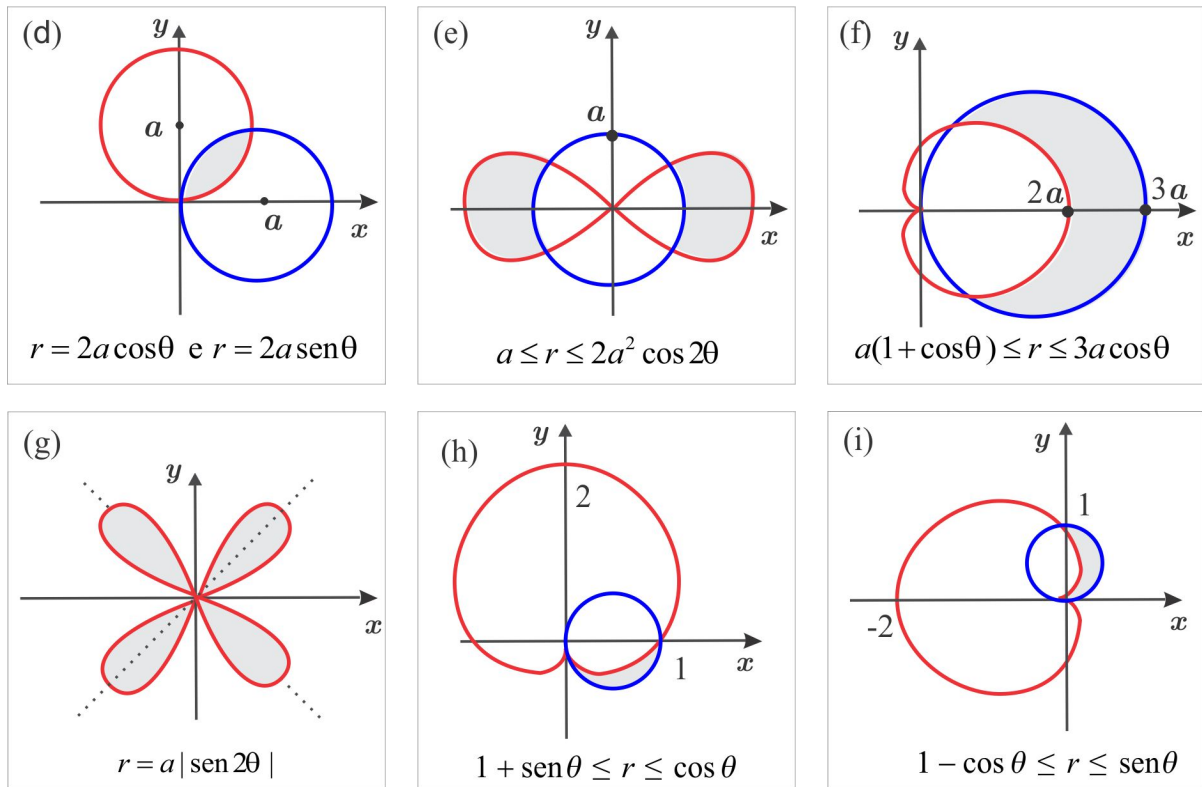
(g) $\frac{a}{24}(16 + \pi^2)^{3/2} - 8a/3$ (h) $\frac{a}{8}(2\pi - 3\sqrt{3})$ (i) $\sqrt{2}\pi/2$.

7. Veja a ilustração gráfica no final do capítulo.

(a) a^2 (b) $9\pi a^2/2$ (c) πa^2 (d) $3\pi a^2/2$ (e) π (f) $2\pi a^2$.

8. Gráficos.





ESCREVENDO PARA APRENDER 8.3

1. Em geral, a geratriz é determinada pela interseção da superfície com um plano coordenado.

(a) geratriz: $y = \sqrt{z}$; eixo z . (PARABOLOIDE)

(b) geratriz: $y = \sqrt{x}$; eixo x . (PARABOLOIDE)

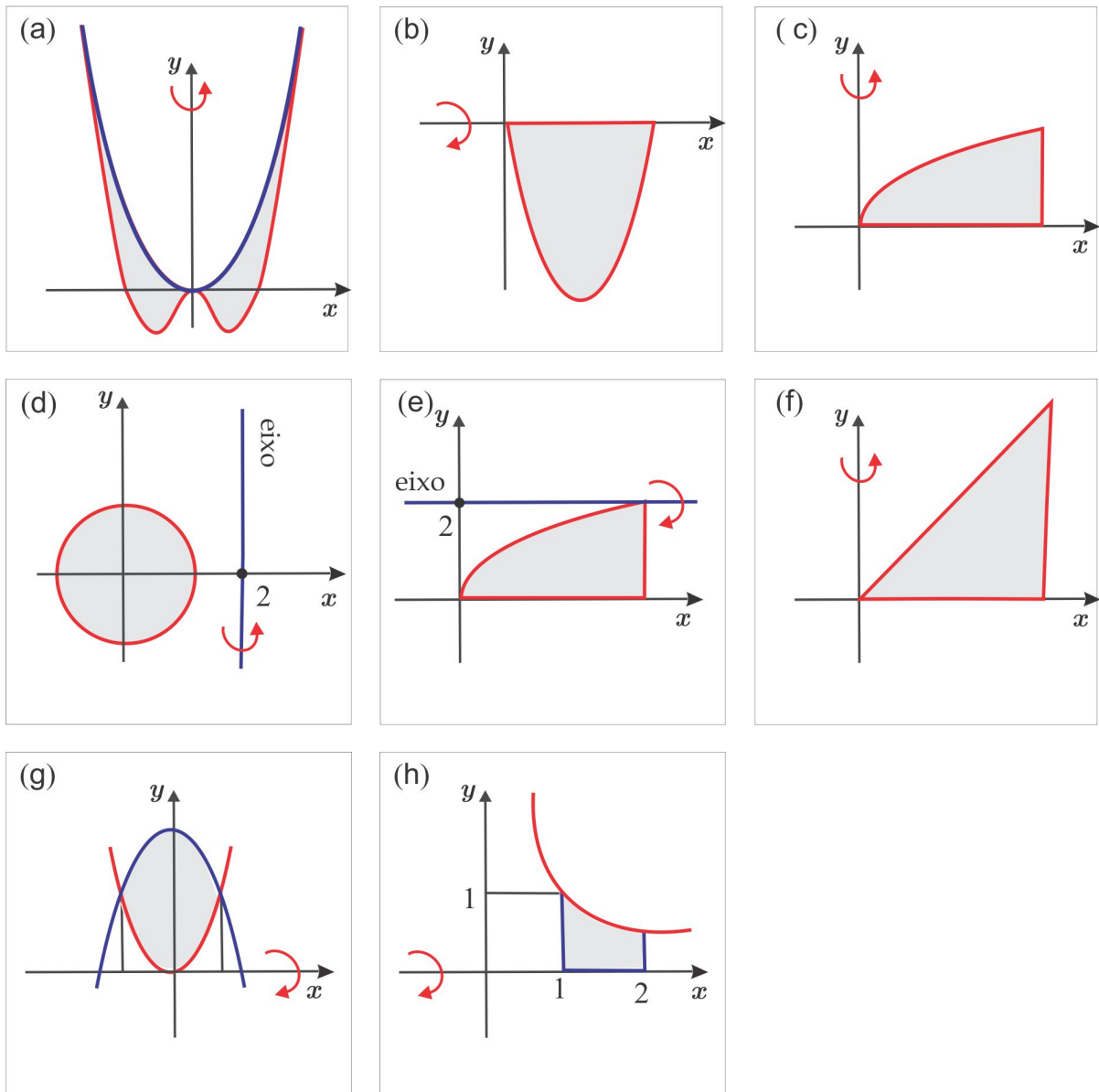
(c) geratriz: $y = x$; eixo y . (CONE)

(d) geratriz: $x^2 + y^2 = a^2$; eixo x . (ESFERA)

(e) geratriz: $x = 1$; eixo y . (CILINDRO)

(f) geratriz: $9y^2 - z^2 + 36$; eixo z . (HIPERBOLOIDE)

2. Em cada figura abaixo apresenta-se o gráfico da região que irá produzir o sólido.



(a) $V = 32\pi/3$ (b) $V = 512\pi/15$ (c) $V = 256\pi/15$ (d) $V = 4\pi^2$

(e) $V = 40\pi/3$ (f) $V = 16\pi/3$ (g) $V = (30.1)\pi/2$ (h) $V = \pi/2$.

3. $\text{vol}(\Omega) = \pi r^2 h/3$. Se a rotação fosse em torno do eixo Oy , o volume do corpo seria $2\pi r h^2/3$.

4. $\text{vol}(\Omega) = 13\pi/6$.

5. (a) $\pi/4$ (b) $3\pi/7$ (c) $11\pi/20$ (d) $27\pi/35$.

6. O corpo Ω é gerado pela rotação da região D em torno do eixo indicado.

(a) $D = R_1 \cup R_2$; eixo Ox .

(b) $D = R_3$; eixo Oy .

(c) $D = R_3$; eixo Ox .

(d) $D = R_1$; eixo Ox .

(e) $D = R_1 \cup R_2$; eixo Ox .

(f) $D = R_3$; eixo Ox .

7. $\text{vol}(\Omega) = 224\pi/3$.

8. $\text{vol}(\Omega) = \pi h/3 (R^2 + r^2 + rR)$.

9. $\text{vol}(\Omega) = 2\pi h R^3/3 + \pi h^3/3 - \pi r^2 h$.

10. Usando fatias, encontramos:

$$\text{vol}(\Omega) = \pi \int_0^2 (-x^2 + 2x)^2 dx = 16\pi/15.$$

Por outro lado, usando cascas cilíndricas, obtemos:

$$\text{vol}(\Omega) = 2\pi \int_0^1 2y\sqrt{1-y} dy = 4\pi \int_0^1 (1-t)\sqrt{t} dt = 16\pi/15.$$

11. A região D é delimitada pelo eixo Oy e pelos gráficos de $y = \cos x$ e $y = \sin x$, entre $x = 0$ e $x = \pi/4$. O volume do corpo Ω é:

$$\text{vol}(\Omega) = \frac{1}{2} (\pi^2 \sqrt{2} - 4\pi).$$

12. $\text{vol}(\Omega) = \frac{43\pi\sqrt{2}}{27}$.

13. O sólido Ω tem o formato de uma *rosquinha* e seu nome é *Toro de Revolução*. Temos:

$$\text{vol}(\Omega) = ab^2\pi^2 + \frac{4\pi b^3}{3}.$$

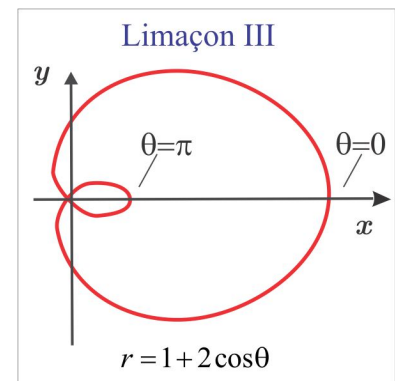
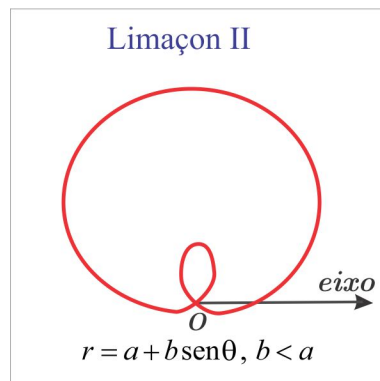
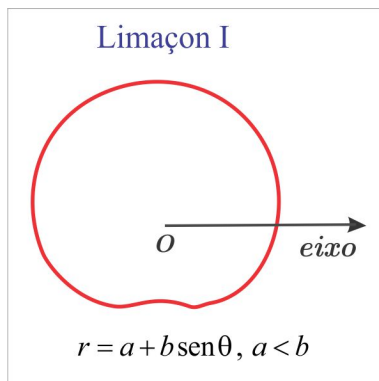
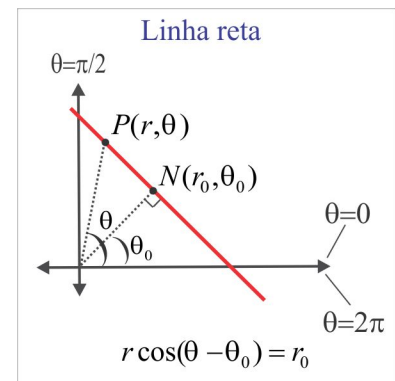
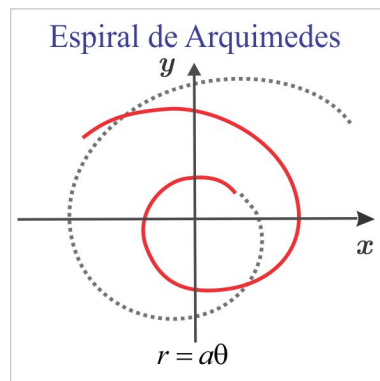
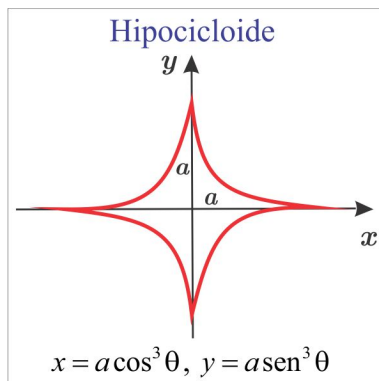
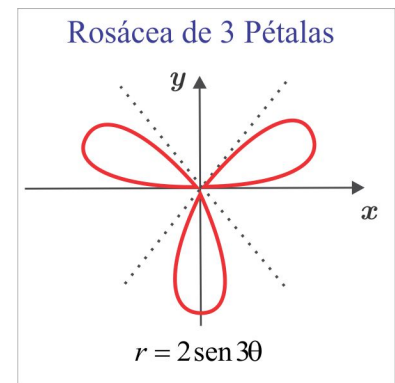
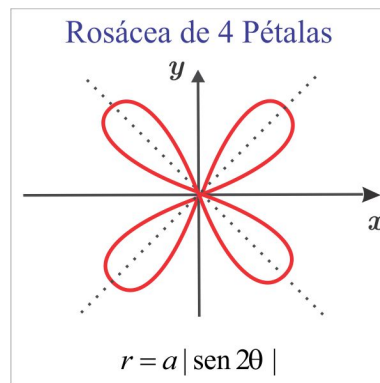
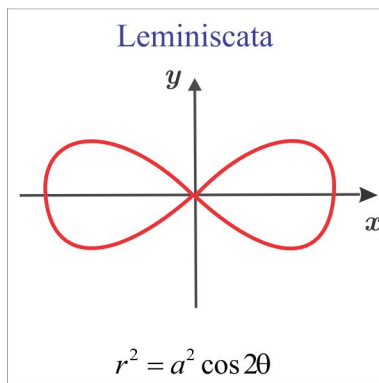
ESCREVENDO PARA APRENDER 8.4

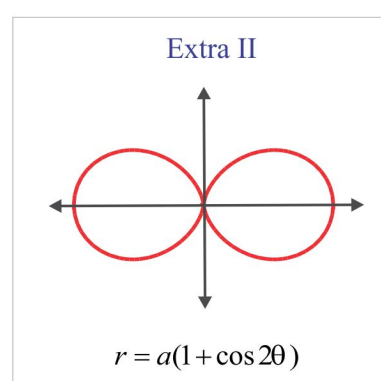
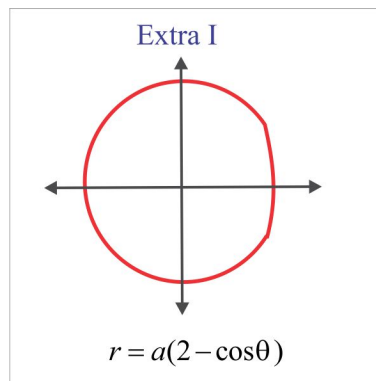
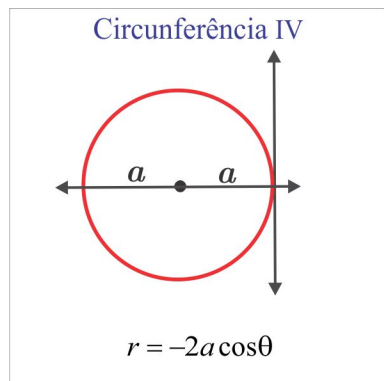
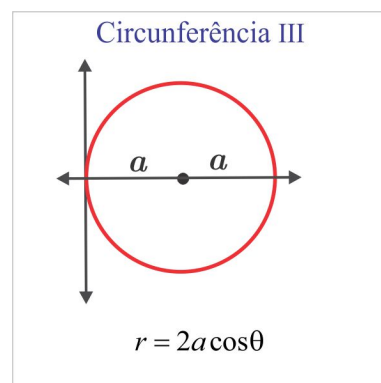
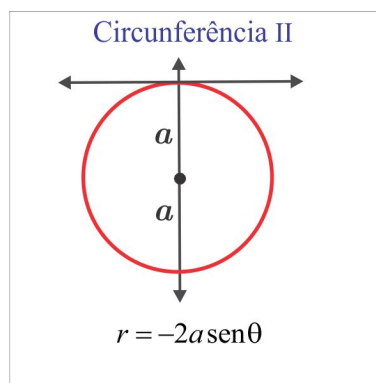
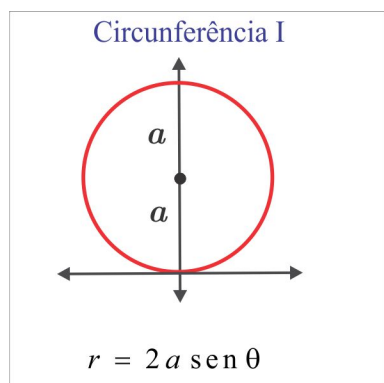
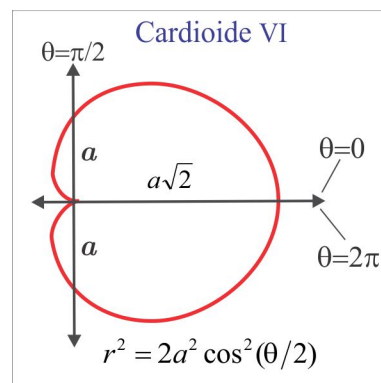
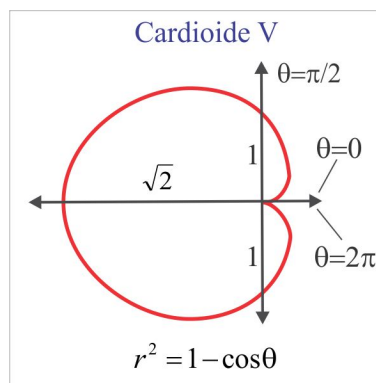
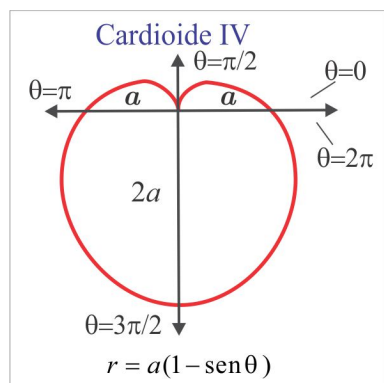
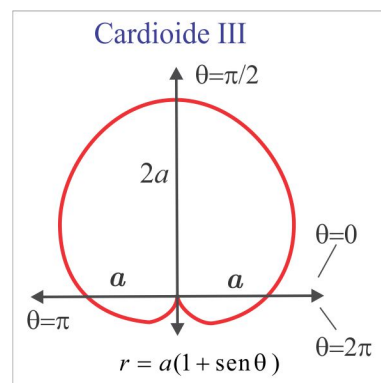
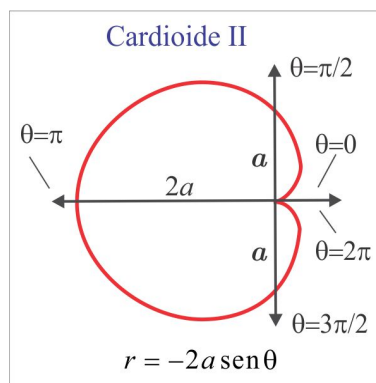
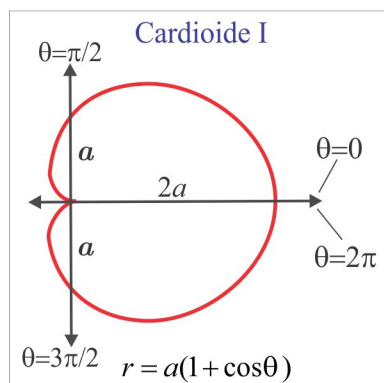
1. (a) $A(S) = \frac{4\pi}{3} \{ (17/4)^{3/2} - (5/4)^{3/2} \} \simeq 36.18$ (b) $A(S) = 39\pi\sqrt{10}$ (c) $A(S) = 1179\pi/256$.

(d) $A(S) = \frac{4\pi}{3} \{(17/4)^{3/2} - 1/3\} \simeq 36.18.$

■ ALGUMAS CURVAS ESPECIAIS EM COORDENADAS POLARES

As curvas em coordenadas polares que aparecem com mais frequência são apresentadas abaixo, com as respectivas equações. Acompanhe a figura com os valores de $\theta : 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi, 3\pi/2$, e 2π .





"A mathematician is one to whom $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$
is as obvious as that twice two makes four is to you.

Liouville was a mathematician."

Lord Kelvin
