2.1 Exemplos de Funções Complexas

1. Sabendo que $f(z) = 3z^2 + z$, calcule $f(2+i)$ e $f(3i)$.

2. Se $z = x + iy$, como se expressa a função $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$ em termos de z?

3. Considerando $z = x + iy$, determine o domínio máximo das seguintes funções:

   (a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)\operatorname{sen} y}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z^2 + (z-i)^3}{(e^{iy}-1)\cos y}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{i}{1-y}$.

4. Determine a parte real e a parte imaginária de $w = f(z)$.

   (a) $w = 2z^2 - 3z$ **(b)** $w = |z| + z\operatorname{Re}(z)$ **(c)** $w = \dfrac{1}{1-z}$ **(d)** $w = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{z^2 - i}$.

5. Em cada caso, esboce o domínio D da função $w = f(z)$.

   (a) $w = z^2 + 1;\quad D : |z| \leq 2$ **(b)** $w = 3z;\quad D : |\arg(z)| < \pi/2$ **(c)** $w = z^2;\quad D : |z| > 3$
   (d) $w = \dfrac{1}{z};\quad D : \operatorname{Re}(z) \geq 1$ **(e)** $w = \dfrac{1}{z^2};\quad D : |z| > 1$ **(f)** $w = |z| - \dfrac{iy^2}{\operatorname{Im}(z)};\quad D : \operatorname{Im}(z) > 1$.

6. Em cada caso, identifique a imagem do conjunto S pela função $w = f(z)$.

   (a) $w = 3z;\quad S : |\arg(z)| < \pi/2$ **(b)** $w = z^2;\quad S : |z| > 3$
   (c) $w = \dfrac{1}{z^2};\quad S : |z| > 1$ e $|\arg z| \leq \pi/4$ **(d)** $w = \dfrac{1}{z};\quad S : \operatorname{Re}(z) > 0$.

7. Qual a imagem da faixa horizontal $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$ pela função $w = e^x \cdot e^{iy}$? E se S fosse o retângulo

   $$S = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$$

   qual seria a imagem $w(S)$?

8. Identifique a imagem do conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1,\ 0 \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi\}$ pela função $w = z + 1/z$.

2.2 Limite & Continuidade

1. Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, mostre que $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$.

2. Usando a definição, prove que a função $f(z) = z^2$ é contínua.

3. Usando a definição de limite, prove que:

   (a) $\lim_{z\to 2i} \left(2x + iy^2\right) = 4i$.

   (b) $\lim_{z\to i} \left(z^2 + 1\right) = 0$.

   (c) $\lim_{z\to z_0} (\operatorname{Re}(z) + |z|) = \operatorname{Re}(z_0) + |z_0|$.

   (d) $\lim_{z\to 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i$.

   (e) $\lim_{z\to z_0} \overline{z} = \overline{z_0}$.

   (f) $\lim_{z\to i} \left(z^3 - i\right) = -2i$.

4. Usando as propriedades básicas do limite, verifique que:

   (a) $\lim_{z\to i} \dfrac{1}{z^2} = -1$ **(b)** $\lim_{z\to i} \dfrac{iz^3 - 1}{z - i} = -3$ **(c)** $\lim_{z\to -2i} \dfrac{z^3 - 8i}{z + 2i} = -12$.

5. Suponha que $g(z)$ seja uma função limitada, isto é, que exista uma constante $M > 0$, tal que $|g(z)| \leq M,\ \forall z \in D(g)$. Se $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$, mostre que $\lim_{z\to z_0} [f(z)\, g(z)] = 0$. Note que não é necessário a função g ter limite em z_0.

6. Se $f(z) = 1/z,\ z \neq 0$, calcule o limite
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z_0 \neq 0.$$

7. Verifique se a função $f(z) = \dfrac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$, definida para $z \neq z_0$, tem limite quando $z \to z_0$.

8. Calcule, caso exista, o limite
$$\lim_{z\to 0} \frac{(1+z)^{1/4} - 1}{z}.$$

9. Verifique se a função
$$f(z) = \frac{\overline{z}^2 + 4}{z - 2i}$$
tem limite quando $z \to 2i$.

10. Mostre que $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ se, e somente se, $\lim_{z \to z_0} f(z_n) = w_0$, seja qual for a sequência (z_n) no domínio de $f(z)$, com $z_n \to z_0$.

11. Estude a continuidade, no ponto $z = 0$, da função $w = f(z)$, sendo $f(0) = 0$ e, para $z \neq 0$:

    (a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{1+|z|}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re}(z)^2}{|z|}$ **(d)** $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z^2|}$.

2.3 Derivação no Plano $\mathbb{C}$

1. Mostre que a função $f(z) = |z+i|^2$ é derivável apenas no ponto $z = -i$.

2. Em cada caso, mostre que a função $w = f(z)$ não é derivável em ponto algum do plano $\mathbb{C}$.

    (a) $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ (b) $f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$ (c) $f(z) = z - \overline{z}$

3. Em cada caso, calcule $f''(z)$, sendo:

    (a) $f(z) = iz + 2$ (b) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$ (c) $f(z) = z^3$

4. Determine, onde existir, a derivada da função $f(z)$.

    (a) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ (b) $f(z) = x^2 + iy^2$ (c) $f(z) = z \operatorname{Im}(z)$ (d) $f(z) = z^2 + 1$ (e) $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$

5. Para a função $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$, mostre que $u_x + iv_x = 3x^2$. Por que $3x^2$ representa a derivada dessa função apenas em $z = i$?

6. Mostre que a função $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ é derivável apenas na origem e calcule $f'(0)$.

7. Mostre que as funções $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ e $g(z) = (z^2 - z)\, e^{-x} e^{-iy}$ são inteiras.

8. Mostre que as funções $f(z) = e^y e^{ix}$ e $g(z) = xy + iy$ não são analíticas em ponto algum.

9. Se uma função complexa $w = f(z)$ é analítica em uma vizinhança de um ponto z_0, exceto em z_0, o ponto z_0 recebe o nome de *singularidade* ou *ponto singular* da função f.

    (a) Um polinômio $P(z)$ não tem ponto singular, por ser uma função inteira.

    (b) As singularidades de uma função racional $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ são as raízes do polinômio $Q(z)$.

(c) A função $f(z) = \bar{z}$ não tem sigularidade, porque não é analítica em ponto algum.

Determine, caso exista alguma, as singularidades das seguintes funções:

(a) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$ (b) $g(z) = \dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$ (c) $h(z) = \dfrac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} - i\operatorname{Im}(z)$ (d) $f(z) = z\operatorname{Re}(z)$

10. Calcule a derivada e as singularidades da função $f(z) = \dfrac{1}{z(z-i)(z^2+i)}$.

11. Dado $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, designe $F(z) = \ln r + i\theta$. Mostre que a função F assim definida é analítica no domínio indicado e $F'(z) = 1/z$.

12. Se $f(z) = z^2$ e k é uma constante real, verifique que as curvas $u(x,y) = k$ e $v(x,y) = k$, onde $u = \operatorname{Re}[f(z)]$ e $v = \operatorname{Im}[f(z)]$, são ortogonais. Idem para a função $g(z) = 1/z$.

13. Seja $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ uma função analítica em um domínio[1] D que não contém a origem. Use as equações de Cauchy-Riemann para provar que as funções u e v satisfazem à equação de Laplace:

$$r^2\Phi_{rr} + r\Phi_r + \Phi_{\theta\theta} = 0.$$

14. Se as funções $f(z)$ e $\overline{f(z)}$ são analíticas em um domínio D, mostre que f é constante.

15. Suponha que uma função $f(z)$ seja analítica em um domínio D. Mostre que f é constante em D se, e somente se, $|f(z)|$ é constante. E se $\operatorname{Re}[f(z)]$ for constante?

16. Determine onde a função $w = f(z)$ é analítica:

(a) $f(z) = z^3 + z$ **(b)** $f(z) = (1-z)^{-1}$ **(c)** $f(z) = z^{-2}$ **(d)** $f(z) = \arg(z)$.

17. Verifique que a função $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$ é inteira e calcule $f'(a+ib)$.

18. Se uma função $w = f(z)$ é holomorfa em um domínio D e $f'(z) = 0$, $\forall z \in D$, mostre que f é constante em D.

19. Se $f(z)$ é uma função inteira, mostre que $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ também é uma função inteira.

20. Se $f(z)$ é analítica em $z = 0$ e $h(z) = \overline{f(z)}$, mostre que $h(z)$ é derivável em $z = 0$ se, e só se, $f'(0) = 0$.

[1] Por *domínio* entende-se um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ aberto e conexo.

21. Mostre que a função $f(z) = \sqrt{|xy|}$ satisfaz às equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$ e, contudo, não é derivável, e muito menos analítica, em $z = 0$.

22. Se $f = u + iv$ é uma função holomorfa em z_0 e θ representa o ângulo de uma direção $\vec{\eta}$ com o eixo positivo dos x, mostre que:
$$f'(z_0) = e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} + i\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}}\right).$$

23. Se f e g são funções deriváveis em z_0, com $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, mostre que:
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$
Use o resultado e calcule $\lim_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z}$.

2.4 Funções Harmônicas

1. Mostre que a função $u(x,y) = x^2 - y^2$ é harmônica em todo $\mathbb{C}$ e construa uma função analítica $w = f(z)$, tal que $\operatorname{Re}[f(z)] = u(x,y)$.

2. Mostre que $u = x - 5xy$ é harmônica em todo plano, determine sua conjugada $v(x,y)$ e expresse $f = u + iv$ em termos de $z = x + iy$.

3. Repita o exercício precedente com a função $u(x,y) = e^x \cos y$.

4. Mostre que a função $v(x,y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ é harmônica e construa uma função analítica $f(z)$, com $v(x,y) = \operatorname{Im}[f(z)]$.

5. Repita o exercício precedente com a função $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

6. Mostre que a forma mais geral dos polinômios do terceiro grau, homogêneos e harmônicos é
$$u(x,y) = ax^3 - 3bx^2y - 3axy^2 + by^3.$$
Determine a harmônica conjugada $v(x,y)$ e a função inteira correspondente $f(z) = u + iv$.

7. Se $f(z)$ é uma função de classe C^2 em um domínio D, mostre que
$$\Delta\left(|f(z)|^2\right) = 4\left|f'(z)\right|^2, \quad \text{nos pontos de } D.$$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

2.1. EXEMPLOS DE FUNÇÕES COMPLEXAS

1. $f(2+i) = 11+13i \quad \text{e} \quad f(3i) = -27+3i.$

2. Um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2ix - 2xy \\ &= (x - iy)^2 + 2i(x + iy) = \overline{z}^2 + 2iz. \end{aligned}$$

3. Sendo $z = x + iy$, temos:

   (a) $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : z \neq i \quad \text{e} \quad z \neq k\pi i\}.$

   (b) $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : \operatorname{Im}(z) \neq k\pi + \pi/2 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) \neq 2k\pi\}.$

   (c) $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : \operatorname{Re}(z) \neq 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) \neq 1\}.$

4. Considerando $u(x,y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ e $v(x,y) = \operatorname{Im}[f(z)]$, com $z = x + iy$, temos:

   (a) $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 3x \quad \text{e} \quad v(x,y) = 2xy - 3y.$

   (b) $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x^2 \quad \text{e} \quad v(x,y) = xy.$

   (c) $u(x,y) = \dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2} \quad \text{e} \quad v(x,y) = \dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}.$

   (d) $u(x,y) = \dfrac{x^2y - y^3}{x^4+y^4+6x^2y^2-4xy+1} \quad \text{e} \quad v(x,y) = \dfrac{1-2xy}{x^4+y^4+6x^2y^2-4xy+1}.$

5. Figuras em Construção

6. Figuras em Construção

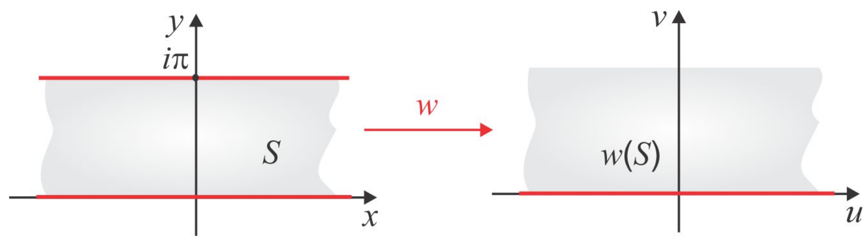
7. As partes real e imaginária da função $w = f(x+iy) = e^x \cdot e^{iy}$ são, respectivamente:

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

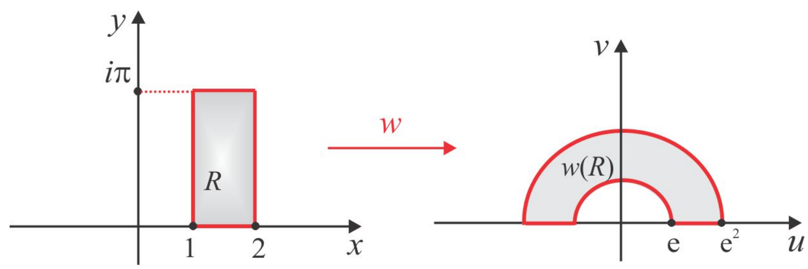
de modo que $u^2 + v^2 = e^{2x}$ (circunferência de centro $z_0 = 0$ e raio $r = e^x$). É oportuno ressaltar que y é, ao mesmo tempo, a parte imaginária de z e o argumento de w. No caso da faixa horizontal S, vemos que:

$$|w| = e^x \to +\infty, \quad \text{com } x \to \infty, \quad \text{e} \quad 0 \leq \operatorname{Arg}(w) \leq \pi.$$

e a imagem $w(S)$ é o semiplano $v \geq 0$.



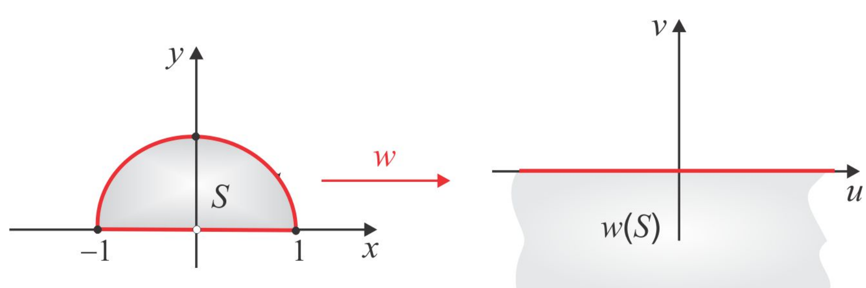
No caso do retângulo R, a imagem está ilustrada na figura abaixo.



8. Olhando as componentes $u(x,y) = \mathrm{Re}(w)$ e $v(x,y) = \mathrm{Im}(w)$ ao longo do eixo real e imaginário, respectivamente, vemos que:

$$u(x,0) = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \quad \text{e} \quad v(0,y) = \mathrm{Im}(w) = y\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$$

de onde resulta $\lim\limits_{x \to 0} u(x,0) = \pm\infty$ e $v(0,y) \leq 0$, com $\lim\limits_{y \to 0^+} v(0,y) = -\infty$. A imagem $w(S)$ é o semiplano inferior $v \leq 0$.



2.2. LIMITE & CONTINUIDADE

1. Use a definição de limite e a desigualdade $||f(z)| - |w_0|| \leq |f(z) - w_0|$.

2. É suficiente provar que $\lim_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$, seja qual for o ponto z_0 do plano $\mathbb{C}$. Seja, então, $\varepsilon > 0$ dado e determinemos $\delta > 0$, tal que:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow \left|z^2 - z_0^2\right| < \varepsilon.$$

O raio δ procurado pode depender do ε dado e do ponto z_0 e, considerando $\delta < 1$, teremos:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |z + z_0| \leq |z - z_0| + |z_0| < \delta + |z_0| < 1 + |z_0|.$$

Assim, se $|z - z_0| < \delta$, então:

$$\left|z^2 - z_0^2\right| = |z + z_0|\,|z - z_0| < (1 + |z_0|) \cdot |z - z_0| < (1 + |z_0|) \cdot \delta$$

Para concluir, basta escolher o raio δ de modo que:

$$\delta < \min\{1, \varepsilon/(1 + |z_0|)\}.$$

3. Comprovar limite pela definição torna-se uma caçada ao δ. Para que se tenha $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$, procuramos, a partir de um $\varepsilon > 0$ dado, um $\delta > 0$, tal que:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad z \in D(f) \quad \text{e} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

(a) Se $f(z) = z^3 - i$, então:

$$|f(z) + 2i| = \left|z^3 + i\right| = \left|(z - i) \cdot \left(z^2 + iz - 1\right)\right| \leq |z - i|\,|z|\,|z + i| + |z - i|. \tag{2.1}$$

Considerando $\delta < 1$, então $|z - i| < \delta$ acarreta:

$$|z| < |z - i| + 1 < 2 \quad \text{e} \quad |z + i| < |z - i| + 2 < 3$$

e de (2.1) chegamos a:

$$|f(z) + 2i| < 7\,|z - i| < 7\delta$$

e para concluir, basta escolher $\delta < \min\{1, 7/\varepsilon\}$.

(b) Se $\delta < 1$, temos:

$$\left|z^2 + 1\right| = |z - i|\,|z + i| < 3\delta, \quad \text{se} \quad |z - i| < \delta$$

e dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\delta < \min\{1, \varepsilon/3\}$ para concluir que $|z - i| < \delta \Rightarrow \left|z^2 + 1\right| < \varepsilon$.

(c) Supondo $|z - z_0| < \delta$ e considerando $\delta < 1$, temos

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\,(z) + |z|| &= |\mathrm{Re}\,(z - z_0) + \mathrm{Re}\,(z_0) + |z - z_0 + z_0|| \\ &\leq |\mathrm{Re}\,(z - z_0)| + |\mathrm{Re}\,(z_0)| + |z - z_0| + |z_0| \\ &\leq |z - z_0| + 2\,|z_0| < 1 + 2\,|z_0|\,. \end{aligned}$$

Escolha $\delta < \min\{1, \varepsilon/\,(1 + 2\,|z_0|)\}\,.$

(d) Se $z_0 = 1 - i,\; w_0 = 1 + i$ e $f\,(z) = x + i\,(2x + y)$, então:

$$|f\,(z) - w_0| = |z - z_0 + 2i\,\mathrm{Re}\,(z = z_0)| \leq |z - z_0| + 2\,|\mathrm{Re}\,(z - z_0)| \leq 3\,|z - z_0|$$

e para concluir, seja $\delta = \varepsilon/3$.

(e) Temos

$$\left|(\overline{z})^2 - (\overline{z_0})^2\right| = |z - z_0|\,|z + z_0|$$

e considerando $\delta < \min\{1, \varepsilon/\,(1 + 2\,|z_0|)\}$ comprovamos a definição.

4. Em alguns casos, o resultado é obtido por substituição direta; em outros é necessário fatoração.

(a) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{1}{z^2} = \frac{1}{i^2} = -1.$

(b) $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{iz^3 - 1}{z - i} = \lim_{z\to i} \frac{i\,(z - i)\left(z^2 + iz - 1\right)}{z - i} = \lim_{z\to i} i\left(z^2 + iz - 1\right) = -3.$

(c) Usando a fatoração do Exercício **??** do Capítulo 1, temos:f(z)

$$\lim_{z\to -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i} = \lim_{z\to -2i} \frac{(z + 2i)\left(z^2 - 2iz - 4\right)}{z + 2i} = \lim_{z\to -2i}\left(z^2 - 2iz - 4\right) = -12.$$

5. Um cálculo direto nos dá:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f\,(z) - f\,(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{-1}{z \cdot z_0} = -\frac{1}{z_0^2}.$$

No caso em que $f\,(z) = z^n$, usamos a identidade (**??**) e chegamos a:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f\,(z) - f\,(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = nz_0^{n-1}.$$

6. O limite não existe, tendo em vista que:

(i) sobre a trajetória $\gamma_1 : \mathrm{Re}\,(z) = x_0$ o valor do limite é -1.

(ii) sobre a trajetória $\gamma_2 : \operatorname{Im}(z) = y_0$ o valor do limite é 1.

7. Se $w = (1+z)^{1/4}$ então $z = w^4 - 1$ e, portanto:

$$\lim_{z\to 0} \frac{(1+z)^{1/4} - 1}{z} = \lim_{w\to 1} \frac{w-1}{w^4-1} = \lim_{w\to 1} \frac{1}{(w-i)(w+i)(w+1)} = \frac{1}{4}.$$

8. Considere as trajetórias $\gamma_1 : \operatorname{Re}(z) = 0$ e $\gamma_2 : \operatorname{Im}(z) = 2$, ao longo das quais o limite tem valores $4i$ e $-4i$, respectivamente. Daí conclui-se que o limite não existe.

9. A função $f(z)$ será contínua em $z = 0$ quando $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$. Sejam $u(x,y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ e $v(x,y) = \operatorname{Im}[f(z)]$, sendo $z = x + iy$.

(a) $u(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ não tem llimite em $(0,0)$ e $f(z)$ é descontínua em $z = 0$.

(b) Neste caso, $u(x,y) \equiv 0$ e, na forma polar, $v(x,y) = \dfrac{r \operatorname{sen}\theta}{1+r} \to 0$, com $r \to 0$. A função é contínua em $z = 0$.

(c) Temos $u(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \to 0$, com $z \to 0$, e $v(x,y) \equiv 0$. Assim, $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$ e a função é contínua em $z = 0$.

(d) A componente $u(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não tem limite em $(0,0)$ e a função é descontínua em $z = 0$.

10. Suponha que $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ e seja (z_n) uma sequência no domínio de f, convergindo para z_0. Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e um número natural n_0, tais que:

$$\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & |f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{se} \quad z \in D(f) \quad \text{e} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \\ \text{(i)} & |z_n - z_0| < \delta, \quad \text{se} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n \geq n_0. \end{array}\right.$$

e daí resulta que $|f(z_n) - w_0| < \varepsilon$, se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$. Isto nos diz que $\lim f(z_n) = w_0$. A recíproca é provada por contradição. Supondo que $f(z)$ não tenha limite w_0, com $z \to z_0$, existe um raio $\varepsilon_0 > 0$ e para cada índice n escolhemos um número complexo z_n no domínio de f, tal que:

$$|z_n - z_0| < 1/n \quad \text{e} \quad |f(z_n) - w_0| \geq \varepsilon_0.$$

Dessa forma, construímos uma sequência (z_n) no domínio de f, convergindo para z_0, sem que $f(z_n)$ convirja para w_0, contradizendo a hipótese.

11. São contínuas as funções em **(b)** e **(c)**.

2.3. DERIVAÇÃO NO PLANO $\mathbb{C}$

1. Temos $f(x+iy) = x^2 + (y+1)^2$ e as componentes de $f(z)$ são:

$$u(x,y) = x^2 + (y+1)^2 \quad \text{e} \quad v(x,y) \equiv 0.$$

(a) O conjunto imagem de $w = f(z)$ é:

$$\mathcal{I}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ e } \operatorname{Re}(z) \geq 0\}.$$

(b) No ponto $z_0 = -i$, temos:

$$f'(-i) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(-i+\Delta z) - f(-i)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{(\Delta z)} = 0.$$

2. Basta comprovar que o sistema de Cauchy-Riemann não é satisfeito em ponto algum do plano $\mathbb{C}$.

(a) Temos $u(x,y) = y$, $v(x,y) = 0$ e, portanto, $u_y \neq -v_x$ em todo ponto z.

(b) Temos $u(x,y) = e^x \cos y$ e $v(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y$ e o sistema é, neste caso:

$$\left| \begin{array}{l} e^x \cos y = -e^x \cos y \\ -e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \cos y = -\cos y \\ -\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} y \end{array} \right. \Leftrightarrow \cos y = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} y = 0.$$

um tal y não existe!

(c) Neste caso, $u(x,y) \equiv 0$ e $v(x,y) = 2y$. A equação $u_x = v_y$ não é satisfeita em ponto algum.

3. O cálculo pode ser feito via regras de derivação ou com a fórmula (**??**).

(a) $f(z) = iz + 2 \Rightarrow f''(z) = 0.$

(b) $f(z) = \exp(-z) \Rightarrow f''(z) = \exp(-z).$

Para usar a fórmula (**??**), notamos que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + iv_x = U + iV \Rightarrow f''(z) = U_x + iV_x = u_{xx} + iv_{xx} \quad \text{ou} \\ f''(z) &= V_y - iU_y = v_{xy} - iu_{xy}. \end{aligned}$$

(c) $f(z) = z^3 \Rightarrow f''(z) = 6z.$

4. Usando regras de derivação ou a fórmula (**??**), temos:

   (a) Se $z \neq 0$, então $f'(z) = \dfrac{-1}{z^2}$.

   (b) A derivada existe nos pontos da reta $S : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ e é dada por: $f'(z) = 2x + 2iy$.

   (c) As componentes de $f(z)$ são as funções $u = xy$ e $v = y^2$, de classe C^∞, e o sistema de Cauchy-Riemann é atendido apenas em $z = 0$. Temos $f'(0) = 0$.

   (d) $f'(z) = 2z, \quad z \in \mathbb{C}$. **(função inteira)**

   (e) Se $z \neq 1$, então $f'(z) = \dfrac{-1}{(z-1)^2}$.

5. As componentes $u = x^3$ e $v = -(y-1)^3$ são de classe C^1 em todo plano $\mathbb{C}$, mas, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas em $z = i$ e neste ponto temos $f'(i) = 3x^2$.

6. Temos $f(z) = x^2 + ixy$ e as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas em $z = 0$. A derivada é $f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0$.

7. Verifique que o sistema de Cauchy-Riemann é satisfeito em cada ponto (x, y) do plano $\mathbb{C}$. Note que a função $g(z)$ é o produto da função inteira $z^2 - z$ pela função e^{-z}, também inteira.

8. As componentes da função $f(z)$ são $u = e^y \cos x$ e $v = e^y \operatorname{sen} x$, que não satisfazem ao sistema de Cauchy-Riemann em ponto algum, já que as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ não se anulam simultaneamente. A funçao $f(z)$ não é derivável, e muito menos analítica, em ponto algum. Já a função $g(z)$ é derivável apenas em $z = i$, mas, não é analítica em ponto algum.

9. A inexistência da derivada no ponto z_0 não indica singularidade nesse ponto. Recorde-se que z_0 é uma singularidade de $f(z)$ quando f for analítica em alguma vizinhança de z_0, exceto no ponto z_0.

   (a) $z = 0$ e $z = \pm i$ são as singularidades de $f(z)$.

   (b) $z = 0$ e $z = 2$ são as singularidades de $g(z)$.

   (c) A função $h(z)$ não é analítica em ponto algum e, portanto, não tem singularidade.

10. A derivada pode ser calculada por meio de regras de derivação. As singularidades são: $z = 0$, $z = i$ e $z = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right)$.

11. Sendo $F(z) = \ln r + i\theta$, então as componentes $u(r,\theta) = \ln r$ e $v(r,\theta) = \theta$ são de classe C^1 e facilmente comprovam-se as equações de Cauchy-Riemann:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad \text{e} \quad v_r = -\frac{1}{r} u_\theta.$$

A derivada é dada por:

$$F'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r \cdot e^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

12. No caso de $f(z) = z^2$, temos $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$. As curvas $u(x,y) = k$ e $v(x,y) = k$ são ortogonais se, e só se, $\nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 0$. Temos:

$$\left| \begin{array}{l} \nabla u(x,y) = (2x)\ \vec{i} - (2y)\ \vec{j} \\ \nabla v(x,y) = (2y)\ \vec{i} + (2x)\ \vec{j} \end{array} \right. \Rightarrow \nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y) = 4xy - 4xy = 0.$$

Repita o processo com a função $g(z) = 1/z$, nos ponto $z \neq 0$.

13. Partindo das equações de Cauchy-Riemann, encontramos:

$$\begin{array}{l} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \Rightarrow u_{rr} = -\dfrac{1}{r^2} v_\theta + \dfrac{1}{r} v_{\theta r} \Rightarrow r^2 u_{rr} = -v_\theta + r v_{\theta r} \\ u_\theta = -r v_r \Rightarrow u_{\theta\theta} = -r v_{\theta r} \end{array}$$

e daí resulta:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = (-v_\theta + r v_{\theta r}) + v_\theta + (-r v_{\theta r}) = 0.$$

Procedimento similar se adota para a função $v(r,\theta)$.

14. Como $f(z) = u + iv$ e $g(z) = u - iv$ são analítica no domínio D, resulta das equações de Cauchy-Riemann que:

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad v_x = -u_y$$

$$u_x = -v_y \quad \text{e} \quad v_x = u_y$$

e daí segue que as derivadas primeiras de u e v são nulas em D. Logo, u e v (e portanto $f(z)$) são constantes em D.

15. Se $f(z) = u + iv$ é constante, é claro que $|f(z)|$ também é constante. Reciprocamente, se $|f(z)|$ é constante, digamos $|f(z)| = k$, obtemos por derivação implícita:

$$u^2 + v^2 = k^2 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} u \cdot u_x + v \cdot v_x = 0 \\ u \cdot u_y + v \cdot v_y = 0 \end{array} \right.$$

e usando as equações de Cauchy-Riemann, chegamos:

$$\left|\begin{array}{l} \left(u^2+v^2\right)\cdot\left(u_x^2+v_x^2\right)=0, \quad \text{em } D \\ \left(u^2+v^2\right)\cdot\left(u_y^2+v_y^2\right)=0, \quad \text{em } D. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Das equações (2.2) segue que ou $u^2+v^2=0$, e isto acarreta $f\equiv 0$, ou as derivadas $u_x,\ u_y,\ v_x$ e v_y são todas nulas em D o que nos dá u e v constantes e, portanto, $f(z)$ constante.

Se $u(x,y)=\operatorname{Re}[f(z)]$ for constante, digamos $u=k$, teremos $u_x=u_y=0$ e, consequentemente, $v_x=-u_y=0$ e $v_y=u_x=0$. Logo, $f(z)$ é constante.

16. Se $\mathcal{A}$ representa o conjunto onde $f(z)$ é analítica, então:

(a) $\mathcal{A}=\mathbb{C}$, isto é, $f(z)$ é uma função inteira.

(b) $\mathcal{A}=\{z\in\mathbb{C}: z\neq 1\}$.

(c) $\mathcal{A}=\{z\in\mathbb{C}: z\neq 0\}$.

(d) $\mathcal{A}=\varnothing$, isto é, $f(z)$ não é analítica em ponto algum.

17. As componentes $u(x,y)=x^3-3xy^2$ e $v(x,y)=3x^2y-y^3$ são funções polinomiais e, portanto, de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$. Além disso, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todo plano. Logo, $f(z)$ é uma função inteira. A derivada no ponto $z=a+ib$ é igual a:

$$f'(a+ib)=3\left(a^2-b^2\right)+(6ab)\,i.$$

18. Sendo $f'(z)=0$ em D, então

$$\left|\begin{array}{l} u_x+iv_x=0, \quad \text{em } D \\ u_y-iv_y=0, \quad \text{em } D. \end{array}\right.$$

Daí resulta u e v constantes. Logo, $f(z)$ é constante.

19. Basta observar que se $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, então $g(z)=\overline{f(\overline{z})}=U(x,y)+iV(x,y)$, onde $U(x,y)=v(x,-y)$ e $V(x,y)=-u(x,-y)$. Agora, comprovemos as equações de Cauchy-Riemann.

$$\left|\begin{array}{l} U_x(x,y)=v_x(x,-y)=-u_y(x,-y)=V_y(x,y) \\ V_x(x,y)=-u_x(x,-y)=-v_y(x,-y)=U_y(x,y). \end{array}\right.$$

20. Se $f = u + iv$, então $h = u - iv$ e supondo que $h(z)$ seja derivável em $z = 0$, teremos:

$$\left| \begin{array}{l} u_x(0,0) = -v_y(0,0) \\ u_y(0,0) = v_x(0,0)\,. \end{array} \right. \tag{2.3}$$

Mas, sendo $f(z)$ analítica em $z = 0$, temos:

$$\left| \begin{array}{l} u_x(0,0) = v_y(0,0) \\ u_y(0,0) = -v_x(0,0)\,. \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Comparando (2.3) e (2.4) deduzimos que $u_x,\ u_y,\ v_x$ e v_y são nulas em $(0,0)$ e, portanto, $f'(0) = 0$. Reciprocamente, se $f\prime(0) = 0$, então:

$$\lim_{z\to 0} \frac{h(z) - h(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(0)}}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{\left[\frac{f(z) - f(0)}{z}\right]} \cdot \left(\frac{\overline{z}}{z}\right) = 0.$$

Logo, $h(z)$ é derivável em $z = 0$ e $h'(0) = 0$.

21. Temos que $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$ e $v(x,y) \equiv 0$, de modo que:

$$u_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = 0 = v_y(0,0)$$
$$u_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y)}{\Delta y} = 0 = -v_x(0,0)\,.$$

Por outro lado, no ponto $z = 0$, temos

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y}$$

e para comprovar que o último limite não existe, considere a trajetória $\gamma : \Delta x = \Delta y$, ao longo da qual o limite pode ser $\pm\frac{1}{2}(1 - i)$, conforme $\Delta x > 0$ ou $\Delta x < 0$.

22. A partir das equações de Cauchy-Riemann e notando que $\vec{\eta} = (\cos\theta)\,\vec{i} + (\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} &= \nabla u \cdot \vec{\eta} = u_x \cos\theta + u_y \operatorname{sen}\theta = u_x \cos\theta - v_x \operatorname{sen}\theta \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} &= \nabla v \cdot \vec{\eta} = v_x \cos\theta + v_y \operatorname{sen}\theta = v_x \cos\theta + u_x \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

e daí resulta:

$$e^{-i\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} + i\frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}}\right) = e^{-i\theta}\left[e^{i\theta}(u_x + iv_x)\right] = u_x + iv_x = f'(z_0)\,.$$

23. Considerando que $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$, temos:
$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{g(z)-g(z_0)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{g(z)-g(z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$
No cálculo do limite
$$\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}$$
consideramos $f(z) = |z|^2$ e $g(z) = z$ para encontrar
$$\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

2.4. FUNÇÕES HARMÔNICAS

1. $v(x,y) = 2xy + C;\quad f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C)$.

2. As harmônicas conjugadas são $v(x,y) = \frac{5}{2}\left(x^2 - y^2\right) + y + k$. Considerando $k = 0$, temos a função analítica correspondente
$$\begin{aligned} f(z) &= x - 5xy + i\left[\tfrac{5}{2}\left(x^2-y^2\right) + y\right] = x + iy + i\tfrac{5}{2}\left(x^2 - y^2 + 2xyi\right) \\ &= z + \tfrac{5}{2}iz^2. \end{aligned}$$

3. Harmônica conjugada $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$ e a função analítica é $f(z) = \exp(z)$.

4. A harmônica conjugada $u(x,y) = \cos x \cosh y$ e a função analítica é $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

5. $v(x,y) = 3x^2 - y^3$ e $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2y - y^3\right)$.

6. Considerando o polinômio do terceiro grau homogêneo e harmônico:
$$u(x,y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2$$
e usando a equação de Laplace $\Delta u = 0$, obtemos:
$$(6a + 2d)x + (6b + 2c)y = 0 \tag{2.5}$$
e de (2.5) chegamos a $d = -3a$ e $c = -3b$. O polinômio é $u(x,y) = ax^3 + by^3 - 3bx^2y - 3axy^2$, com harmônica conjugada $v(x,y) = bx^3 + 3ax^2y - 3bxy^2 - ay^3$, e a função inteira correspondente é $f(z) = (a + ib)z^3$.

7. Se $f(z) = u + iv$ é analítica em D, então u e v são harmônicas conjugadas e $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$. logo:

$$\begin{aligned} \Delta\left(|f(z)|^2\right) &= \Delta\left(u^2\right) + \Delta\left(v^2\right) = 2\left(u_x^2 + u_y^2\right) + 2\left(u_x^2 + u_y^2\right) \\ &= 2\left(u_x^2 + v_x^2\right) + 2\left(u_y^2 + v_y^2\right) = 4\left|f'(z)\right|^2. \end{aligned}$$