3.1. ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE

1. Calcule a área de uma esfera de raio R. [resp.: $4\pi R^2$]

2. Deduza a fórmula para a área de um cilindro circular reto de raio R e altura H. [resp. $2\pi RH$]

3. Repita o exercício precedente com um cone circular reto. [resp. $\pi R\sqrt{R^2+H^2}$]

4. Calclule a área do paraboloide $S : x^2+y^2 = z,\ z \leq 4$. [resp.: $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$]

5. Calcule a área da porção do plano $3x+2y+z = 7$ no primeiro octante. [resp. $49\sqrt{14}/12$]

6. Em cada caso, calcule a área da superfície S.

   (a) S é a parte do plano $x+y+z = a,\ a > 0$, interna ao cilindro $x^2+y^2 = a^2$. [resp. $\pi a^2\sqrt{3}$]

   (b) S corresponde à parte do parabolóide $x^2+y^2+z = a^2$, $a > 3$, delimitada pelo cilindro vazado $1 \leq x^2+y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0$. [resp. $\frac{\pi}{24}(37\sqrt{37}-5\sqrt{5})$]

   (c) S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$, interna ao cilindro $x^2+y^2 = y$. [resp. $2\pi - 4$]

   (d) S é a parte do cilindro $x^2+z^2 = a^2$, $a > 0$, delimitada por $y^2 = a\,(x+a)$. [resp. $8a^2\sqrt{2}$]

   (e) S é a parte do cone $z^2 = x^2+y^2$, $z \geq 0$, interna ao cilindro $x^2+y^2 = 2ax$. [resp. $\pi a^2\sqrt{2}$]

   (f) S é a parte do parabolóide $x^2+z^2 = 2y$, abaixo do plano $y = 1$. [resp. $2\pi(\sqrt{3}-\frac{1}{3})$]

   (g) S é o corte do hemisfério $x^2+y^2+z^2 = 2,\ z \geq 0$, pelo cilindro $x^2+y^2 = 1$. [resp.: $2\pi(2-\sqrt{2})$]

7. Calcule a área daquela porção do cilindro $S : y^2+z^2 = 16$, que jaz acima da região triangular $D : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2-x$. [resp. $8\sqrt{3}+4\pi/3-16$]

3.2. CALCULANDO INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

1. Em cada caso, calcule a integral de superfície $\displaystyle\iint_S f\,(P)\,dS$.

(a) $f(P) = x\,;\quad S : x^2 + y^2 = R^2,\ \ -1 \le z \le 1.$ [resp. 0]

(b) $f(P) = x^2;\quad S : x^2 + y^2 = z^2,\ \ 1 \le z \le 2.$ [resp. $15\pi\sqrt{2}/4$]

(c) $f(P) = xy;\quad S : x^2 + y^2 = 2z,\quad 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1.$ [resp. $(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)/15$]

(d) $f(P) = xzy^{-1};$ S é a porção do cilindro $x = y^2$, situada no primeiro octante, entre os planos $z = 0$, $z = 5$, $y = 1$ e $y = 4$. [resp. $\frac{125}{24}(13\sqrt{65} - \sqrt{5})$]

(e) $f(P) = x + y;$ S é a parte do plano $2x + 3y + z = 6$, no primeiro octante. [resp. $5\sqrt{14}$]

(f) $f(P) = x^2 + y^2 + z^2;\quad S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$ [resp. $4\pi R^4$]

(g) $f(P) = x^2;$ S é a parte do plano $z = x$, interna ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. $\pi\sqrt{2}/4$]

(h) $f(P) = x;$ S é a porção do plano $x + y + z = 1$, no primeiro octante. [resp. $\sqrt{3}/6$]

(i) $f(P) = x;$ S é a fronteira da região delimitada pelo cilindro $x^2+y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + 2$. [resp. π]

2. Calcule $\displaystyle\iint_S z\sqrt{x^2 + y^2}\ dS$, sendo S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 2$. [resp. $2\pi(16\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$]

3. Repita o Exercício 2, considerando S a parte do cilindro $x^2+y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $z = x + 3$. [resp. 44π]

4. Se $\mathbf{N}_S$ é a normal exterior à superfície S, calcule $\displaystyle\iint_S (\mathbf{F} \bullet \mathbf{N}_S)dS$, para os seguintes dados:

(a) $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ \ x \ge 0$ e $\mathbf{F} = y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$ [resp. $4\pi R^3/3$]

(b) S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, que jaz no primeiro octante, entre os planos $z = 0$ e $z = a$, e $\mathbf{F} = (\operatorname{sen} z)\,\mathbf{i} + (xy)\,\mathbf{j} - (\cos z)\,\mathbf{k}.$ [resp. $(1 - \cos a)R + aR^3/3$]

5. Seja $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ a *bola* do $\mathbb{R}^3$ de centro na origem e raio a. Se S é a fronteira de Ω, orientada pela normal exterior $\mathbf{N}_S$, e $\mathbf{F} = x^2\ \mathbf{i} + y^2\ \mathbf{j} + z^2\ \mathbf{k}$, calcule as integrais:

(a) $\displaystyle I = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_S)\ dS$ e **(b)** $\displaystyle J = \iiint_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{F})\ dV.$ [resp. $I = J = 0$]

3.3. FÓRMULAS DE GAUSS & STOKES. APLICAÇÕES

1. Com auxílio da Fórmula de Stokes, calcule $\displaystyle\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, sendo γ o bordo da superfície S.

(a) $\mathbf{F} = y^2\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$; S é a superfície $x + y + z = 1, \quad x, y, z \geq 0$. [resp. -1]

(b) $\mathbf{F} = 3y\,\mathbf{i} - xz\,\mathbf{j} + yz^2\,\mathbf{k}$; S é o parabolóide $2z = x^2 + y^2,\ 0 \leq z \leq 2$. [resp. 20π]

(c) $\mathbf{F} = 2y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$; S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$, interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -2π]

(d) $\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$; S é o hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. [resp. π]

(e) $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$; S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$. [resp. 0]

2. Em cada caso, use a Fórmula de Stokes e calcule $\int_\gamma P dx + Q dy + R dz$.

(a) $\int_\gamma y dx + z dy + x dz\,;\quad \gamma : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ \ x + y + z = 0.$ [resp. $-\sqrt{3}\pi R^2$]

(b) $\int_\gamma (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (x + y)\,dz\,;\ \ \gamma : x^2 + y^2 = 2y,\ \ y = z.$ [resp. 0]

(c) $\int_\gamma \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz\,;$ γ é a curva interseção da fronteira do cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, com plano $x + y + z = 3a/2$. [resp. $-9a^3/2$]

(d) $\int_\gamma x^3 dz\,;$ γ é o bordo da superfície $S : z = y + 4;\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. [resp. $45\pi/4$]

3. Seja S a superfície dada sob a forma parametrizada por:

$$S : \mathbf{r}\,(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \left(1 - u^2\right)\mathbf{k}, \quad u \geq 0,\ v \geq 0,\ u + v \leq 1.$$

Se γ é o bordo de S, calcule $\int_\gamma y dx - x^2 dy + 5 dz\,.$ [resp. $-5/6$]

4. Calcule o fluxo do campo $\mathbf{F}$ através da superfície S, na direção da normal exterior $\mathbf{N}_S$. Se possível, use a Fórmula da Divergência de Gauss para comprovar o resultado.

(a) $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; S é a superfície do sólido limitado pelo hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$. [resp. $2\pi a^3$]

(b) $\mathbf{F} = 2\,\mathbf{i} + 5\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$; S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, interna a $x^2 + y^2 = 1$. [resp. -3π]

(c) $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j}$; S é a parte do primeiro octante, limitada pelos três planos coordenados e pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. [resp. 0]

(d) $\mathbf{F} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; S é a fronteira do sólido, no primeiro octante, limitado pelos planos $x = 1,\ \ y = 2$, e $3x + 2y + z = 12$. [resp. 51]

5. Seja S a superfície descrita por:

$$\mathbf{r}\,(u,v) = u\;\mathbf{i} + v\;\mathbf{j} + \left(2 - u^2 - v^2\right)\mathbf{k}, \quad u^2 + v^2 \leq 1,$$

e considere o campo $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + (x+y)\;\mathbf{k}$. Calcule o fluxo de $\text{rot}(\mathbf{F})$ através de S de duas maneiras: primeiro, por um cálculo direto e, depois, usando a Fórmula de Stokes. [resp. $-\pi$]

6. Seja S uma esfera que não passa pela origem. Se $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ é o vetor posição do ponto $P\,(x,y,z)$, mostre que o fluxo do campo $\mathbf{F} = \|\mathbf{r}\|^{-3} \bullet \mathbf{r}$ através de S é igual a zero, se S envolve a origem. Qual o valor do fluxo, caso a esfera S envolva a origem? [resp. 4π]

7. Certa curva regular γ no plano xz, de equação $z = f\,(x)\,,\ \ a \leq x \leq b$, gira em torno do eixo z descrevendo uma superfície S. Deduza a *Fórmula de Pappus*: $A\,(S) = 2\pi L h$, onde L é o comprimento da curva γ e h é a distância do centróide de γ ao eixo z. Qual a área do cone obtido por rotação da reta $y = 3x + 2,\ \ 0 \leq x \leq 3,\ z = 0$, em torno do eixo x? [resp. $39\pi\sqrt{10}$]

8. Admita a lâmina S homogênea $(\sigma \equiv 1)$ e calcule o momento de inércia em torno do eixo indicado.

   (a) S é a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, que jaz entre as folhas do cone $x^2 + y^2 = z^2$; eixo x.

   (b) S é o tetraedro de vértices $A\,(1,0,0)\,,\ B\,(0,1,0)\,,\ C\,(0,0,1)$ e $D\,(0,0,0)$; eixo y.

   (c) S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$; eixo z.

   [resp. (a) $1024/45$; (b) $(2+\sqrt{3})/6$; (c) $8\pi R^4/3$]

9. Em cada caso, encontre o centróide da lâmina homogênea S.

   (a) S é o hemisfério $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

   (b) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, interna ao cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   (c) S é a porção do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ y \geq 0$, externa ao cilindro $x^2 + y^2 = 2$.

   [resp. (a) $C_M(0,0,R/2)$; (b) $C_M(0,0,\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$; (c) $C_M(0, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$]

10. Seja S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 2x,\ \ 0 \leq z \leq 1$, entre os planos $x = 2$ e $x = 1$. Admita a densidade constante σ_0 e calcule:

    (a) A massa de S e **(b)** O momento de inércia I_z de S. [resp. (a) $\sigma_0\pi$ (b) $4\sigma_0(1+\frac{\pi}{2})$]

11. Mostre que $\iint_S \left(x^2+y^2\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})\cdot\mathbf{N}_S\,dS = 4I_z$, onde I_z representa o momento de inércia, com relação ao eixo z, do sólido com densidade $\sigma \equiv 1$, delimitado por S.

12. Calcule o campo eletrostático na origem devido a uma distribuição uniforme[1] de carga sobre o cilindro $x^2+y^2=R^2$, $0 \le z \le a$. [resp. $\vec{E} = \dfrac{2\pi\rho(\sqrt{R^2+a^2}-R)}{R^2+a^2}\vec{k}$]

13. Qual o potencial eletrostático no ponto $(0,0,z)$, devido a uma distribuição uniforme de carga sobre o hemisfério $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$? [resp. $\dfrac{2\pi\rho R(\sqrt{R^2+z^2}-R+z)}{z}$]

14. Considere uma distribuição uniforme de carga elétrica sobre uma esfera S de raio a. Mostre que o campo elétrico em um ponto do eixo z, interior a S, é zero. Qual o campo elétrico nos pontos $A\,(0,0,z)\,,\ z>a$? Note que o fenômeno ocorre como se toda carga estivesse concentrada no centro da esfera, que é o centro de massa. [resp. $\vec{E}(0,0,z) = \dfrac{(4\pi a^2\rho_0)\vec{k}}{z^2}$]

ASSIM TERMINA CÁLCULO 3 ....

[1] A distribuição diz-se *uniforme* quando a densidade de carga ρ_0 é constante.