## 1.1 Função Exponencial

1. Escreva as funções abaixo sob a forma $u(x,y) + iv(x,y)$.

   **(a)** $w = \exp(2z)$ **(b)** $w = \exp\left(z^2\right)$ **(c)** $w = \exp(i\overline{z})$.

2. Em cada caso, determine as soluções da equação:

   **(a)** $\exp(2z) = -1$ **(b)** $\exp(z) = i$ **(c)** $\exp(z) = -2$ **(d)** $\exp\left(z^2\right) = 1$ **(e)** $\exp(2z-1) = 1$.

3. Repita o exercício precedente com as equações:

   **(a)** $\operatorname{Re}(e^z) = 0$ **(b)** $e^z + 6e^{-z} = 5$ **(c)** $\exp(3z-4) = -1$ **(d)** $\exp(z) = 1 + \sqrt{3}i$.

4. Determine os valores de $z$ para os quais se tem $\exp(i\overline{z}) = \overline{\exp(iz)}$.

5. Mostre que $|\exp(-2z)| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$.

6. Esboce graficamente o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : |\exp(iz)| < 1\}$ e identifique sua fronteira. O conjunto $S$ é aberto?

7. Simplifique a expressão $\exp(2z+i) + \exp\left(iz^2\right)$ para deduzir que

$$\left|\exp(2z+i) + \exp\left(iz^2\right)\right| \le \exp(2\operatorname{Re} z) + \exp[-2\operatorname{Re}(z)\cdot\operatorname{Im}(z)].$$

8. Se $\exp(z)$ é real, mostre que $\operatorname{Im}(z) = k\pi$.

9. Determine onde as funções $f(z) = \exp(\overline{z})$ e $g(z) = \dfrac{e^z + z - i}{e^z - 1}$ são analíticas.

10. Se $f(z)$ é analítica em um domínio $D$, mostre que $F(z) = \exp[f(z)]$ também o é. Como consequência, deduza que as funções $f(z) = \exp\left(z^2\right)$ e $g(z) = \exp(\pm iz)$ são inteiras.

11. Mostre que a função $\varphi(x,y) = \operatorname{Re}\left(e^{1/z}\right)$ é harmônica em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

12. Suponha que $f(z) = u + iv$ seja analítica em $D$. Explique a razão das funções

$$U(x,y) = e^{u(x,y)} \cos v(x,y) \text{ e } V(x,y) = e^{u(x,y)} \operatorname{sen} v(x,y)$$

serem harmônicas em $D$ e $V(x,y)$ ser harmônica conjugada de $U(x,y)$.

13. Determine as singularidades da função $w = \exp\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$.

---

## 1.2 Funções Trigonométricas

1. Encontre as soluções das seguintes equações:

   **(a)** $\operatorname{sen} z = 2$ **(b)** $\cos z = 5$ **(c)** $\cos z = \sqrt{2}$ **(d)** $\cos z = 1/2$.

2. Verifique que as funções $\operatorname{Re}(\cos z)$ e $\operatorname{Im}(\operatorname{sen} z)$ são harmônicas.

3. Estabeleça as seguintes identidades trigonométricas:

   **(a)** $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z$.

   **(b)** $\cos(iz) = \cosh z$.

   **(c)** $1 + \operatorname{cotg}^2 z = \operatorname{cosec}^2 z$.

   **(d)** $|\cos z|^2 - \left|\operatorname{sen}^2 z\right| = \cos(2 \operatorname{Re} z)$.

   **(e)** $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$.

   **(f)** $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cos z$.

4. Determine os valores de $z$ para os quais $\cos z$ é real.

5. Determine onde a função $f(z) = \dfrac{e^z + z - i}{(e^z - 1)\cos z}$ é analítica.

6. Dado $z = x + iy$, comprove as seguintes desigualdades:

   **(a)** $|\operatorname{senh} y| \le |\sin z| \le \cosh y$ **(b)** $|\operatorname{sen} x| \le |\operatorname{sen} z|$ **(c)** $|\cos x| \le |\cos z|$.

7. Determine os valores de $z$ para os quais:

**(a)** $\cos(i\bar{z}) = \overline{\cos(iz)}$ **(b)** $\operatorname{sen}(i\bar{z}) = \overline{\operatorname{sen}(iz)}$.

8. Dado $z = x + iy$, mostre que $\log z = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) + i\arctan(y/x)$.

9. FUNÇÕES HIPERBÓLICAS As funções hiperbólicas $\operatorname{senh} z$ e $\cosh z$ são definidas por:

$$\operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right) \quad \text{e} \quad \cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right). \tag{1.1}$$

Como base na definição (1.1), mostre que:

**(a)** $\dfrac{d}{dz}(\operatorname{senh} z) = \cosh z$ e $\dfrac{d}{dz}(\cosh z) = \operatorname{senh} z$.

**(b)** $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.

**(c)** $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i(\cosh x \operatorname{sen} y)$.

**(d)** $\cosh z = \cosh x \cos y - i(\operatorname{senh} x \operatorname{sen} y)$.

10. Em cada caso, determine as raízes da equação.

**(a)** $2\cosh z = 1$ **(b)** $\operatorname{senh} z = i$ **(c)** $\cosh z = -2$.

---

## 1.3 Logaritmos e Expoentes

1. Em cada caso, determine as soluções da equação

**(a)** $\log z = i\pi/2$ **(b)** $\log z = 1 + i\pi$.

2. Determine todos os valores e o valor principal de:

**(a)** $\log(-1)$ **(b)** $\log i$ **(c)** $\log 2$ **(d)** $\log(\sqrt{i})$.

3. Dado $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, mostre que:

$$\operatorname{Re}[\log(z-1)] = \frac{1}{2}\ln\left(1 + r^2 - 2r\cos\theta\right).$$

Por que a função $w = \operatorname{Re}[\operatorname{Log}(z-1)]$ deve atender à equação de Laplace nos pontos $z \neq 1$?

4. Determine as singularidades da função $w = \dfrac{\operatorname{Log}(z+4)}{z^2+i}$.

5. Determine o valor principal de:

   **(a)** $i^i$ **(b)** $(1-i)^{4i}$ **(c)** $\sqrt{2i}$ **(d)** $(1-i)^{1+i}$ **(e)** $(-1-i\sqrt{3})^{3\pi i}$.

6. Dados $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que $|z^\alpha| = |z|^\alpha$.

7. Mostre que a função $w = \operatorname{Log}(z-i)$ é analítica fora do eixo $E = \{z : \operatorname{Re}(z) \le 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) = 1\}$.

8. Usando o ramo principal de $\log z$, obtenha uma expressão para $\sqrt{z-1}$.

9. Investigue a existência ou não do limite
$$\lim_{z \to -1} \operatorname{Log} z.$$
   A função $\operatorname{Log} z$ é contínua no ponto $z=-1$?

10. SOBRE O PARADOXO DE BERNOULLI Identifique onde está o erro na sentença abaixo:
$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2 \cdot \log(-z) = 2 \cdot \log z \Rightarrow \log(-z) = \log z.$$

## RESPOSTAS & SUGESTÕES

### 3.1. FUNÇÃO EXPONENCIAL

1. Considerando $z = x + iy$, encontramos:

   **(a)** $\exp(2z) = e^{2x}\cos(2y) + ie^{2x}\operatorname{sen}(2y)$.

   **(b)** $\exp(z^2) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + ie^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy)$.

   **(c)** $\exp(i\bar{z}) = e^y\cos x + ie^y\operatorname{sen} x$.

2. Para resolver a equação $e^z = \rho e^{i\varphi}$ designamos $z = x+iy$ para obter $e^x = \rho$ e $y = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   **(a)** $\exp(2z) = -1 \Leftrightarrow e^{2x} = 0$ e $2y = \pi + 2k\pi$. As raízes são $z = (k\pi + \pi/2)\, i,\ k \in \mathbb{Z}$.

   **(b)** $\exp(z) = i \Leftrightarrow e^x = 0$ e $y = \pi/2 + 2k\pi$. As raízes são $z = (2k\pi + \pi/2)\, i,\ k \in \mathbb{Z}$.

   **(c)** $z = \ln 2 + (2k+1)\,\pi i$.

**(d)** $z = \pm\sqrt{k\pi} \pm i\sqrt{k\pi},\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$

**(e)** $z = \frac{1}{2} + k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}.$

3. Considerando $z = x + iy$, temos:

   **(a)** $\operatorname{Re}(e^z) = 0 \Leftrightarrow e^x \cos y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi + \pi/2$. Assim, as soluções da equação são $z = x + (k\pi + \pi/2)\, i,\ k \in \mathbb{Z}.$

   **(b)** Se $\lambda = e^z$, a equação $e^z + 6e^{-z} = 5$ é equivalente a:

$$(\lambda - 5/2)^2 = 1/4,$$

   isto é, $\lambda = 3$ 0u $\lambda = 2$. Logo, $z = \ln 3 + 2k\pi i$ ou $z = \ln 2 + 2n\pi i,\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4. A igualdade $\exp\left(\overline{iz}\right) = \overline{\exp(iz)}$ é válida seja qual for o número complexo $z$.

5. Se $z = x + iy$, então $|\exp(-2z)| < 1 \Leftrightarrow e^{-2x} < 1 \Leftrightarrow -2x < 0$. Logo, $x > 0$, isto é, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

6. O conjunto aberto $S$ é o semiplano superior $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\}$.

7. Considerando $z = x + iy$, temos que $|\exp(2z + i)| = \exp(2x)$ e $\left|\exp\left(iz^2\right)\right| = \exp(-2xy)$ e, usando a desigualdade triangular, resulta:

$$\begin{aligned} \left|\exp(2z + i) + \exp\left(iz^2\right)\right| &\leq |\exp(2z + i)| + \left|\exp\left(iz^2\right)\right| \\ &= \exp(2x) + \exp(-2xy)\,. \end{aligned}$$

8. Para $z = x + iy$, temos que $\exp(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x \operatorname{sen} y = 0$ e daí resulta $y = k\pi$.

9. A função $f(z)$ não é analítica em ponto algum, enquanto $g(z)$ é analítica nos pontos $z \neq 2k\pi i$.

10. Temos uma consequência da Regra da Cadeia. A função $F(z)$ é a composição das funções analíticas $f(z)$ e $w \mapsto \exp(w)$. As funções $z \mapsto z^2$ e $z \mapsto iz$ são inteiras e o mesmo ocorre com as composições $z \mapsto \exp\left(z^2\right)$ e $z \mapsto \exp(iz)$.

11. Nos pontos $z \neq 0$ a função $f(z) = \exp(1/z)$ é analítica e suas componentes $\operatorname{Re}[f(z)]$ e $\operatorname{Im}[f(z)]$ são, portanto, harmônicas conjugadas.

12. As funções $U(x,y)$ e $V(x,y)$ são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da função analítica $F(z) = \exp[f(z)]$ sendo, portanto, harmônicas conjugadas..

13. A única singularidade é o ponto $z = -1$.

## 3.2. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1. Em cada caso, consideramos $z = x + iy$ e $\lambda = e^{iz}$.

**(a)** Temos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= 2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4i\lambda - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2i)^2 = \pm i\sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i. \end{aligned}$$

Retornando à variável $z$, encontramos:

$$e^{iz} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) i \Leftrightarrow e^{-y} e^{ix} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right) e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y = -\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \\ x = 2k\pi + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Assim, as soluções da equação $\operatorname{sen} z = 2$ são $z = 2k\pi \pm \pi/2 - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right), \ k \in \mathbb{Z}$.

**(b)** Se fizermos $\lambda = e^{iz}$, a equação $\cos z = 2$ torna-se equivalente a $(\lambda - 2)^2 = 3$. Logo,

$$\begin{aligned} \cos z &= 2 \Leftrightarrow e^{iz} = \operatorname{Log}\left(2 \pm \sqrt{3}\right) = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \\ &\Leftrightarrow iz = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2k\pi i \Leftrightarrow z = 2k\pi - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. Do Lema (**??**) resulta que

$$u(x,y) = \operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \cosh y \quad \text{e} \quad v(x,y) = \operatorname{Im}(\operatorname{senh} z) = \cos x \operatorname{senh} y,$$

as quais são funções de classe $C^2$ e temos:

$$\Delta u =_{xx} + u_{yy} = (-\cos x \cosh y) + (\cos x \cosh y) = 0, \quad \text{em } \mathbb{C}.$$

De forma similar, mostra-se que $\Delta v = 0$, em $\mathbb{C}$.

3. Primeiro, veja os conceitos das funções trigonométricas e hiperbólicas.

**(a)** Temos

$$\operatorname{sen}(iz) = \frac{1}{2i}\left[e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}\right] = \frac{1}{2i}\left[e^{-z} - e^{z}\right] = \frac{i}{2}\left[e^{z} - e^{-z}\right] = i \operatorname{senh} z.$$

**(b)** Similar ao anterior.

**(c)** Partindo de $\operatorname{cotg} z = \dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$, temos:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 z = 1 + \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{\operatorname{sen}^2 z + \cos z}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \operatorname{cosec}^2 z.$$

**(d)** Do Corolário **??**, temos

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 - |\operatorname{sen} z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y - \left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y\right) \\ &= \cos^2 x - \operatorname{senh}^2 = \cos(2x)\,. \end{aligned}$$

**(e)** Temos:

$$\begin{aligned} \cos z \cos w &= \frac{1}{4}\left[e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)}\right] \\ \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w &= \frac{1}{4}\left[e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)}\right] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w = \frac{1}{2}\left[e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}\right] = \cos(z+w)\,.$$

**(f)** Proceda como no caso precedente.

**(g)** De acordo com a definição, temos:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}(z+w)\operatorname{sen}(z-w) &= 2 \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{iz+iw} - e^{-iz-iw}\right) \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{iz-iw} - e^{-iz+iw}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{2iz} + e^{-2iz} - e^{2iw} - e^{-2iw}\right) = -\cos(2z) + \cos(2w)\,. \end{aligned}$$

**(h)** Proceda como no caso precedente.

4. Temos que

$$\begin{aligned} \cos z &\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(\cos z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x\left(e^{-y} - e^{y}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \quad \text{ou} \quad y = 0. \end{aligned}$$

Assim, $\cos z$ é real se, e só se, $z$ é real ou $z = k\pi + iy,\ y \in \mathbb{R}$.

5. A função $f(z)$ é analítica em qualquer ponto $z$, tal que $(e^z - 1)\cos z \neq 0$, isto é, nos pontos $z \neq 2k\pi i$ ou $z \neq k\pi + \pi/2$.

6. As desigualdades decorrem do Corolário **??**

7. A igualdade $\cos(i \cdot \overline{z}) = \overline{\cos(iz)}$ ocorre para qualquer $z$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(i \cdot \overline{z}) &= \overline{\operatorname{sen}(iz)} \Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left[\exp(-\overline{z}) - \exp(\overline{z})\right] = -\frac{1}{2i}\left[\overline{\exp(-z)} - \overline{\exp(z)}\right] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2i}\left[\exp(-\overline{z}) - \exp(\overline{z})\right] = -\frac{1}{2i}\left[\exp(-\overline{z}) - \exp(\overline{z})\right] \\ &\Leftrightarrow \exp(-\overline{z}) - \exp(\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

8. Temos que

$$\operatorname{sen} z = \cosh 4 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y = \cosh 4$$

e, portanto:

$$\left| \begin{array}{ll} \operatorname{sen} x \cosh y = \cosh 4 & \text{(I)} \\ \cos x \operatorname{senh} y = 0. & \text{(II)} \end{array} \right.$$

De (II) resulta que $y = 0$ ou $x = k\pi + \pi/2$, com $k \in \mathbb{Z}$, e a opção $y = 0$ nos conduz ao absurdo $\operatorname{sen} x = \cosh 4$, já que $\cosh 4 > 1$. Assim, $x = k\pi + \pi/2$ e usando a equação (I), considerando que $(-1)^k = \pm 1$ e $\cosh 4 > 0$, encontramos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(k\pi + \pi/2)\cosh y &= \cosh 4 \Leftrightarrow (-1)^k \cosh y = \cosh 4 \\ &\Leftrightarrow \cosh y = \cosh 4 \\ &\Leftrightarrow y = \pm 4. \end{aligned}$$

Assim, as raízes são $z = 2n\pi + \pi/2 \pm 4i,\ n \in \mathbb{Z}$.

9. Consequência direta da definição. Como ilustração, vejamos a parte **(e)**.

**(e)** Temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(z + \pi i) &= \frac{1}{2}\left(e^{z+\pi i} - e^{-z-\pi i}\right) = \frac{1}{2}\left(e^z \cdot e^{\pi i} - e^{-z} \cdot e^{-\pi i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-e^z + e^{-z}\right) = -\operatorname{senh} z. \end{aligned}$$

10. Em cada caso, vamos considerar $\lambda = e^z$.

**(a)** A equação $2\cosh z = 1$ é equivalente a $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, com raízes $\lambda = e^{\pm i\pi/3}$. Logo:

$$e^z = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = i\,(2k\pi \pm \pi/3)\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**(b)** A equação $\operatorname{senh} z = i$ é equivalente a $\lambda^2 - 2i\lambda - 1 = 0$, com raiz $\lambda = i = e^{i\pi/2}$, de onde resulta $z = i\,(2k\pi + \pi/2)\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

**(c)** Neste caso, temos:

$$\cosh z = -2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2 \pm \sqrt{2}/2\right) \cdot e^{i\pi}$$

e as raízes são $z = \ln\left(2 \pm \sqrt{2}/2\right) + (2k+1)\,\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

11. Se $z = x$ é um número real, é sabido que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Reciprocamente, se $z = x + iy$ é tal que $|\cos z|^2 + |\operatorname{sen} z|^2 = 1$, segue do Corolário **??** que $\operatorname{senh}^2 y = 0$ e, portanto, $y = 0$ e temos que $z$ é real.

## 3.3. LOGARÍTMOS & EXPOENTES

1. Recordemos que se $z = re^{i\theta}$ é não nulo, então $\log z = \ln r + i\,(\theta + 2k\pi)\,,\ k \in \mathbb{Z}$, e temos a seguinte propriedade: $\exp(\log z) = z$.

**(a)** Temos:

$$\log z = i\pi/2 \Rightarrow z = \exp(i\pi/2) \Rightarrow z = i.$$

**(b)** $\log z = 1 + i\pi \Rightarrow z = \exp(1 + i\pi) \Rightarrow z = -e$.

2. Dado $z = re^{i\theta} \neq 0$, o valor principal de $\log z$ é $\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta$.

**(a)** $\log(-1) = \log\left(e^{i\pi}\right) = (2k+1)\,\pi i$ e $\operatorname{Log}(-1) = \pi i$.

**(b)** $\log i = \log\left(e^{i\pi/2}\right) = (2k + 1/2)\,\pi i$ e $\operatorname{Log} i = i\pi/2$.

**(c)** $\log 2 = \log\left(2e^{i\cdot 0}\right) = \ln 2 + 2k\pi i$ e $\operatorname{Log} 2 = \ln 2$.

**(d)** $\log\left(i^{1/2}\right) = \log\left[\exp\left(\frac{1}{2}\log i\right)\right] = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi i =$ e $\operatorname{Log}\sqrt{i} = i\pi/4$.

3. Se $z = x + iy$, ao calcular $\log(z-1)$, encontramos:

$$\log(z-1) = \ln|z-1| + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \operatorname{Arg}(z-1),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\log(z-1)) &= \ln|z-1| = \ln\left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2 + 1 - 2x\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + r^2 - 2r\cos\theta\right). \end{aligned}$$

A função $w = \operatorname{Re}[\operatorname{Log}(z-1)]$, $z \neq 1$, é a parte real da função analítica $z \mapsto \operatorname{Log}(z-1)$ e, portanto, é uma função harmônica.

4. A função $\operatorname{Log}(z+4)$ é analítica fora da semireta $S : \operatorname{Re}(z) \leq -4,\ \operatorname{Im}(z) = 0$, enquanto $z^2 + i$ se anula nos pontos $z \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$. Assim, a função $w = \dfrac{\operatorname{Log}(z+4)}{z^2+i}$ é analítica na região:

$$R = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \text{ e } z \notin S\right\}.$$

5. O valor principal de $z^\lambda$ é dado por:

$$z^\lambda = \exp(\lambda \operatorname{Log} z), \quad z \neq 0.$$

**(a)** $i^i = \exp(-\pi/2)$.

**(b)** $(1-i)^{4i} = \exp(\pi + i\ln 4)$.

**(c)** $(2i)^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\operatorname{Log}(2i)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}(\ln 2 + i\pi/4)\right] = 1 + i$.

**(d)** $(1-i)^{1+i} = 2\exp(\pi/4)\cdot\exp[i(\ln 2 - \pi/4)]$.

**(e)** $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{3\pi i} = \exp\left[2\pi^2 + (3\pi\ln 2)\, i\right]$.

6. Se $z = re^{i\theta}$, e considerando que $\alpha$ é real, temos:

$$\begin{aligned} |z^\alpha| &= |\exp(\alpha \operatorname{Log} z)| = |\exp(\alpha\ln|z| + i\theta)| = \left|e^{\alpha\ln|z|}\cdot e^{i\theta}\right| \\ &= e^{\alpha\ln|z|} = e^{\ln|z|^\alpha} = |z|^\alpha. \end{aligned}$$

7. Recorde-se que $\operatorname{Log} z$ é analítica fora do eixo $L = \{(x,0) : x \leq 0\}$.

8. Considerando $z = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{z-1} &= (z-1)^{1/2} = \exp\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(z-1)\right] \\ &= \exp\left[\ln\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \frac{i}{2}\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right)\right] \\ &= \sqrt{(x-1)^2+y^2}\cdot\exp\left[\frac{i}{2}\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right)\right], \quad x \neq 1. \end{aligned}$$

9. A função $f(z) = \operatorname{Log} z$ não é contínua em ponto algum do eixo $L = \{(x,0) : x \leq 0\}$.

10. O erro ocorre ao usar a propriedade $\log(z^2) = 2\cdot\log z$, a qual não é válida em geral. Se $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$, então $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$, de modo que:

$$\log(z^2) = 2\ln r + i(2\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2\cdot\log z = 2\cdot[\ln r + i(\theta + 2n\pi)] = 2\ln r + i(2\theta + 4n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Os conjuntos $\{2\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e $\{2\theta + 4n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ são distintos!