4.1 Função Complexa de uma Variável Real

1. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{it}dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-wt}dt, \quad (\mathrm{Re}\, w > 0)$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{imt}e^{-int}dt, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$

2. Calcule as integrais trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} t \exp\left(it^2\right) dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(e^{it} + i \operatorname{sen} t\right) dt$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(it)\, dt.$

4.2 Contornos

1. Represente as seguintes arcos sob a forma $z(t) = x(t) + iy(t)\,,\ a \leq t \leq b.$

   (a) O segmento de reta de $z = 0$ a $z = 1 + 2i$.

   (b) O segmento de reta de $z = -2 + i$ a $z = -2 + 4i$.

   (c) A circunferência $|z - 2i| = 4$.

   (d) A circunferência de raio 5 e centro na origem

   (e) O arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(3, 9)$.

   (f) A elipse $x^2 + 9y^2 = 9$.

2. Em cada caso, identifique e esboce o gráfico do contorno γ descrito por:

   (a) $\gamma : z(t) = 3i + 3e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$

   (b) $\gamma : z(t) = t + 3t^2, \quad 1 \leq t \leq 2.$

   (c) $\gamma : z(t) = t + (2 - i)\,t, \quad 0 \leq t \leq 1.$

   (d) $\gamma : z(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1.$

(e) $\gamma : z(t) = 1 + 2i/t, \quad -\infty \leq t < 0.$

(f) $\gamma : z(t) = \sqrt{1-t^2} + it, \quad -1 \leq t \leq 1.$

3. Seja $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)\,,\ a \leq t \leq b$, um arco suave contido no domínio de uma função analítica $w = F(z)$. Mostre que
$$\frac{d}{dt}\left[F(z(t))\right] = F'(z(t))\, z'(t)\,.$$
Use o resultado para concluir que $\displaystyle\int_\gamma f'(z(t))\, z'(t)\, dt = f(z(b)) - f(z(a))\,.$

4.3 Função Complexa de uma Variável Complexa

1. Em cada caso, calcule $\displaystyle\int_\gamma 3z^2 dz$, onde γ é:

   (a) o segmento de $-i$ até i

   (b) o arco $|z| = 1, \quad \operatorname{Re} z \geq 0$

   (c) o arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(3,9)\,.$

2. Calcule $\displaystyle\int_\gamma |z|\, dz$, onde γ é o arco $|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \leq 0$. E se γ fosse o segmento de $-i$ até i, qual seria o valor da intgral?

3. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{z}\, dz$, onde γ é o arco $z = \exp(i\theta)$, nos seguintes casos:

   (a) $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ **(b)** $0 \leq \theta \leq 2\pi$ **(c)** $\pi \leq \theta \leq 3\pi$.

4. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_\gamma \left[x^2 - y^2 + i\left(x^2 - y^2\right)\right] dz, \quad \gamma$ é o segmento de $3 + 2i$ até a origem.

   (b) $\displaystyle\int_0^{2+i} \left(y - x^2\right) dz,$ ao longo da poligonal constituida do eixo y e da reta $y = 1$.

   (c) $\displaystyle\int_{|z|=R} \operatorname{Log} z dz.$

   (d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{z}},$ ao longo do arco de circunferência $|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0.$

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+2}{z}dz$, ao longo do arco $z = 2\exp(i\theta)$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

(f) $\displaystyle\int_{|z|=1} z^m (\overline{z})^n \, dz$.

(g) $\displaystyle\int_\gamma \exp(z)\, dz$, ao longo da poligonal de πi até 1, sobre os eixos coordenados.

(h) $\displaystyle\int_{\pi i}^{2\pi i} \cos z dz$.

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi i} z \cos\left(z^2\right) dz$.

5. Dado $z = x + iy$, defina a função $w = f(z)$ por:

$$f(z) = \left| \begin{array}{ll} 4y, & \text{se } y > 0 \\ 1, & \text{se } y < 0. \end{array} \right.$$

Se γ é o arco ao longo da curva $y = x^3$, de $z = -1 - i$ a $z = 1 + i$, calcule $\int_\gamma f(z)\, dz$.

6. Sem calcular a integral, mostre que:

(a) $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{dz}{z}\right| \leq 1$, sendo γ o segmento de $z = 1$ até $z = 1 + i$;

(b) $\displaystyle\left|\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \frac{\pi}{3}$, sendo γ o arco do círculo $|z| = 2$ de $z = 2$ até $z = 2i$.

7. Se a função $w = f(z)$ é contínua em $z = 0$, mostre que:

$$\lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta = 2\pi f(0).$$

8. Se γ o triângulo de vértices $z = 0$, $z = 3i$ e $z = -4$, com orientação positiva, mostre que:

$$\left|\int_\gamma (\exp z - \overline{z})\, dz\right| \leq 60.$$

9. Se γ_R é o círculo $|z| = R$, $R > 1$, orientado no sentido positivo, mostre que:

(a) $\displaystyle\left|\int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz\right| \leq \frac{2\pi(\pi + \ln R)}{R}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz = 0.$

10. Se $f(z)$ é contínua no círculo $\gamma_r : |z - z_0| = r$, mostre que:

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz = ir\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) e^{i\theta} d\theta.$$

Use esse fato e deduza que:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ **(b)** $\displaystyle\int_{\gamma_r} (z - z_0)^{n-1}\, dz = 0,\ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

4.4 Teoremas Clássicos & Consequências

1. Determine onde a função $w = f(z)$ é analítica e usando o Teorema de Cauchy-Goursat deduza que $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\, dz = 0$:

   (a) $w = \dfrac{z^2}{z-3}$ **(b)** $w = \dfrac{1}{z^2 + 2z + 2}$ **(c)** $w = \dfrac{z}{\exp z}$ **(d)** $w = z\,\mathrm{Log}\,(z + 2i)$ **(e)** $w = \tan z$.

2. Seja $\mathcal{R}$ a região compreendida entre o círculo $|z| = 4$ e o quadrado de vértices $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$, com a fronteira $\partial\mathcal{R}$ orientada no sentido positivo. Em cada caso, explique por quê $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)\, dz = 0$.

   (a) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2 + 1}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z + 2}{\mathrm{sen}\,(z/2)}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{z}{1 - \exp z}$.

3. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=1} f(z)\, dz$, sendo $w = f(z)$ dada por:

   (a) $\dfrac{1}{z}$ **(b)** $\dfrac{1}{4 + iz}$ **(c)** $\dfrac{\exp(2z)}{z + 2i}$ **(d)** $\dfrac{\cos z}{z}$ **(e)** $\dfrac{e^z - 1}{2z - 1}$ **(f)** $\dfrac{\cosh(3z)}{z}$.

4. Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z^2}{z^4 - 1} dz$, sendo γ o círculo $|z - i| = 1/2$.

5. Seja γ o contorno $|z| = 3$, com orientação positiva, e defina a função

   $$g(z) = \int_{\gamma} \frac{2\xi^2 - \xi - 2}{\xi - z} d\xi, \quad |z| \neq 3.$$

   Calcule os valores de $g(2)$ e $g(4i)$. Qual o valor de $g(z)$, para $|z| > 3$?

6. Seja γ um contorno simples, fechado, regular e defina a função $g(z) = \displaystyle\int_{\gamma} \frac{\xi^2 + 2\xi}{\xi - z} d\xi$. Quais os possíveis valores para $g(z)$? Note que g não está definida nos pontos do contorno γ.

7. Seja $\mathcal{R}$ a região delimitada pelo quadrado de vértices $z = \pm 2$ e $z = \pm 2i$ e considere a fronteira $\partial\mathcal{R}$ com orientação positiva. Calcule $\displaystyle\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)\, dz$, sendo:

   (a) $f(z) = \dfrac{\exp(-z)}{2z - \pi i}$ **(b)** $f(z) = \dfrac{z}{2z + 1}$ **(c)** $f(z) = \dfrac{\tan(z/2)}{(z - z_0)^2},\ |z_0| < 1/2$.

8. Seja $w = f(z)$ uma função analítica na região delimitada por um contorno simples fechado γ e seja z_0 um ponto fora de γ. Mostre que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

9. Seja γ o círculo unitário $z = e^{i\theta}$, orientado de $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$. Se λ é uma constante real, mostre que $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\lambda z}\, dz}{z} = 2\pi i$ e usando o resultado conclua que $\displaystyle\int_0^\pi e^{\lambda \cos\theta} \cos(\lambda \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \pi$.

10. Seja $w = f(z)$ uma função analítica em um domínio limitado D e suponha que f seja contínua e não constante no compacto $\overline{D}$ e que $f(z) \neq 0$, em todo ponto z de $\overline{D}$. Mostre que o valor mínimo de $|f(z)|$ não é atingido no interior de $\mathcal{R}$. A condição $f(z) \neq 0,\ \forall z \in \mathcal{R}$, pode ser removida?

11. Ilustre o Exercício 10 no caso em que $f(z) = (z+1)^2$ e $\mathcal{R}$ é a região delimitada pelo triângulo de vértices $z = 0,\ z = 2$ e $z = i$.

12. Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, nas condições do Exercício 10. Mostre que o valor máximo e o valor mínimo da função harmônica $u(x,y)$ é atingido em ∂D e nunca em um ponto interior da região, a menos que u seja constante. Ilustre a situação com os dados: $f(z) = e^z$ e $\mathcal{R} : 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq \pi$.

13. Seja $w = f(z)$ uma função analítica e limitada no disco $|z - z_0| < r$. Se $0 < \delta < r$, mostre a desigualdade de Cauchy:

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! \max |f(z)|}{\delta^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.1}$$

14. Usando (4.1), com $n = 2$, mostre que se f for inteira e $|f(z)| \leq a|z|,\ \forall z$, então: $f \equiv 0$ ou existe $\lambda \neq 0$ tal que $f(z) = \lambda z,\ \forall z$.

15. Seja $w = f(z)$ uma função analítica no disco $|z| < 1$, no qual se tem $|f(z)| \leq \dfrac{1}{1 - |z|}$. Usando a Fórmula Integral de Cauchy no contorno $\gamma_n : |z| = \dfrac{n}{n+1}$, deduza que:

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq (n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

16. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2 + 3z - 1)\, dz}{(2z+3)^2}$ **(b)** $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{Log}(z^2 + 2)\, dz}{(3z-2)^2}$ **(c)** $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{(z^2 + z + i)\, dz}{(4z - i)^3}$.

17. Suponha que a função $f(z) = \sqrt{z^2+4}$ seja determinada pela condição $f(0) = -2$. Se γ é o quadrado de vértices $z = \pm 1 \pm i$, com orientação positiva, calcule:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{4z^2+4z-3}$ **(b)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{4z^2-4iz-1}$ **(c)** $\displaystyle\int_\gamma \frac{z\,dz}{(2z^2+1)\,f(z)}$.

18. Seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função inteira e suponha que $u(x,y)$ seja limitada em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $u(x,y)$ é constante.

19. Se γ é o contorno $|z-i| = 2$, com orientação positiva, calcule o valor de $\displaystyle\int_\gamma g(z)\,dz$, sendo:

(a) $g(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$ **(b)** $g(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

4.1. INTEGRANDO FUNÇÃO DE VARIÁVEL REAL

1. Usando primitivas, obtemos:

(a) $-\sqrt{2}/2 + \left(1-\sqrt{2}/2\right)i$.

(b) $1/w$.

(c) A integral é igual a 2π, se $m = n$, e igual a 0, caso contrário.

2. **(a)** i **(b)** $2+2i$ **(c)** $\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}-e^{\pi}\right)$.

3. $I = 2+3i$.

4.2. CONTORNOS

1. Usando a parametrização canônica.

(a) $z(t) = t + 2it, \quad 0 \le t \le 1$.

(b) $z(t) = -2 + it, \quad 1 \le t \le 4$.

(c) $z(t) = 4\cos t + (2 + 4\,\mathrm{sen}\,t)\,i, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

(d) $z(t) = 5\cos t + 5i \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

(e) $z(t) = t + it^2, \quad 0 \le t \le 3.$

(f) $z(t) = 3\cos t + i \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

2. Em construção

3. Se $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[F(z(t))] &= \frac{d}{dt}[u(x(t), y(t))] + i\frac{d}{dt}[v(x(t), y(t))] \\ &= u_x x' + u_y y' + i\left(v_x x' + v_y y'\right) \\ &= (u_x + iv_x)\, x' + i\,(v_y - iu_y)\, y' \\ &= f'(z(t))\left(x' + iy'\right) = F'(z(t))\, z'(t). \end{aligned}$$

4.3. INTEGRANDO FUNÇÃO DE VARIÁVEL COMPLEXA

1. **(a)** $-2i$ **(b)** $-2i$ **(c)** $27(1+i)^3$.

2. Ao longo arco $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \le 0$, a integral é $-2i$ e ao longo do segmento de $-i$ até i a integral é igual a i.

3. **(a)** $2\sqrt{2}i/3$ **(b)** $-4/3$ **(c)** $4i/3$.

4. Em alguns caso, pode-se usar primitivas.

(a) $\frac{5}{3}(1+5i)$.

(b) $-\frac{2}{3} + \frac{i}{2}$.

(c) 0.

(d) $2 - 2i$.

(e) $4 - 2\pi i$

(f) A integral vale $2\pi i$, se $m = n - 1$ e vale zero, caso contrário.

(g) $1 + e$.

(h) 0.

(i) $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi^2\right)$.

5. $I = 2 + 3i$.

6. **(a)** No arco γ, temos que $|1/z| \leq 1$ e, portanto:

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z}\right| \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|} \leq \int_\gamma |dz| = 1.$$

(b) No arco γ, temos $\left|1+z^2\right| \geq |z|^2 - 1 = 3$. Logo,

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{|1+z^2|} \leq \frac{1}{3}\int_\gamma |dz| = \frac{1}{3}L(\gamma) = \frac{\pi}{3}.$$

7. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$, tal que $\left|f\left(re^{i\theta}\right) - f(0)\right| < \varepsilon$, $\forall\theta$ e $0 < r < \delta$. Assim,

$$\left|\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) d\theta - 2\pi f(0)\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right) - f(0)\right| d\theta < 2\pi\varepsilon.$$

8. No triângulo γ, temos $x = \operatorname{Re}(z) \leq 0$, de modo que $e^x \leq 1$ e $|\overline{z}| = |z| \leq 4$. Assim:

$$\left|\int_\gamma (e^z - \overline{z})\, dz\right| \leq \int_\gamma (e^x + |\overline{z}|)\,|dz| \leq \int_\gamma (1+4)\,|dz| = 5 \cdot L(\gamma) = 60.$$

9. **(a)** No contorno $\gamma_R : z = R\exp(i\theta)$, $-\pi < \theta \leq \pi$, temos:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz\right| &\leq \int_{\gamma_R} \frac{|\log z|\,|dz|}{R^2} \leq \frac{1}{R^2}\int_{\gamma_R} |\ln R + i\theta|\,|dz| \leq \frac{1}{R^2}\int_{\gamma_R} (\ln R + |\theta|)\,|dz| \\ &= \frac{1}{R^2}(\ln R + \pi)\int_{\gamma_R} |dz| = \frac{2\pi}{R}(\ln R + \pi).\end{aligned}$$

(b) Segue de **(a)**, com $R \to \infty$.

4.4. TEOREMAS CLÁSSICOS & CONSEQUÊNCIAS

1. Se uma função $w = f(z)$ é analítica em uma região delimitada por um contorno γ, simples, fechado e suave (curva de Jordan), então $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$. Em cada caso, representamos por $\mathcal{R}$ a região onde $f(z)$ é analítica.

(a) $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 3\}$.

(b) $\mathcal{R} = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq -1 \pm i\sqrt{2}\right\}$.

(c) $\mathcal{R} = \mathbb{C}$. (a função $f(z)$ é inteira.)

(d) $\mathcal{R} = \mathbb{C} \backslash E$. (a função $f(z)$ é analítica fora do semi-eixo $E = [x \leq 0$ e $y = -2]$.)

(e) $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi + \pi/2\}$.

2. As singularidades da função estão fora da região $\mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$.

3. Nos casos (a), (d), (e) e (f) o resultado segue da Fórmula Integral de Cauchy. Em (b) e (c) a integral é 0, pelo Teorema de Cauchy-Goursat.

   (a) $2\pi i$ (d) $2\pi i$ (e) $\pi i\left(\sqrt{e} - 1\right)$ (f) $2\pi i$.

4. Fatorando o polinômio $z^4 - 1$ e considerando $f(z) = \dfrac{z^2}{z^3 + iz^2 - z - i}$ encontramos:

$$\int_\gamma \frac{z^2 dz}{z^4 - 1} = \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{z - i} == 2\pi i f(i) = 8\pi.$$

5. Temos que $g(2) = 8\pi i$ e se $|z| > 3$, então $g(z) = 0$.

6. $g(z) = 0$ ou $g(z) = \pm 2\pi i \left(z^2 + 2z\right)$.

7. (a) π (b) $-\pi i/2$ (c) $\pi i \sec^2(z_0/2)$

8. Resolva por etapas, observando a posição do ponto z_0 em relação à região $\mathcal{R}$ delimitada por γ.

   (i) Se o ponto z_0 for exterior à região $\mathcal{R}$, então os integrandos são analíticos e as integrais serão nulas.

   (ii) Se o ponto z_0 é interior á região, segue da Fórmula integral de Cauchy que as duas intgerais valem $2\pi i f'(z_0)$.

9. Diretamente da Fórmula Integral de Cauchy, com $f(z) = \exp(\lambda z)$, encontramos:

$$\int_\gamma \frac{\exp(\lambda z)}{z} = 2\pi i.$$

10. Aplique o princípio do Módulo Máximo à função analítica $g(z) = [f(z)]^{-1}$. O máximo de $|g(z)|$ é o mínimo de $|f(z)|$. A condição $f(z) \neq 0$, $\forall z$, não pode ser removida, como fica evidente considerando a função $f(z) = z$, no disco $|z| \leq 1$, para a qual $|f(z)|$ atinge seu valor mínimo na origem.

11. Temos $|f(z)|^2 = (x+1)^2 + y^2$ e o valor máximo de $|f(z)|$ é $M = 4$, atingido nos pontos $z = 1$ e $z = i$ da fronteira de $\mathcal{R}$.

12. Note que $u(x,y) = e^x \cos y$ não tem pontos críticos no interior da região $\mathcal{R}$, de modo que os extremos são atingidos em pontos da fronteira da região.

13. Consequência direta da Fórmula Integral de Cauchy.

14. x

15. Sobre o contorno γ_n temos $\dfrac{1}{1-|z|} = n+1$ e da Fórmula Integral de Cauchy, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi \left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} &= \left|\int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz\right| \leq \int_{\gamma_n} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \int_{\gamma_n} \frac{|dz|}{1-|z|} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} (n+1) L(\gamma_n) = 2\pi (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

16. (a) 0 (b) $4\pi i/33$ (c) $\pi i/32$.

17. É fundamental a escolha do ramo de $\operatorname{Log} z$, para podermos aplicar a Fórmula Integral de Cauchy. Após a fatoração do denominador, encontramos:

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sqrt{z^2+4}\, dz}{4(z+3/2)(z-1/2)} = 2\pi i \left[\frac{\sqrt{z^2+4}}{4(z+3/2)}\right]_{z=1/2} = \frac{\sqrt{17}}{8}\pi i$ **(b)** $-\pi/2\sqrt{15}$ **(c)** $\pi i\sqrt{2/7}$.

18. Se $u(x,y)$ é limitada, então a função $g(z) = \exp[f(z)]$ é inteira e limitada, já que $|g(z)| = \exp[u(x,y)]$. Segue do Teorema de Liouville que $g(z)$, e, portanto, $u(x,y)$, é constante.

19. **(a)** $\pi/2$ **(b)** $\pi/16$.