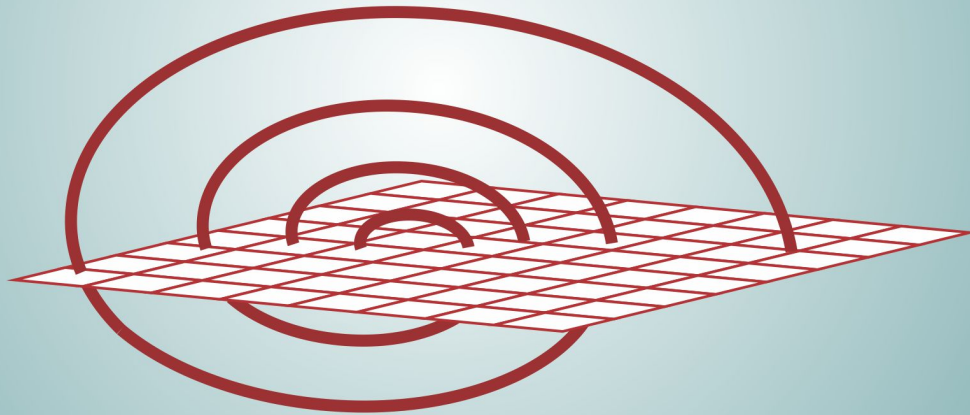


Cálculo em uma Variável Complexa

M. P. Matos & S. M. S. e Souza



UFPB - CCEN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



CÁLCULO DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

M. P. Matos & S. M. Santos e Souza

Sumário

1. O Plano Complexo	1
1.1 Números Complexos	1
1.1.1 Propriedades Algébricas	2
1.1.2 Desigualdades & Identidades	5
Escrevendo para Aprender 1.1	8
1.2 Forma Exponencial (Polar)	9
1.2.1 Fórmula de De Moivre	13
Escrevendo para Aprender 1.2	13
1.3 Potências & Raízes	14
1.3.1 Raízes da Unidade	15
Escrevendo para Aprender 1.3	19
1.4 Topologia do Plano \mathbb{C}	21
1.4.1 Convergência \times Topologia	25
Escrevendo para Aprender 1.4	26
Respostas & Sugestões	28
Escrevendo para Aprender 1.1	28
Escrevendo para Aprender 1.2	32
Escrevendo para Aprender 1.3	34
Escrevendo para Aprender 1.4	38
2. Funções Analíticas	43
2.1 Exemplos de Funções Complexas	43

Escrevendo para Aprender 2.1	47
2.2 Limite e Continuidade	48
2.2.1 Lemas Técnicos e Propriedades do Limite	50
2.2.2 Continuidade	53
Escrevendo para Aprender 2.2	55
2.3 Derivação no Plano \mathbb{C}	57
2.3.1 Equações de Cauchy-Riemann	62
2.3.2 Equações de Cauchy-Riemann na Forma Polar	67
Escrevendo para Aprender 2.3	68
2.4 Funções Harmônicas	71
Escrevendo para Aprender 2.4	73
Respostas & Sugestões	74
Escrevendo para Aprender 2.1	74
Escrevendo para Aprender 2.2	76
Escrevendo para Aprender 2.3	79
Escrevendo para Aprender 2.4	84
3. Funções Elementares	87
3.1 A Função $w = \exp(z)$	87
Escrevendo para Aprender 3.1	89
3.2 As Funções Trigonômicas Complexas	90
3.2.1 As Funções $\cos z$ e $\sin z$	90
3.2.2 Algumas Identidades Trigonômicas	91
3.2.3 Outras Funções Trigonômicas	93
Escrevendo para Aprender 3.2	94
3.3 Logaritmos & Expoentes	95
3.3.1 Ramos de $w = \log z$ (Propriedades Analíticas de $\text{Log}z$)	97
3.3.2 Propriedades & Consequências	99
3.3.3 Expoentes Complexos	100
Escrevendo para Aprender 3.3	104
3.4 Transformações do Plano \mathbb{C}	106

Escrevendo para Aprender 3.4	109
Respostas & Sugestões	110
Escrevendo para Aprender 3.1	110
Escrevendo para Aprender 3.2	112
Escrevendo para Aprender 3.3	115
Escrevendo para Aprender 3.4	117
4. Integração Complexa	119
4.1 Função Complexa de uma Variável Real	119
Escrevendo para Aprender 4.1	120
4.2 Função Complexa de uma Variável Complexa	121
4.2.1 Contornos e Integrais	121
4.2.2 A Integral	124
Escrevendo para Aprender 4.2	126
4.3 Teoremas Clássicos & Consequências	129
4.3.1 Existência de Primitivas	130
4.3.2 Fórmula Integral de Cauchy	132
Escrevendo para Aprender 4.3	138
Respostas & Sugestões	140
Escrevendo para Aprender 4.1	140
Escrevendo para Aprender 4.2	141
Escrevendo para Aprender 4.3	143
5. Séries, Resíduos & Pólos	147
5.1 Séries Complexas. Convergência Uniforme	147
5.1.1 Propriedades Básicas	147
Escrevendo para Aprender 5.1	152
5.2 Séries de Potências	153
5.2.1 Convergência Uniforme das Séries de Potências	155
5.2.2 Produto & Quociente de Séries de Potências	166
Escrevendo para Aprender 5.2	167

5.3	Singularidades & Pólos	170
5.3.1	Quociente de Funções Analíticas	175
5.3.2	Comportamento Local	177
	Escrevendo para Aprender 5.3	180
5.4	Teorema dos Resíduos & Aplicações	181
5.4.1	Cálculo de Integrais Reais	184
	Escrevendo para Aprender 5.4	191
	Respostas & Sugestões	192
	Escrevendo para Aprender 5.1	192
	Escrevendo para Aprender 5.2	193
	Escrevendo para Aprender 5.3	196
	Escrevendo para Aprender 5.4	198

Bibliografia	199
---------------------	------------

1. O Plano Complexo



Na construção do conjunto dos números reais, nos deparamos com algumas imperfeições de alguns conjuntos numéricos, que serviram de ponto de partida para tal construção. Por exemplo, o conjunto \mathbb{N} dos números naturais não contém os simétricos (inversos aditivos) de seus elementos; já o conjunto \mathbb{Z} , dos números inteiros, não contém os inversos multiplicativos de seus membros. O conjunto \mathbb{Q} , constituído das frações p/q , $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, não contém, por exemplo, o número real $\sqrt{2}$. A necessidade de se estudar números complexos ocorre no momento que desejamos resolver a equação polinomial:

$$x^2 + 1 = 0,$$

que não possui solução real. No século XVI, equação desse tipo, despertou os estudiosos, pois todos sabiam que não existiam números como $\sqrt{-1}$, cujo quadrado é negativo. Estes números existiam apenas na imaginação das pessoas. O conceito de número ao longo dos séculos, evoluiu de maneira progressiva: o conjunto dos números deixou de conter apenas os inteiros positivos e incluiu os números negativos, racionais, e irracionais. Já no século XVIII, o conceito de número deu um passo maior quando o matemático alemão Carl Friedrich Gauss estendeu o conjunto de números reais, dando a denominação dos elementos de números *imaginários* ou números *complexos*.

Introduziremos um estudo básico sobre os números complexos e as funções complexas. A definição de números complexos pode ser apresentada de maneira geométrica, através de pontos no plano, ou diretamente de forma algébrica.

1.1 Números Complexos

O conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais, equipado das operações:

- **Igualdade:** $(x, y) = (x', y')$ se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$;
- **Adição:** $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$;
- **Produto:** $(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.

será indicado por \mathbb{C} . Do ponto de vista algébrico, o conjunto \mathbb{C} se identifica com o plano cartesiano \mathbb{R}^2 e as seguintes relações básicas são facilmente estabelecidas:

- (a) $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$.
- (b) $(0, y) = (0, 1) \cdot (y, 0)$.
- (c) $(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$.

O par $z = (x, y)$, do conjunto \mathbb{C} , recebe o nome de *Número Complexo* e o número complexo $(0, y)$ denomina-se *Imaginário Puro*. Com o propósito de mergulhar o conjunto \mathbb{R} dos números reais no conjunto \mathbb{C} dos números complexos, identificamos, de forma biunívoca, o número real x com o número complexo $(x, 0)$ e, neste contexto, temos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Consequentemente,

$$y \cdot (0, 1) = (y, 0) \cdot (0, 1) = (0, y)$$

e, se representarmos o imaginário puro $(0, 1)$ por i , teremos:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

onde identificamos o número complexo $(-1, 0)$ com o número real -1 . Além disso,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$$

e o número complexo $z = (x, y)$ anotar-se-á $z = x + iy$, onde identificamos os números reais x e y com os números complexos $(x, 0)$ e $(y, 0)$, respectivamente. Com esta notação, as operações em \mathbb{C} tornam-se:

- **Igualdade:** $x + iy = x' + iy'$ se, e somente se, $x = x'$ e $y = y'$;
- **Adição:** $(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$
- **Produto:** $(x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

1.1.1 Propriedades Algébricas

As operações algébricas definidas em \mathbb{C} gozam das seguintes propriedades:

- $z + w = w + z$. (comutativa)
- $z + 0 = z$ e $z \cdot 1 = z$. (elemento neutro)
- $z + (w + u) = (z + w) + u$ e $z \cdot (wu) = (zw) \cdot u$. (associativa)
- $z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$. (distributiva)
- $z + (-z) = 0$. (existência do simétrico)
- se $z \neq 0$, existe um único $w \neq 0$ tal que $z \cdot w = 1$. (existência do inverso multiplicativo)

Para construir o inverso multiplicativo do número complexo não nulo $z = x + iy$, seja $w = a + ib$, tal que $z \cdot w = 1$, de modo que:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 1 \Leftrightarrow (x + iy) \cdot (a + ib) = 1 + 0 \cdot i \\ &\Leftrightarrow xa - yb + i(xb + ya) = 1 + 0 \cdot i \end{aligned}$$

e daí resulta o sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} xa - yb = 1 \\ xb + ya = 0 \end{cases} . \quad (1.1)$$

Resolvendo o sistema (1.1), encontramos:

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

e o número complexo w , inverso multiplicativo de z e representado por $\frac{1}{z}$, vem dado por:

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - i \cdot \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

A Figura 1.1, ilustra um ponto genérico $z = x + iy$ do plano complexo \mathbb{C} .

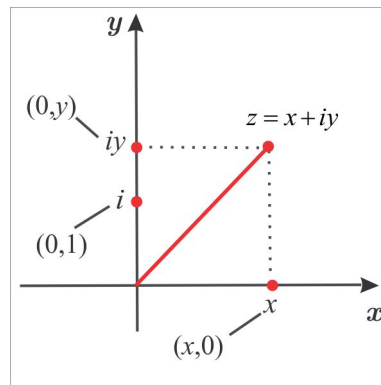


Figura 1.1: O plano complexo \mathbb{C} .

Várias propriedades do conjunto \mathbb{R} dos números reais continuam válidas no conjunto \mathbb{C} dos números complexos, mas, existem algumas diferenças. Por exemplo, não podemos comparar dois números complexos, através de desigualdades. A existência do inverso multiplicativo já faz do plano \mathbb{C} um conjunto especial. Além desse, outro fato que faz de \mathbb{C} um conjunto interessante, diz respeito à equação $e^x = -1$

que, embora não tenha solução real, ela será resolvida em \mathbb{C} . Mesmo os conjuntos \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 sendo isomorfos, como espaços vetoriais reais, o fato de podermos inverter qualquer número complexo não nulo, torna o conjunto \mathbb{C} um *Corpo Algébrico*, o que não ocorre com o espaço euclidiano \mathbb{R}^2 . Aí está uma boa razão para se estudar números complexos.

Associados ao número complexo $z = x + iy$, destacamos:

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. (módulo de z)
- $\operatorname{Re}(z) = x$. (parte real de z)
- $\operatorname{Im}(z) = y$. (parte imaginária de z)
- $\bar{z} = x - iy$. (conjugado de z)

As seguintes relações são consequências diretas das definições e o leitor pode comprová-las, como parte do processo de treinamento.

$$\begin{array}{llll}
 \text{(a)} & |z| = |\bar{z}| & \text{(b)} & |z|^2 = z \cdot \bar{z} & \text{(c)} & \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} & \text{(d)} & \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \\
 \text{(e)} & \bar{\bar{z}} = z & \text{(f)} & \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) & \text{(g)} & \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) & \text{(h)} & \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0
 \end{array}$$

e, usando o processo de *Indução Finita*, obtemos as seguintes relações mais gerais:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(i)} & \overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \dots + \bar{z}_n \\
 \text{(j)} & \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_3 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n.
 \end{array}$$

A Figura 1.2 ilustra o número complexo z , o conjugado \bar{z} , o simétrico $-z$, o inverso $1/z$ e o número iz .

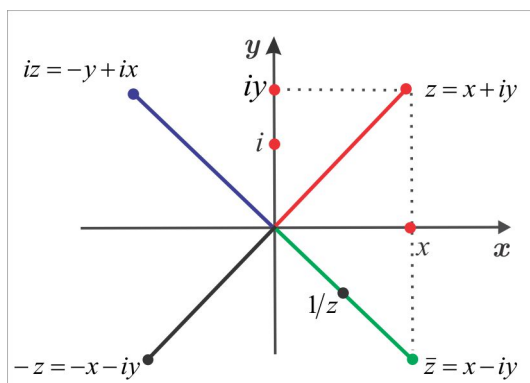


Figura 1.2: Visão geométrica de z , \bar{z} , iz , $1/z$ e $-z$.

1.1.2 Desigualdades & Identidades

No conjunto dos números complexos não podemos definir uma relação de ordem, porém, como $|z|$, $z \in \mathbb{C}$, é um número real, podemos comparar o módulo de dois números complexos. A *Desigualdade Triangular*, que é uma generalização da mesma desigualdade conhecida no conjunto dos números reais, é bastante utilizada na análise de funções complexas.

LEMA 1.1.1 (Desigualdade Triangular) *Dados dois números complexos z e w , então:*

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

PROVA Da relação $|\xi|^2 = [\operatorname{Re}(\xi)]^2 + [\operatorname{Im}(\xi)]^2$, segue que $\operatorname{Re}(\xi) \leq |\operatorname{Re}(\xi)| \leq |\xi|$, $\forall \xi \in \mathbb{C}$, e, portanto:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z \cdot \bar{w} + \overline{z \cdot \bar{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

de onde resulta:

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \quad \blacksquare \tag{1.2}$$

A seguinte generalização da Desigualdade Triangular pode ser demonstrada pelo Método de Indução Finita: dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, então

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|. \tag{1.3}$$

LEMA 1.1.2 (Produtos Notáveis) *Se z e w são números complexos, então:*

$$(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2z \cdot w + w^2 \quad e \quad |z \pm w|^2 = |z|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) + |w|^2. \tag{1.4}$$

PROVA Usando as operações de soma e produto de números complexos, temos

$$\begin{aligned} (z \pm w)^2 &= (z \pm w) \cdot (z \pm w) = z \cdot z \pm z \cdot w \pm w \cdot z + w^2 \\ &= z^2 \pm 2z \cdot w + w^2. \end{aligned}$$

Para a segunda parte, recordemos que $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ e $2 \operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}$ e, sendo assim,

$$\begin{aligned} |z \pm w|^2 &= (z \pm w) \cdot (\bar{z} \pm \bar{w}) = |z|^2 \pm z \cdot \bar{w} \pm \bar{z} \cdot w + |w|^2 \\ &= |z|^2 \pm z \cdot \bar{w} \pm \overline{z \cdot \bar{w}} + |w|^2 \\ &= |z|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) + |w|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

LEMA 1.1.3 (Fatoração Polinomial I) Dado um número complexo $w \neq 1$, então:

$$1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.5)$$

PROVA Se representarmos por S a soma do lado esquerdo de (1.5), teremos

$$S - wS = 1 - w^n \Leftrightarrow (1 - w)S = 1 - w^n \Leftrightarrow S = \frac{1 - w^n}{1 - w}. \quad \blacksquare$$

LEMA 1.1.4 (Fatoração Polinomial II) Se z e z_0 são números complexos e n é um número natural, então:

$$(z - z_0)(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + z^{n-3}z_0^2 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) = z^n - z_0^n. \quad (1.6)$$

PROVA Segue diretamente das operações em \mathbb{C} . \blacksquare

CONSEQUÊNCIAS A seguir apresentamos algumas consequências das propriedades e resultados estabelecidos. Recomendamos uma leitura cuidadosa dos cálculos para melhor compreensão da teoria.

1. Usando as operações em \mathbb{C} é fácil deduzir que $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ e que $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$. De fato, se $z = x + iy$ e $w = a + ib$, então $z \cdot w = ax - by + i(ay + bx)$ e, portanto:

$$|z \cdot w|^2 = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = |z|^2 \cdot |w|^2.$$

Por outro lado, se $w \neq 0$, temos:

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|\frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}\right| = \frac{|z \cdot \bar{w}|}{|w|^2} = \frac{|z| |\bar{w}|}{|w|^2} = \frac{|z|}{|w|}.$$

Usando o processo indutivo, chegamos a:

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_3| \cdot \dots \cdot |z_n|.$$

2. Dado um número complexo z , então $|z - 1| < |z + 1| \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$. De fato, considerando $z = x + iy$, temos:

$$|z - 1| < |z + 1| \Leftrightarrow |z - 1|^2 < |z + 1|^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 < (x + 1)^2 \Leftrightarrow x > 0.$$

3. Se a e b são números reais, temos que $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ e, consequentemente:

$$|z|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|. \quad (1.7)$$

Por outro lado, usando a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, com $a = |\operatorname{Re}(z)|$ e $b = |\operatorname{Im}(z)|$, encontramos

$$\begin{aligned} (|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|)^2 &= |\operatorname{Re}(z)|^2 + 2|\operatorname{Re}(z)||\operatorname{Im}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|^2 \\ &\leq 2\left(|\operatorname{Re}(z)|^2 + |\operatorname{Im}(z)|^2\right) = 2|z|^2 \end{aligned}$$

e daí resulta

$$|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|. \quad (1.8)$$

Combinando (1.7) e (1.8), chegamos às desigualdades:

$$|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \leq \sqrt{2}|z|. \quad (1.9)$$

4. Se z e w são números complexos, então:

$$||z| - |w|| \leq |z - w|. \quad (1.10)$$

De fato, da Desigualdade Triangular, segue que

$$\begin{aligned} |z| &= |z - w + w| \leq |z - w| + |w| \Rightarrow |z| - |w| \leq |z - w| \\ |w| &= |w - z + z| \leq |z - w| + |z| \Rightarrow |w| - |z| \leq |z - w| \end{aligned}$$

e combinando essas desigualdades, encontramos

$$-|z - w| \leq |z| - |w| \leq |z - w| \Leftrightarrow ||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

5. Dados os números complexos z_1 , z_2 e z_3 , com $|z_2| \neq |z_3|$, temos que:

$$\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}. \quad (1.11)$$

De fato, da desigualdade (1.10), segue que $||z_2| - |-z_3|| \leq |z_2 + z_3|$ e, portanto,

$$\frac{1}{||z_2| - |z_3||} = \frac{1}{||z_2| - |-z_3||} \geq \frac{1}{|z_2 + z_3|} \Rightarrow \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||} \geq \frac{|z_1|}{|z_2 + z_3|}.$$

6. Se z e w são números complexos, com $|z| \leq 1$ e $|w| \leq 1$, então:

$$|z + w| \leq |1 + \bar{w} \cdot z| \quad (1.12)$$

e ocorre a igualdade se, e somente se, $|z| = 1$ ou $|w| = 1$. De fato, sendo $|z| \leq 1$ e $|w| \leq 1$, então $|w|^2(1 - |z|^2) \leq 1 - |z|^2$ e, conseqüentemente, $|z|^2 + |w|^2 \leq 1 + |z|^2|w|^2$. Agora,

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + \bar{z} \cdot w + z \cdot \bar{w} \leq 1 + |z|^2|w|^2 + \bar{z} \cdot w + z \cdot \bar{w} = |1 + z \cdot \bar{w}|^2$$

e daí resulta $|z + w| \leq |1 + z \cdot \bar{w}|$. Por fim, observamos que se $|z| \neq 1$, então:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |1 + z \cdot \bar{w}|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |w|^2 = 1 + |z|^2|w|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2(1 - |w|^2) = 1 - |w|^2 \Leftrightarrow |w| = 1. \end{aligned}$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.1

1. Em cada caso, reduza a expressão à forma $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) $(2 - i) + (3 + 4i)$ (b) $(2 + i) - i \cdot (3 + 4i)$ (c) $(1 + i) \cdot (2 + 2i)$ (d) $(1 - i)^{12}$
 (e) $(1 - i) \cdot (\sqrt{3} + i)$ (f) $(2 - i) \cdot (2 + i)$ (g) $(1 - 2i) \cdot (3 + 2i)^{-1}$ (h) i^{-45}

2. Repita o exercício precedente com as expressões:

(a) $\frac{2}{2 - 3i}$ (b) $\frac{2 + i}{2 - 3i}$ (c) $\frac{1}{(1 - i)^2}$ (d) $\frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{4 + 3i}$ (e) $\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}$.

3. Encontre números reais x e y , tais que $3x + 2iy - ix + 5y = 7 + 5i$.

4. Em cada caso, calcule o valor da expressão.

(a) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2 + i}\right)$ (b) $\operatorname{Im}\left(\frac{2 + i}{3 + 4i}\right)$ (c) $\operatorname{Im}(1/z^2)$ (d) $\left|\frac{1 + 4i}{4 + i}\right|$ (e) $|\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta|$.

5. Se z e w são números complexos, comprove as seguintes propriedades:

(a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ (b) $\overline{\bar{z}} = z$ (c) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ (d) $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$, $w \neq 0$.

6. Qual número real λ faz com que o número complexo $\frac{2 + \lambda i}{1 - i}$ seja:

(a) Um número real (b) Um imaginário puro, isto é, com parte real nula.

7. Por substituição direta, verifique que $z = 1 \pm i$ satisfazem à equação $z^2 - 2z + 2 = 0$.

8. Se $P(z)$ é um polinômio com coeficientes reais, mostre que $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$. Conclua a partir daí que se z é uma raiz de $P(z)$, o conjugado \bar{z} também o é.
9. Se $P(z)$ é um polinômio com coeficientes reais e $P(3 + 2i) = 1 - 2i$, qual o valor de $|P(3 - 2i)|$?
10. Mostre que um número complexo z é real se, e somente se, $z = \bar{z}$.
11. Se $z^2 = (\bar{z})^2$, mostre que o número complexo z ou é real ou é imaginário puro.
12. Dado $z \in \mathbb{C}$, mostre que $|1 - z|^2 + |1 + z|^2 = 2 + 2|z|^2$.
13. Use o Lema 1.1.3 e expresse o número complexo $1 + i + i^2 + \dots + i^{179}$ na forma $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.
14. Se $|z| = |w|$ e $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$, mostre que $z = w$ ou $z = \bar{w}$.
15. Dados os números complexos z e w , mostre que: $|z \pm wz|^2 = |z|^2 [1 + |w|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(w)]$.
16. Dado um número inteiro n , quantos valores distintos a expressão $i^n + i^{-n}$ assume?
17. Dado z um número complexo, com $|\bar{z} - iz| \neq 0$, mostre que $w = \frac{z - i\bar{z}}{\bar{z} - iz}$ é um número real.
18. Se N é um inteiro ≥ 4 , mostre que os possíveis valores de $1 + i + i^2 + \dots + i^N$ são 1, $1 + i$, i ou 0, conforme o resto da divisão de N por 4 seja 3, 2, 1 ou 0.
19. Dado um número real λ , mostre que $z^3 - i\lambda^3 = (z + i\lambda)(z^2 - i\lambda z - \lambda^2)$.
20. Usando o Método de Indução Finita, estabeleça a Fórmula Binomial:

$$(1 + z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}z^k + \dots + z^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1.2 Forma Exponencial (Polar)

Em Geometria Analítica, um ponto P no plano, de coordenadas retangulares (x, y) , pode ser representado por suas *coordenadas polares*. Dado $z = x + iy$ um número complexo não nulo, se r e θ são as *coordenadas polares* do ponto $P(x, y)$, o número complexo z se expressa na forma polar

$$z = r \cos \theta + i(r \operatorname{sen} \theta). \quad (1.13)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ e $\theta = \arctan(y/x)$. Para representar o número complexo (1.13) sob a forma exponencial, nos espelhamos nas séries reais e, formalmente, escrevemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \cdots + \frac{i^n\theta^n}{n!} + \cdots \\ &= \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + \cdots \right] + i \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right] \\ &= \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta. \end{aligned}$$

Assim, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ e a forma polar do número complexo z é, portanto:

$$z = r e^{i\theta} = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad (1.14)$$

onde $r = |z|$ e $\theta = \arctan(y/x)$.

Qualquer ângulo θ , tal que $\tan \theta = y/x$ denomina-se um *Argumento* de z e anota-se $\theta \in \arg(z)$. É claro que se θ_0 é um argumento de z , então os ângulos $\theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, também o são, tendo em vista que $\cos \theta$ e $\operatorname{sen} \theta$ são funções periódicas, de período fundamental 2π . O *Argumento Principal* de z , denotado por $\operatorname{Arg}(z)$, é o argumento θ , tal que $-\pi < \theta \leq \pi$. É claro que se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{Arg}(\lambda) = 0$ e $\arg(\lambda) = \{\theta : \theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

EXEMPLO 1.2.1 Das relações $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ e $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta$, deduzimos que:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad e \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \quad (1.15)$$

EXEMPLO 1.2.2 Para expressar o número complexo $z = -1 - i$ na forma polar, notamos que $x = -1$, $y = -1$ e $r = \sqrt{2}$, de modo que $\arctan(y/x) = \pi/4$. Como o ponto $z = -1 - i$ está no terceiro quadrante, a equação $\tan \theta = 1$ nos dá $\theta = 5\pi/4$ ou $\theta = -3\pi/4$. Assim, $\operatorname{Arg}(z) = -3\pi/4$ e o argumento $5\pi/4$ é tal que $5\pi/4 = -3\pi/4 + 2\pi$. A forma polar do número complexo z é, portanto:

$$z = \sqrt{2} [\cos(5\pi/4) + i \operatorname{sen}(5\pi/4)] \quad \text{ou} \quad \sqrt{2} [\cos(-3\pi/4) + i \operatorname{sen}(-3\pi/4)] = \sqrt{2} e^{-3\pi i/4}.$$

EXEMPLO 1.2.3 Se $w = -3 + 3i$, então $y/x = -1$ e teremos $\arctan(y/x) = -\pi/4$. Como w encontra-se no segundo quadrante, segue que $\theta = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$ e, desta forma:

$$w = 3\sqrt{2} [\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4)] = 3\sqrt{2} e^{3\pi i/4}.$$

Qualquer outro argumento de w é da forma $2k\pi + 3\pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$, isto é, $\arg(w) = \{\theta = 2k\pi + 3\pi/4, k \in \mathbb{Z}\}$.

LEMA 1.2.4 Dados $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$ dois números complexos não nulos, então:

$$\bar{z} = re^{-i\theta}, \quad z \cdot w = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}, \quad 1/w = (1/\rho) e^{-i\varphi} \quad e \quad z/w = (r/\rho) e^{i(\theta-\varphi)}.$$

Além disso, $z = w$ se, e somente se, $r = \rho$ e $\theta = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

PROVA Considerando que $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e $w = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= r(\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta) = r[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)] = re^{-i\theta} \quad e \\ z \cdot w &= r\rho[\cos \theta \cos \varphi - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + i(\cos \theta \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \theta \cos \varphi)] \\ &= r\rho[\cos(\theta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta + \varphi)] = (r\rho) e^{i(\theta+\varphi)}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2} = \frac{r\rho e^{i(\theta-\varphi)}}{\rho^2} = (r/\rho) e^{i(\theta-\varphi)}. \quad \blacksquare$$

Veremos na sequência a importância do Lema 1.2.4 nos cálculos e operações com números complexos.

LEMA 1.2.5 Se z e w são dois números complexos não nulos, então:

$$\alpha \in \arg(z \cdot w) \Leftrightarrow \alpha = \beta + \gamma, \quad \text{com } \beta \in \arg(z) \text{ e } \gamma \in \arg(w).$$

Em outras palavras:

$$\boxed{\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)} \quad (1.16)$$

onde a desigualdade em (1.16) deve ser entendida como uma igualdade entre conjuntos, isto é, um dado elemento de $\arg(z \cdot w)$ se expressa como soma de um elemento de $\arg(z)$ com outro de $\arg(w)$

PROVA Sejam $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$, com $\theta = \operatorname{Arg}(z)$ e $\varphi = \operatorname{Arg}(w)$. Então:

$$z \cdot w = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$$

e dado qualquer argumento $\alpha \in \arg(z \cdot w)$, temos que $\alpha = \theta + \varphi + 2k\pi$, isto é, α é a soma do argumento θ , no conjunto $\arg(z)$, com o argumento $\varphi + 2k\pi$, no conjunto $\arg(w)$. Por outro lado, qualquer argumento ϕ do conjunto $\arg(z) + \arg(w)$ é da forma $\phi = (\theta + 2n\pi) + (\varphi + 2k\pi)$, isto é, $\phi = (\theta + \varphi) + 2(n+k)\pi$ é um argumento de $z \cdot w$. \blacksquare

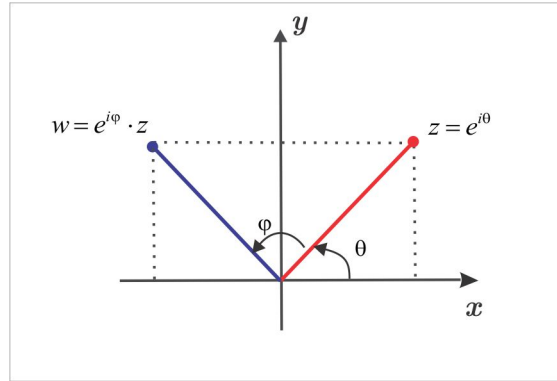


Figura 1.3: Rotação

EXEMPLO 1.2.6 (Rotação) Qual a ação geométrica da multiplicação pelo número complexo $e^{i\varphi}$? Graficamente, o número $w = e^{i\varphi} \cdot z$ é determinado a partir do número z por uma rotação anti-horária de um ângulo φ , como sugere a Figura 1.3.

De fato, se $z = re^{i\theta}$, temos que

$$e^{i\varphi} \cdot z = e^{i\varphi} \cdot re^{i\theta} = re^{i(\theta+\varphi)},$$

de onde segue que o número complexo $w = e^{i\varphi} \cdot z$ é tal que $|w| = |z|$ e $\text{Arg}(w) = \varphi + \text{Arg}(z)$.

EXEMPLO 1.2.7 Dos exemplos precedentes, vemos que $\theta_1 = 5\pi/4$ e $\theta_2 = 3\pi/4$ são argumentos de $z_1 = -1 - i$ e $z_2 = -3 + 3i$, respectivamente, e $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$. Por outro lado,

$$z_1 \cdot z_2 = (-1 - i)(-3 + 3i) = 6$$

e, portanto, $\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = 0 \neq \theta_1 + \theta_2$. Este exemplo não viola o que estabelece o Lema 2.2.7, tendo em vista que naquele Lema a igualdade $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ deve ser entendida como uma igualdade entre conjuntos.

COROLÁRIO 1.2.8 Se $z \neq 0$, então

$$\text{Arg}(i \cdot z) = \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(z) \quad \text{e} \quad \text{Arg}(1/z) = -\text{Arg}(z).$$

PROVA Considerando que $\pi/2 = \text{Arg}(i)$ e que $\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z)$, resulta:

$$\text{Arg}(iz) = \text{Arg}(i) + \text{Arg}(z) = \pi/2 + \text{Arg}(z) \quad \text{e} \quad \text{Arg}(1/z) = \text{Arg}\left(\bar{z}/|z|^2\right) = -\text{Arg}(z). \quad \blacksquare$$

1.2.1 Fórmula de De Moivre

Para generalizar o Lema 1.2.4, deixe-nos considerar n números complexos

$$z_k = r_k (\cos \theta_k + i \operatorname{sen} \theta_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n$$

e comprovemos por indução a seguinte relação:

$$\prod_{k=1}^n z_k = (r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n) [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]. \quad (1.17)$$

No caso $n = 2$, a relação (1.17) é precisamente o Lema 1.2.4. Supondo a fórmula válida para $n > 2$, mostremos que ela continua válida ao substituírmos n por $n + 1$. De fato, temos pelo Lema 1.2.4:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} z_k &= \left(\prod_{k=1}^n z_k \right) \cdot z_{n+1} = \left[(r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)} \right] \cdot (r_{n+1} \cdot e^{i\theta_{n+1}}) \\ &= (r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n \cdot r_{n+1}) \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1})} \end{aligned}$$

e com isso comprovamos a relação (1.17) para qualquer número natural n . Considerando em (1.17) $z_k = e^{i\theta}$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$, chegamos à *Fórmula de De Moivre*:

$$\boxed{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta), \quad n = 1, 2, 3, \dots} \quad (1.18)$$

EXEMPLO 1.2.9 Calculemos o valor de $(1 + i)^8$. Temos que $\operatorname{Arg}(1 + i) = \pi/4$ e, portanto:

$$(1 + i)^8 = [\sqrt{2} (\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4)]^8 = 16 (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = 16.$$

EXEMPLO 1.2.10 Ainda com a *Fórmula de De Moivre*, vamos calcular o valor de $(1 - i)^6$. Temos:

$$(1 - i)^6 = 8 [\cos (-\pi/4) + i \operatorname{sen} (-\pi/4)]^6 = 8 [\cos (-3\pi/2) + i \operatorname{sen} (-3\pi/2)] = 8i.$$

1. A partir do resultado da operação $(2 + i) \cdot (3 + i)$, deduza que: $\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \pi/4$.
Com o resultado da expressão $(5 - i)^4 \cdot (1 + i)$, mostre que $4 \arctan(1/5) - \arctan(1/239) = \pi/4$.
2. Calcule o valor da expressão $\operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w)$, sendo $z = 2 - 2i$ e $w = (\sqrt{3} - i)^6$.

3. Determine o argumento principal dos seguintes números complexos:

$$(a) z = 3 \quad (b) z = 2 - 2i \quad (c) z = 1 - i\sqrt{3} \quad (d) z = -4i \quad (e) z = \frac{-2}{1 + i\sqrt{3}} \quad (f) z = (\sqrt{3} - i)^6.$$

4. Se $z = 2i$ e $w = 3e^{i\pi/3}$, represente no plano \mathbb{C} os números complexos z , $z + w$, $z - w$ e \bar{w} .

5. Usando a forma polar, deduza que:

$$(a) i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2 + 2i\sqrt{3} \quad (b) \frac{5i}{2 + i} = 1 + 2i \quad (c) (-1 + i)^7 = -8(1 + i)$$

6. Use a Fórmula de De Moivre

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

e comprove as seguintes relações trigonométricas:

$$(a) \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \quad e \quad \operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta.$$

$$(b) \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta \quad e \quad \operatorname{sen}(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta.$$

7. Calcule o valor de $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}\right)^{10}$.

8. Em cada caso, reduza os números z e w à forma polar e encontre as formas polares de $z \cdot w$ e z/w .

$$(a) z = \sqrt{3} + 3i, w = \frac{1}{2}(3 - i\sqrt{3}) \quad (b) z = 1 + i, w = \sqrt{3} + i \quad (c) z = 1 + 2i, w = 2 + i.$$

9. Usando a forma polar, mostre que $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ é raiz da equação $z^4 - (1 + 4i)z^2 + 4i = 0$.

10. Se $z \cdot w \neq 0$, mostre que $\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = |z||w| \operatorname{se}$, e somente se, $\arg z - \arg w = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Neste caso, tem-se $|z + w| = |z| + |w|$.

11. Demonstre a identidade: $(1 + i \tan \theta)(1 - i \tan \theta)^{-1} = e^{2i\theta}$.

1.3 Potências & Raízes

Dados os números complexos $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$, vimos que $z \cdot w = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$ e considerando $w = z$, obtemos indutivamente:

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Se definirmos $z^{-n} = (1/z)^n$, teremos:

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left[(1/r)e^{i(-\theta)} \right]^n = (1/r)^n e^{in(-\theta)} = r^{-n} e^{i(-n)\theta}.$$

Assim, $z^n = r^n e^{in\theta}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ e, em particular, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, isto é:

$$\boxed{(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots}$$

As potências racionais de um número complexo z são estabelecidas de forma natural:

$$\boxed{z^{p/q} = \left(z^{1/q} \right)^p, \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0,}$$

onde $z^{1/q}$ é o número complexo w , tal que $w^q = z$. Temos as seguintes propriedades:

- **Produto** $z^r \cdot z^s = z^{r+s}, \quad r, s \in \mathbb{Q}.$
- **Quociente** $\left(\frac{z}{w} \right)^r = \frac{z^r}{w^r}, \quad r \in \mathbb{Q}, \quad w \neq 0.$

1.3.1 Raízes da Unidade

Uma raiz n -ésima (ou de ordem n) da unidade é qualquer número complexo z , tal que $z^n = 1$. Se considerarmos $z = r e^{i\theta}$, teremos

$$z^n = 1 \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow r^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)] = 1$$

e daí resulta que $r^n = 1$ e $n\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\boxed{z^n = 1 \Leftrightarrow z = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z},}$$

e as n raízes distintas da equação $z^n = 1$ são, portanto:

$$\boxed{z_k = \cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1.} \tag{1.19}$$

Se considerarmos $w_n = \cos(2\pi/n) + i \operatorname{sen}(2\pi/n)$, teremos $w_n^n = 1$ e as n raízes da equação $z^n = 1$ são precisamente $1, w_n, w_n^2, \dots, w_n^{n-1}$.

EXEMPLO 1.3.1 As raízes da equação $z^2 = 1$ são ± 1 . No caso $n = 3$, resulta de (1.19) que as raízes da equação $z^3 = 1$ são:

$$z_0 = e^0 = 1, \quad z_1 = e^{i(2\pi/3)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad z_2 = e^{i(4\pi/3)} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

EXEMPLO 1.3.2 Vamos encontrar as quatro raízes da equação $z^4 = 1$.

Solução: Neste caso, $n = 4$ e de (1.19) resulta:

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow z = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (1.20)$$

Considerando em (1.20) sucessivamente $k = 0, 1, 2, 3$ encontramos as raízes

$$z_0 = 1, \quad z_1 = i, \quad z_2 = -1, \quad \text{e} \quad z_3 = -i.$$

Na Figura 1.4 ilustramos graficamente as raízes de $z^2 = 1$, $z^3 = 1$ e $z^4 = 1$. Para $n \geq 3$, as n raízes da equação $z^n = 1$ são vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência $|z| = 1$.

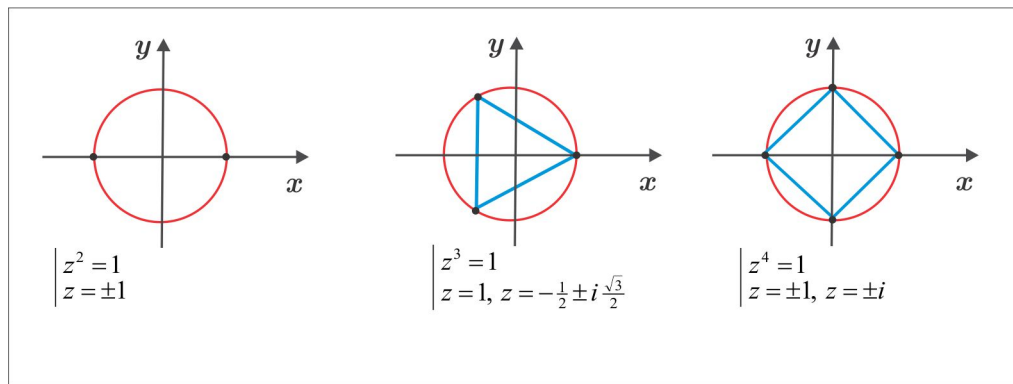


Figura 1.4: Raízes da unidade.

Em uma situação mais geral, dado um número complexo não nulo $w = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ temos:

$$\begin{aligned} z^n = w &\Leftrightarrow r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \\ &\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

e as n raízes distintas da equação $z^n = w$ são precisamente

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (1.21)$$

Se $w_n = \cos(2\pi/n) + i \operatorname{sen}(2\pi/n)$ e z_0 é uma solução particular da equação $z^n = w$, as n raízes complexas da equação $z^n = w$ são dadas por:

$$z_0, \quad z_0 w_n, \quad z_0 w_n^2, \quad \dots, \quad z_0 w_n^{n-1}.$$

OBSERVAÇÃO 1.3.3 Embora o cálculo de raízes utilizando a forma polar tenha caráter geral, o cálculo também pode ser feito utilizando a forma cartesiana. Por exemplo, para resolver a equação $z^2 = 2i$, escrevemos $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, e obtemos

$$z^2 = 2i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 2i = -7 - 24i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases}$$

e daí resulta $y = 1/x$ e $x^4 = 1$, isto é, $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. Logo, $z = \pm(1 + i)$.

EXEMPLO 1.3.4 Vamos encontrar as raízes da equação $z^2 = -7 - 24i$.

Solução: Considerando $z = x + iy$, temos

$$z^2 = -7 - 24i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 \\ 2xy = -24 \end{cases} \quad (1.22)$$

e resolvendo o sistema (1.22), encontramos $x = \pm 3$ e $y = -12/x$. Assim, as raízes são $z = \pm(3 - 4i)$.

EXEMPLO 1.3.5 Neste exemplo vamos calcular o valor de $\left| \sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}} \right|$, sendo $\sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}}$ qualquer raiz da equação $z^3 = 7 + i\sqrt{15}$.

Solução: Se $w = 7 + i\sqrt{15}$, com $\text{Arg}(w) = \varphi$, então $|w| = \sqrt{49 + 15} = 8$ e de (1.21) resulta:

$$z = \sqrt[3]{7 + i\sqrt{15}} \Leftrightarrow z^3 = 7 + i\sqrt{15} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} e^{i(\varphi + 2k\pi)/3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Logo, $|z| = \sqrt[3]{8} = 2$.

EXEMPLO 1.3.6 Resolver a equação $z^2 = -15 - 8i$.

Solução: Suponhamos $z = x + iy$ e observemos que:

$$\begin{aligned} x + iy &= \sqrt{-15 - 8i} \Leftrightarrow (x + iy)^2 = -15 - 8i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -15 - 8i \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = -15 \quad \text{e} \quad 2xy = -8, \end{aligned}$$

de onde resulta $x = \pm 1$ e $y = \mp 4$. Assim, os valores de $\sqrt{-15 - 8i} = \pm(1 - 4i)$.

EXEMPLO 1.3.7 Resolver a equação quadrática $az^2 + bz + c = 0$, sendo $a \neq 0$.

Solução: Transpondo c para o 2º membro e dividindo a equação por a , encontramos:

$$z^2 + \frac{b}{a}z = -\frac{c}{a} \quad (1.23)$$

e para completar o quadrado, adicionamos $(b/2a)^2$ aos dois lados da equação (1.23) e obtemos:

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Por fim, extraindo a raiz quadrada para encontrar

$$z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{isto é,} \quad z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

EXEMPLO 1.3.8 Resolver a equação quadrática $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

Solução: Considerando $a = 1$, $b = 2i - 3$ e $c = 5 - i$, temos, do Exemplo 1.3.7, que as raízes são:

$$z = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{(2i - 3)^2 - 4(5 - i)}}{2} = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{-15 - 8i}}{2}.$$

Ora, do Exemplo 1.3.6 temos $\sqrt{-15 - 8i} = \pm(1 - 4i)$ e, portanto, as raízes são $z_1 = 2 - 3i$ ou $z_2 = 1 + i$.

EXEMPLO 1.3.9 Resolver a equação biquadrada $z^4 - (1 + 4i)z^2 + 4i = 0$.

Solução: Efetuando o completamento do quadrado, vemos que a equação é equivalente a

$$\left[z^2 - \frac{1}{2}(1 + 4i)\right]^2 = \frac{1}{4}(-15 - 8i)$$

e daí resulta

$$z^2 = \frac{1}{2}(1 + 4i) \pm \frac{1}{2}\sqrt{-15 - 8i}.$$

No Exemplo 1.3.6), encontramos $\sqrt{-15 - 8i} = \pm(1 - 4i)$ e, sendo assim:

$$z^2 = \frac{1}{2}(1 + 4i) \pm \frac{1}{2}(1 - 4i) \Leftrightarrow z^2 = 1 \quad \text{ou} \quad z^2 = 4i,$$

isto é, $z = \pm 1$ ou $z = \pm 2\sqrt{i}$. Para concluir, observamos que $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ e obtemos as raízes $z = \pm 1$ e $z = \pm(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$.

EXEMPLO 1.3.10 Em (1.21), com $n = 5$, consideramos $w = -32$ e $\varphi = \pi$ e encontramos as cinco raízes da equação $z^5 = -32$:

$$z_0 = 2e^{i\pi/5}, \quad z_1 = 2e^{i3\pi/5}, \quad z_2 = 2e^{i\pi} = -2, \quad z_3 = 2e^{i7\pi/5} \quad \text{e} \quad z_4 = 2e^{i9\pi/5}.$$

Os valores dessas raízes, indicados na Figura 1.5, estão igualmente espaçados ao longo da circunferência de centro na origem e raio $R = 2$ e constituem os vértices de um pentágono regular.

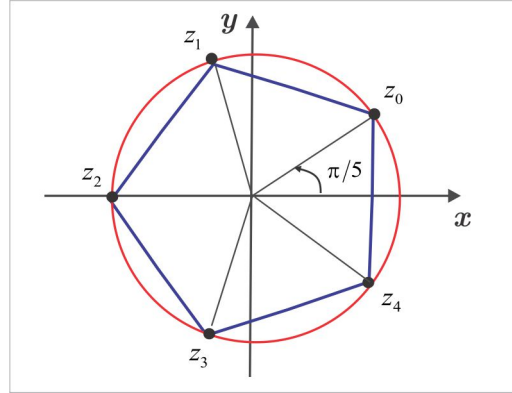


Figura 1.5: Raízes da equação $z^5 = -32$.

EXEMPLO 1.3.11 Vamos decompor o polinômio $z^4 + 1$ em fatores quadráticos com coeficientes reais.

Solução: Iniciamos com a fatoração $z^4 + 1 = (z^2 - i)(z^2 + i)$, que não atende ao que se pede, tendo em vista que os coeficientes não são todos reais. Se $w^2 = i$, então $\bar{w}^2 = -i$ e obtemos:

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= (z^2 - i)(z^2 + i) = (z^2 - w^2)(z^2 - \bar{w}^2) = (z - w)(z + w)(z - \bar{w})(z + \bar{w}) \\ &= [(z + w)(z + \bar{w}) \cdot (z - w)(z - \bar{w})] \\ &= [z^2 + (w + \bar{w}) \cdot z + |w|^2] \cdot [z^2 - (w + \bar{w}) \cdot z + |w|^2] \\ &= [z^2 + 2 \operatorname{Re}(w) \cdot z + |w|^2] \cdot [z^2 - 2 \operatorname{Re}(w) \cdot z + |w|^2]. \end{aligned}$$

Para concluir, consideramos $w = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e encontramos: $z^4 + 1 = (z^2 + \sqrt{2}z + 1) \cdot (z^2 - \sqrt{2}z + 1)$.

1. Encontre todos os números complexos z , tais que $z^3 = \bar{z}$.
2. Encontre todos os valores inteiros de n para os quais $(1 - \sqrt{3}i)^n$ é um número real.
3. Determine os valores principais de:

(a) $(2i)^{1/2}$ (b) $(-i)^{1/3}$ (c) $8^{1/6}$ (d) $(-\sqrt{3} + i)^{3/2}$ (e) $(-1)^{-3/4}$

4. Se w é uma raiz n -ésima da unidade, $w \neq 1$, use a identidade (1.5) e mostre que

$$1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} = 0.$$

Agora, calcule o valor da soma: $S = 1 + 2w + 3w^2 + 3w^3 + \dots + nw^{n-1}$.

5. Demonstre a identidade:

$$\sqrt{z} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(|z| + \operatorname{Re}(z))} + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \sqrt{\frac{1}{2}(|z| - \operatorname{Re}(z))} \right].$$

Use esta identidade e resolva as equações:

$$(a) z^2 + z + 1 = i \quad (b) z^2 - 3z + 3 = i \quad (c) z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0.$$

6. Se N é um inteiro ≥ 4 , mostre que os possíveis valores de $1 + i + i^2 + \dots + i^N$ são 1, $1 + i$, i ou 0, conforme o resto da divisão de N por 4 seja 3, 2, 1 ou 0.

7. Se $-\pi \leq \theta \leq \pi$, use a identidade (1.5) e estabeleça as relações:

$$(a) 1 + \cos \theta + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}[(n + 1/2)\theta]}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)}.$$

$$(b) \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen}(2\theta) + \dots + \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{1}{2} \operatorname{cotg}(\theta/2) - \frac{\cos[(n + 1/2)\theta]}{2 \operatorname{sen}(\theta/2)}.$$

8. Resolva em \mathbb{C} as seguintes equações:

$$(a) z^2 = 1 - i\sqrt{3} \quad (b) z^4 = -16 \quad (c) z^4 - (1 - 2i)z^2 - 1 - i = 0$$

$$(d) z^7 = -1 - i \quad (e) (\bar{z})^3 = -i \quad (f) z^4 - (1 - i)z^2 = i$$

9. Mostre que as raízes n -ésimas do número complexo z formam um polígono regular de n lados, inscrito em uma circunferência de raio $R = \sqrt[n]{|z|}$.

10. Se z_1, z_2 e z_3 são as raízes complexas da equação $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$, com $a_3 \neq 0$, mostre que $z_1 + z_2 + z_3 = -a_2/a_3$ e $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -a_0/a_3$. Generalizando, prova-se que a soma e o produto das n raízes z_1, z_2, \dots, z_n da equação polinomial

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0,$$

são, tais que:

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{e} \quad z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}.$$

11. Se w é uma raiz da equação $w^2 = \lambda i$, onde λ é um número real não nulo, imitando o que foi feito no Exemplo 1.3.11, obtemos a fatoração

$$z^4 + \lambda^2 = (z^2 + 2 \operatorname{Re}(w) \cdot z + |w|^2) \cdot (z^2 - 2 \operatorname{Re}(w) \cdot z + |w|^2).$$

Decomponha $z^4 + 9$ em fatores quadráticos, com coeficientes reais.

1.4 Topologia do Plano \mathbb{C}

Nos próximos capítulos apresentaremos os conceitos de limite, derivada e integral para funções de uma variável complexa $z = x + iy$, e é necessário apresentarmos os conceitos topológicos e terminologias com relação a determinados subconjuntos do plano complexo.

Fixemos um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ no plano \mathbb{C} e seja $\delta > 0$ um número real. A δ -vizinhança de centro z_0 e raio δ é, por definição, o subconjunto:

$$V_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}.$$

Considerando que a distância de um ponto $z = x + iy$ ao ponto z_0 é dada por

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

vemos que os pontos que satisfazem à desigualdade $|z - z_0| < \delta$, são internos ao círculo de centro em z_0 e raio δ . Geometricamente, $V_\delta(z_0)$ é o *disco* de centro z_0 e raio δ , como indica a Figura 1.6. A linha pontilhada indica que os pontos da circunferência não fazem parte da vizinhança.

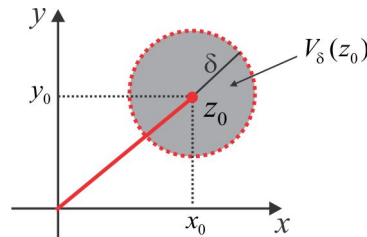


Figura 1.6: Vizinhança de raio δ .

Dado um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$, a posição relativa do ponto z_0 em relação a S é caracterizada por:

- (a) Existe uma δ -vizinhança de z_0 totalmente contida em S , isto é, existe um $\delta > 0$, tal que $V_\delta(z_0) \subset S$. Neste caso, diremos que z_0 é *Ponto Interior* ao conjunto S .
- (b) Existe uma δ -vizinhança de z_0 inteiramente contida no *complementar*¹ de S , isto é, existe $\delta > 0$, tal que $V_\delta(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus S$. Neste caso, z_0 é denominado *Ponto Exterior* ao conjunto S .
- (c) Qualquer δ -vizinhança de z_0 contém algum ponto de S e algum ponto do complementar de S , isto é, $V_\delta(z_0) \cap S \neq \emptyset$ e $V_\delta(z_0) \cap (\mathbb{C} \setminus S) \neq \emptyset$, $\forall \delta > 0$. Este é o caso em que o ponto z_0 é dito *Ponto de Fronteira* do conjunto S .

NOTAÇÃO O conjunto constituído de todos os pontos interiores ao conjunto S , será representado por $\text{int}(S)$ enquanto, $\text{ext}(S)$ indicará o conjunto de todos os pontos exteriores ao conjunto S . O conjunto dos pontos de fronteira de S será indicado por ∂S . É claro que $\text{int}(S) \subset S$ e que os subconjuntos $\text{int}(S)$, ∂S e $\text{ext}(S)$ são disjuntos (sem ponto em comum), isto é:

$$\text{int}(S) \cap \partial S = \emptyset, \quad \text{ext}(S) \cap \partial S = \emptyset \quad \text{e} \quad \text{int}(S) \cap \text{ext}(S) = \emptyset.$$

DEFINIÇÃO 1.4.1 Um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ denomina-se **Aberto** quando $S \cap \partial S = \emptyset$, isto é, todos os seus pontos são pontos interiores. Neste caso, se z_0 é um ponto de S , existe uma δ -vizinhança de z_0 inteiramente contida em S .

DEFINIÇÃO 1.4.2 Um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ denomina-se **Fechado** quando $\partial S \subset S$, ou seja, o conjunto S contém todos os seus pontos de fronteira.

EXEMPLO 1.4.3 Uma vizinhança V_δ em \mathbb{C} é um conjunto aberto e conexo². Um conjunto aberto e conexo recebe a denominação de **Domínio**. Seja $S = V_\delta(z_0)$ e mostremos que todo ponto z de S é um ponto interior. Se considerarmos $\delta^* = \delta - |z - z_0|$, então dado $w \in V_{\delta^*}(z)$, temos pela Desigualdade Triangular

$$|w - z_0| \leq |w - z| + |z - z_0| < \delta^* + |z - z_0| = \delta,$$

e, portanto, $w \in S$. Logo, $V_{\delta^*}(z) \subset S$, mostrando que $z \in \text{int}(S)$.

¹O complementar de S , representado por $\mathbb{C} \setminus S$, é o conjunto dos números complexos que não pertencem a S .

²Um conjunto aberto A é conexo se quaisquer dois pontos em A podem ser ligados por uma poligonal inteiramente contida em A .

EXEMPLO 1.4.4 Para mostrar que conjunto $S = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) < 1\}$ é um domínio, fixemos $z = a + ib$, com $b < 1$, em S , e seja $\delta = \min\{|b|, 1 - |b|\}$. Mostremos que a vizinhança $V_\delta(z)$ está contida em S . De fato, dado $w = x + iy \in V_\delta(z)$, então:

$$|y - b| \leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = |w - z| < \delta,$$

e, conseqüentemente:

$$y \leq |y| \leq |y - b| + |b| < \delta + |b| < 1 \Rightarrow w \in S$$

e com isto mostramos que S é um conjunto aberto. Por fim, ressaltamos que o segmento de reta ligando dois pontos z e w de S está inteiramente contido em S e isto mostra que S é conexo.

O seguinte resultado relaciona os conceitos de *conjunto aberto* e *conjunto fechado* e sua demonstração será apresentada de forma breve e merece reflexão.

LEMA 1.4.5 Um subconjunto S é aberto se, e somente se, seu complementar $\mathbb{C} \setminus S$ é fechado.

PROVA Suponhamos que S seja fechado e seja z_0 um ponto de $\mathbb{C} \setminus S$. Como $\partial S \subset S$, segue que $z_0 \notin \partial S$ e, sendo assim, $z_0 \in \operatorname{int}(\mathbb{C} \setminus S)$. Reciprocamente, se $\mathbb{C} \setminus S$ é aberto e $z_0 \in \partial S$, então $z_0 \notin \mathbb{C} \setminus S$, tendo em vista que

$$\partial S \cap (\mathbb{C} \setminus S) = \partial S \cap \operatorname{int}(\mathbb{C} \setminus S) = \emptyset.$$

Logo, $z_0 \in S$ e, portanto, $\partial S \subset S$, mostrando que S é fechado. ■

EXEMPLO 1.4.6 O conjunto $S = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$ é fechado, porque sua fronteira ∂S é a reta $\operatorname{Im}(z) = 1$ e está inteiramente contida no conjunto S .

DEFINIÇÃO 1.4.7 Um subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ denomina-se *Limitado* quando existir um raio $R > 0$, tal que $S \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, isto é,

$$|z| \leq R, \quad \forall z \in S.$$

EXEMPLO 1.4.8 Qualquer disco $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ é um subconjunto limitado e fechado. A fronteira do disco D_R é a circunferência

$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}.$$

Um subconjunto do plano \mathbb{C} que é, ao mesmo tempo, limitado e fechado, recebe a denominação de **Conjunto Compacto**.

DEFINIÇÃO 1.4.9 Um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ é um **Ponto de Acumulação** de S quando toda vizinhança de z_0 contiver um ponto de S , distinto de z_0 . O conjunto dos pontos de acumulação de S será indicado por S' , isto é:

$$z_0 \in S' \Leftrightarrow \forall \delta > 0, V_\delta(z_0) \cap (S \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset.$$

EXEMPLO 1.4.10 Para deduzir que a origem $z = 0$ é o único ponto de acumulação do conjunto

$$S = \{i, i/2, i/3, \dots\}$$

notamos que $0 \notin S$, mas dado um raio $\delta > 0$, a vizinhança $V_\delta(0)$ contém os pontos $z_n = i/n$ do conjunto S , seja qual for o inteiro n , com $1/n < \delta$ e isto mostra que $0 \in S'$. Para concluir que 0 é o único ponto de acumulação de S , observamos que:

(i) dado $z_0 = x_0 + iy_0$ fora de S , então $V_\delta(z_0) \cap S = \emptyset$, com $\delta = |x_0|/2$ e

(ii) se $z = i/n$ é um ponto de S e $\delta < \frac{1}{n(n+1)}$, então $V_\delta(z) \cap S = \{z\}$.

EXEMPLO 1.4.11 Consideremos os subconjuntos

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} \quad e \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2 \text{ e } |z| > 1\},$$

ilustrados graficamente na Figura 1.7, onde observamos que:

$$S'_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} \quad e \quad S'_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2 \text{ e } |z| \geq 1\}.$$

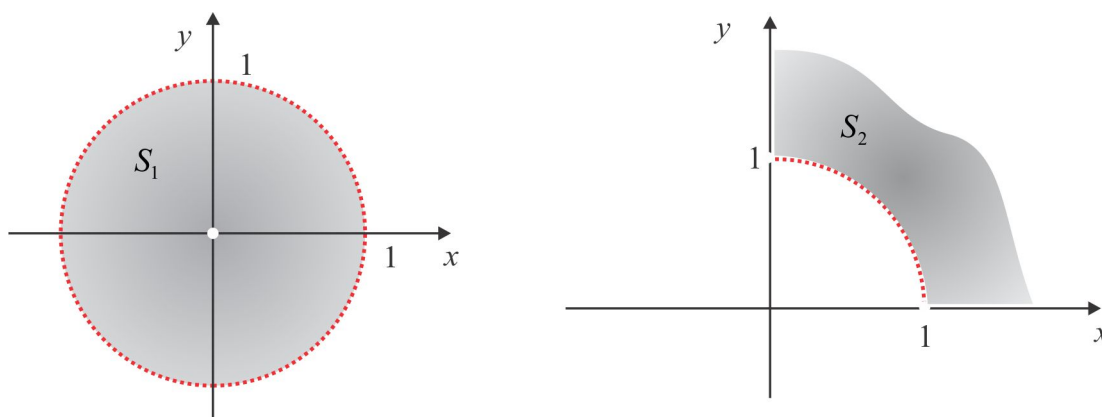


Figura 1.7: Conjuntos S_1 e S_2 do Exemplo 1.4.11

1.4.1 Convergência \times Topologia

Por *Sequência de números complexos* entendemos uma função

$$z : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

que associa a cada número natural n um número complexo $z(n) = z_n$, denominado *n-ésimo termo* ou *termo geral* da sequência. Faremos referência ao termo geral z_n como sendo a sequência $z : n \mapsto z_n$. A cada sequência complexa (z_n) corresponde um par de sequências reais (x_n, y_n) , sendo $x_n = \operatorname{Re}(z_n)$ e $y_n = \operatorname{Im}(z_n)$, de modo que as propriedades básicas estabelecidas para sequências reais são herdadas pelas sequências complexas.

DEFINIÇÃO 1.4.12 (Conceito de Limite) *A sequência (z_n) tem limite z ou converge para z , e anota-se $z = \lim z_n$ ou $z_n \rightarrow z$, quando a cada raio $\varepsilon > 0$ corresponder um índice $N \in \mathbb{N}$, tal que:*

$$z_n \in V_\varepsilon(z), \quad \forall n \geq N.$$

Dito de outra forma, temos:

$$z = \lim z_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |z_n - z| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

O Exercício 8 a seguir, estabelece que:

$$\lim z_n = z \Leftrightarrow \lim [\operatorname{Re}(z_n)] = \operatorname{Re}(z) \quad \text{e} \quad \lim [\operatorname{Im}(z_n)] = \operatorname{Im}(z).$$

e a convergência da sequência complexa (z_n) se reduz à convergência das sequências reais $\operatorname{Re}(z_n)$ e $\operatorname{Im}(z_n)$. As propriedades básicas de convergência, no caso complexo, decorrem das propriedades do limite no caso real. Por exemplo, se $z_n \rightarrow z$ e $w_n \rightarrow w$, então a sequência $(z_n + \lambda w_n)$ converge para o número complexo $z + \lambda w$, sendo λ qualquer número complexo fixado. De fato, basta notar que:

$$z_n + \lambda w_n = (x_n + iy_n) + (\lambda u_n + i\lambda v_n) \rightarrow (x + iy) + \lambda(u + iv) = z + \lambda w.$$

As demais propriedades podem ser comprovadas de forma similar ao caso real. Temos:

- (a) $|z_n| \rightarrow |z|$.
- (b) $z_n w_n \rightarrow z w$.
- (c) $z_n / w_n \rightarrow z / w$, $w \neq 0$ e $w_n \neq 0, \forall n$.

PROPOSIÇÃO 1.4.13 Com respeito a um subconjunto $F \subset \mathbb{C}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é fechado.

(b) Se (z_n) é uma sequência de pontos de F , convergindo para z , então $z \in F$.

DEMONSTRAÇÃO Para mostrar que (a) \Rightarrow (b), suponha que F seja fechado e consideremos uma sequência (z_n) em F , com $\lim z_n = z$. Se z não fosse um ponto de F , então z estaria no complementar $\mathbb{C} \setminus F$, que é aberto, e, portanto, existiria um raio $\varepsilon > 0$, tal que $V_\varepsilon(z) \subset \mathbb{C} \setminus F$. Desde que $z_n \rightarrow z$, a partir de certa ordem N temos que $z_n \in V_\varepsilon(z)$ e isto contradiz o fato de $z_n \in F$, $\forall n$. Por outro lado, se F não fosse fechado, então $\mathbb{C} \setminus F$ não seria aberto e existiria um ponto $z \notin F$, tal que

$$V_{1/n}(z) \cap F \neq \emptyset, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

e, escolhendo para cada n um número complexo z_n na interseção $V_{1/n} \cap F$, a sequência (z_n) assim construída estaria em F e convergiria para z , contradizendo a hipótese (b). ■

1. Esboce e classifique em Aberto (A) ou Fechado (F) os subconjuntos do plano complexo caracterizados por:

(a) $|\operatorname{Re} z| < 2$

(b) $|\operatorname{Im} z| > 1$

(c) $|z - 4| > |\bar{z}|$

(d) $0 < \arg(z) < 3\pi/4, \quad |z| > 2$

(e) $\operatorname{Re} z > 0$ e $1 < |z - 2i| < 2$

(f) $0 \leq \arg(z) \leq \pi/4, \quad z \neq 0$

(g) $\operatorname{Re}(1/z) < 1/2$.

(h) $\operatorname{Im}(1/\bar{z}) \geq 1/2$

(i) $\operatorname{Re}(z^2) \geq 0$.

(j) $\operatorname{Im}(z^3) < 0$.

2. Identifique as curvas do plano complexo descritas por:

(a) $|z - 2| = |z - 3i|$

(b) $|z - 1 + i| = |3 + i - z|$

(c) $|z - i| + |z + 2| = 3$

(d) $|z + 1| = 2|z - i|$

(e) $\operatorname{Re}(1 - z) = |z|$

(f) $z = z_0 + re^{i\theta}, \quad 0 < \theta \leq 2\pi$

3. Dado um número real λ , identifique o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : \lambda|z| = |z - 1|\}$.

4. Sejam R uma constante positiva e z_0 um número complexo fixado. Identifique o subconjunto do plano complexo descrito pela equação $|z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$.

-
5. Por que o conjunto vazio \emptyset é aberto? Por que ele é um conjunto fechado?
6. Mostre que a união e a interseção de dois conjuntos abertos é um conjunto aberto. O que se pode dizer sobre a união e a interseção de dois conjuntos fechados?
7. Dê exemplo de uma família infinita $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$ de conjuntos abertos do plano \mathbb{C} , cuja interseção $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ não é um conjunto aberto.
8. Mostre que $\lim z_n = z$ se, e somente se, $\lim [\operatorname{Re}(z_n)] = \operatorname{Re}(z)$ e $\lim [\operatorname{Im}(z_n)] = \operatorname{Im}(z)$. Em particular, se a sequência (z_n) é constante, digamos, $z_n = z, \forall n$, então $\lim z_n = z$.
9. Com base no Exercício precedente, calcule os limites:
- (a) $\lim \left(\frac{n+1+in}{n+1} \right)$ (b) $\lim \left(\frac{1+i \ln n}{n} \right)$.
10. Mostre que $\lim |z_n| = 0$ se, e somente se, $\lim z_n = 0$. Dê exemplo de uma sequência divergente (z_n) , com $(|z_n|)$ convergente.
11. Se $|z| < 1$, mostre que $\lim (z^n) = 0$.
-

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.1

1. Das operações com números complexos, resulta:

$$(a) (2 - i) + (3 + 4i) = 5 + 3i.$$

$$(b) (2 + i) - i(3 + 4i) = 2 + i - 3i + 4 = 6 - 2i.$$

$$(c) (1 + i) \cdot (2 + 2i) = 0 + 4i = 4i.$$

$$(d) (1 - i)^{12} = [(1 - i)^2]^6 = (-2i)^6 = 64i.$$

$$(e) (1 - i)(\sqrt{3} + i) = 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i.$$

$$(f) (2 - i) \cdot (2 + i) = 2^2 - i^2 = 5.$$

$$(g) (1 - 2i)(3 + 2i)^{-1} = \frac{1 - 2i}{3 + 2i} = \frac{(1 - 2i) \cdot (3 - 2i)}{13} = -\frac{1}{13} - \frac{8}{13}i.$$

$$(h) i^{-45} = i^{-44} \cdot i^{-1} = \frac{1}{i} = -i.$$

2. A partir da relação $\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$, encontramos:

$$(a) \frac{2}{2 - 3i} = \frac{4}{13} + \frac{6}{13}i \quad (b) \frac{2 + i}{2 - 3i} = \frac{1}{13} + \frac{8}{13}i \quad (c) \frac{1}{(1 - i)^2} = \frac{i}{2} \quad (d) \frac{5 + 5i}{3 - 4i} + \frac{20}{3 + 4i} = 3 - i..$$

(e) Considerando que $i^{30} = -1$ e $i^{19} = -i$, obtemos³:

$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1} = 1 + i.$$

3. Os números x e y satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ -x + 2y = 5 \end{cases},$$

isto é, $x = -1$ e $y = 2$.

4. Dado um número complexo $z = x + iy$, recordemos que:

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad |re^{i\theta}| = r.$$

³De forma geral, temos: $i^n = (-1)^k$, se $n = 2k$, e $i^n = (-1)^k \cdot i$, se $n = 2k + 1$.

(a) $z = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5} \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 2/5.$

(b) $z = \frac{2+i}{3+4i} = \frac{(2+i) \cdot (3-4i)}{25} = \frac{10-5i}{25} \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = -1/5.$

(c) Se $z = x + iy$, então:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{|z^4|} - \frac{2xyi}{|z^4|} \Rightarrow \operatorname{Im}(1/z^2) = -\frac{2 \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z)}{|z|^4}.$$

(d) $\left| \frac{1+4i}{4+i} \right| = \frac{|1+4i|}{|4+i|} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = 1.$

(e) $|\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta| = \sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} = 1.$

5. Como ilustração, faremos os itens (c) e (d). Se $z = a + ib$ e $w = c + id$, então:

(c) $\overline{z \cdot w} = (ac - bd) - i(ad + bc)$ e $\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib) \cdot (c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc).$

(d) Primeiro, mostremos que $1/\overline{w} = \overline{(1/w)}$. De fato, notando que $1/w = \overline{w}/|w|^2$ e $1/\overline{w} = w/|w|^2$, temos:

$$1/\overline{w} = \frac{w}{|w|^2} = \frac{\overline{\overline{w}}}{|w|^2} = \overline{\left(\frac{\overline{w}}{|w|^2} \right)} = \overline{(1/w)}$$

e assim:

$$\overline{\left(\frac{z}{w} \right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{w} \right)} = \overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{w} \right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

6. Se $z = \frac{2 + \lambda i}{1 - i}$, então $\operatorname{Re}(z) = \frac{2 - \lambda}{2}$ e $\operatorname{Im}(z) = -\frac{2 + \lambda}{2}$. Sendo assim, z é real se $\lambda = -2$ e será imaginário puro quando $\lambda = 2$.

7. Use as propriedades da conjugação dadas no Exercício 5 da Seção 1.1.

8. Se $z = 3 + 2i$, então $P(3 - 2i) = P(\overline{z}) = \overline{P(z)} = 1 + 2i$. Logo, $|P(3 - 2i)| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$.

9. Lembramos que $z = a + ib$ é um número real se, e somente se, $\operatorname{Im}(z) = 0$, isto é, $b = 0$. Ora,

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow 2ib = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

10. Considerando $z = x + iy$, temos que $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ e $\overline{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$. Assim,

$$z^2 = \overline{z}^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 - y^2 - 2xyi \Leftrightarrow 2xy = 0.$$

Ora, $2xy = 0$ se, e só se, $x = 0$ (neste caso, z é imaginário puro) ou $y = 0$ (neste caso, z é real).

11. Das propriedades algébricas em \mathbb{C} e lembrando que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, temos:

$$\begin{aligned} |1 - z|^2 + |1 + z|^2 &= (1 - z) \cdot (1 - \bar{z}) + (1 + z) \cdot (1 + \bar{z}) \\ &= 1 - z - \bar{z} + z \cdot \bar{z} + 1 + z + \bar{z} + z \cdot \bar{z} = 2 + 2|z|^2. \end{aligned}$$

12. Considerando $n = 179$ e $z = i$, encontramos:

$$1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{179} = \frac{1 - i^{180}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{90}}{1 - i} = \frac{1 - 1}{1 - i} = 0.$$

13. Se $z = a + ib$ e $w = c + id$, as igualdades $|z| = |w|$ e $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)$ nos conduz ao sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \\ x = a \end{cases}$$

de onde deduzimos que $y = \pm b$. Logo, $z = a \pm ib$.

14. Utilizando os Produtos Notáveis (Lema 1.1.2), obtemos:

$$\begin{aligned} |z \pm w \cdot z|^2 &= |z|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(\bar{z} \cdot \overline{zw}) + |zw|^2 = |z|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(|z|^2 \cdot \bar{w}) + |z|^2 |w|^2 \\ &= |z|^2 \pm 2|z|^2 \operatorname{Re}(\bar{w}) + |z|^2 |w|^2 = |z|^2 \left[1 \pm 2 \operatorname{Re}(w) + |w|^2 \right]. \end{aligned}$$

15. Um cálculo direto nos conduz a:

$$i^n + i^{-n} = \frac{i^{2n} + 1}{i^n} = \frac{(-1)^n + 1}{i^n} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2/(-1)^k, & \text{se } n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Logo, os possíveis valores assumidos por $i^n + i^{-n}$ são: 0 e ± 2 .

16. Sabemos do Exercício 10 da Seção 1.1 que w é real se, e somente se, $w = \bar{w}$. Temos:

$$\bar{w} = \frac{\bar{z} - i\bar{z}}{\bar{z} - i\bar{z}} = \frac{\bar{z} + iz}{z + i\bar{z}} = \frac{i(-i\bar{z} + z)}{i(-iz + \bar{z})} = w.$$

17. Tendo em vista que $|\lambda| < 1$, então $|\lambda|^2 (1 - |z|^2) \leq 1 - |z|^2$ e, sendo assim, obtemos:

$$\begin{aligned} |z + \lambda| &\leq |1 + \bar{\lambda}z| \Leftrightarrow |z + \lambda|^2 \leq |1 + \bar{\lambda}z|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + |\lambda|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \leq 1 + |\lambda|^2 |z|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \\ &\Leftrightarrow |\lambda|^2 (1 - |z|^2) \leq 1 - |z|^2. \end{aligned}$$

Por fim, observamos que:

$$\begin{aligned} |z + \lambda| &= |1 + \bar{\lambda}z| \Leftrightarrow |z + \lambda|^2 = |1 + \bar{\lambda}z|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + |\lambda|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} = 1 + |\lambda|^2|z|^2 + \bar{\lambda}z + \lambda\bar{z} \\ &\Leftrightarrow |z|^2(1 - |\lambda|^2) \leq 1 - |\lambda|^2 \Leftrightarrow |z| = 1. \end{aligned}$$

18. Efetue a operação do lado direito para concluir.

19. Os possíveis valores de N são $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ e $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, conforme o resto da divisão de N por 4 seja 0, 1, 2 ou 3. Use o Exercício 1.3.4 da Seção 1.1 para concluir. Por exemplo, se o resto da divisão é 2, então $N = 4k + 2$ e encontramos:

$$\begin{aligned} 1 + i + i^2 + \dots + i^N &= \frac{1 - i^{N+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^{4k+2}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{2k+1}}{1 - i} \\ &= \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i. \end{aligned}$$

20. Com a notação binomial, devemos mostrar que:

$$(1 + z)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n-k+1}.$$

Admitindo a sentença válida pra $n \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned} (1 + z)^{n+1} &= (1 + z)(1 + z)^n = (1 + z) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k+1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} z^{n-k+1} &= 1 + z^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] z^{n-k+1} \\ &= \left[1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} z^{n-k+1} \right] + \left[z^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^{n-k+1} \right] \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} z^{n-j} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^{n-k+1} = (1 + z)^{n+1}. \end{aligned}$$

21. Admitindo a sentença válida para $n \geq 1$, temos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + \cdots + z_n + z_{n+1}| &\leq |z_1 + z_2 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \\ &\leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|. \end{aligned}$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.2

1. Se $\theta_1 = \text{Arg}(2 + i)$ e $\theta_2 = \text{Arg}(3 + i)$, então $\theta_1 = \arctan(1/2)$ e $\theta_2 = \arctan(1/3)$ e teremos:

$$\arg[(2 + i) \cdot (3 + i)] = \theta_1 + \theta_2.$$

Por outro lado, $(2 + i) \cdot (3 + i) = 5 + 5i$ e, portanto,

$$\pi/4 = \arg[(2 + i) \cdot (3 + i)] = \theta_1 + \theta_2.$$

2. Se $\theta = \text{Arg}(5 - i)$, então $4\theta = \text{Arg}(5 - i)^4$ e $\arctan \theta = -1/5$ e teremos:

$$\arg[(5 - i)^4 \cdot (1 + i)] = 4 \arctan(-1/5) + \pi/4.$$

Por fim, use $(5 - i)^4 \cdot (1 + i) = 956 - 4i$ e deduza que:

$$\arg[(5 - i)^4 \cdot (1 + i)] = \arctan(-4/956) = -\arctan(1/239).$$

3. Temos

$$\text{Arg}(2 - 2i) = -\pi/4 \quad \text{e} \quad \text{Arg}(\sqrt{3} - i)^6 = 6 \text{Arg}(\sqrt{3} - i) = -\pi$$

e, assim, $\text{Arg}(2 - 2i) + \text{Arg}(\sqrt{3} - i)^6 = -5\pi/4$.

4. Expresse o número complexo sob a forma $z = re^{i\theta}$, para descobrir o argumento.

(a) 0 (b) $-\pi/4$ (c) $-\pi/3$ (d) $-\pi/2$ (e) $5\pi/6$ (f) $-\pi$.

5. Veja a ilustração gráfica na Figura 1.8.

6. Como ilustração faremos os itens (b) e (c).

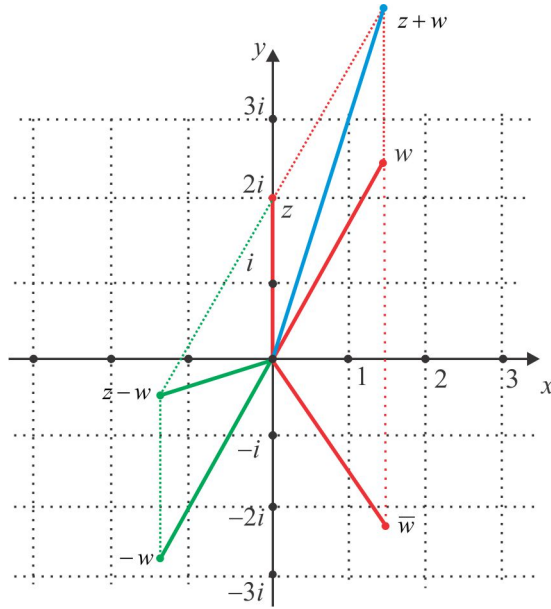


Figura 1.8:

(b) Se $\varphi = \text{Arg}(2 + i)$, então $2 + i = \sqrt{5}e^{i\varphi}$ e, portanto:

$$\frac{5i}{2+i} = \sqrt{5} e^{i(\frac{\pi}{2}-\varphi)} = \sqrt{5} \sin \varphi + i\sqrt{5} \cos \varphi.$$

Como $\text{tg } \varphi = 1/2$, segue que $\sin \varphi = 1/\sqrt{5}$ e $\cos \varphi = 2/\sqrt{5}$ e obtemos o resultado.

(c) Temos:

$$\begin{aligned} z &= -1 + i = \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i} \Rightarrow z^7 = (\sqrt{2})^7 e^{\frac{21\pi}{4}i} = 8\sqrt{2} e^{(6\pi - \frac{3\pi}{4})i} \\ &= 8\sqrt{2} e^{-\frac{3\pi}{4}i} = 8\sqrt{2} (\cos(3\pi/4) - i \sin(3\pi/4)) = -8(1 + i). \end{aligned}$$

7. Considere na Fórmula de De Moivre $n = 2$ e $n = 3$ para chegar aos resultados.

(a) No caso $n = 2$, temos:

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^2 &= \cos(2\theta) + i \sin(2\theta) \Leftrightarrow \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta \\ &\Leftrightarrow \cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{e} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

(b) No caso $n = 3$, proceda de forma similar!

8. Considerando que $1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm i\pi/3}$, encontramos $z = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$.

9. (a) Na forma exponencial, temos $z = 2\sqrt{3}e^{i\pi/3}$ e $w = \sqrt{3}e^{-i\pi/3}$, de modo que:

$$z \cdot w = 6e^{2k\pi i} \quad \text{e} \quad z/w = 2e^{(2\pi/3+2k\pi)i}.$$

10. Temos que $z = 2e^{-i3\pi/4}$ e substituindo na equação, encontramos:

$$\begin{aligned} z^4 - (1 + 4i)z^2 + 4i &= 16 e^{i3\pi} - (1 + 4i) 4e^{i3\pi/2} + 4i \\ &= -16 - (1 + 4i)(-4i) + 4i = 0. \end{aligned}$$

11. Se fizermos $z = re^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$, teremos:

$$z \cdot \bar{w} = r\rho e^{i(\theta-\varphi)} = r\rho [\cos(\theta - \varphi) + i \operatorname{sen}(\theta - \varphi)]$$

e, conseqüentemente:

$$\operatorname{Re}(z\bar{w}) = r\rho \cos(\theta - \varphi) = |z||w| \cos(\theta - \varphi).$$

Da última relação, resulta:

$$\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = |z||w| \Leftrightarrow \cos(\theta - \varphi) = 1 \Leftrightarrow \theta - \varphi = 2k\pi.$$

Neste caso, temos:

$$|z + w| = \left| re^{i\theta} + \rho e^{i(\theta+2n\pi)} \right| = (r + \rho) = |z| + |w|.$$

12. Usando identidades trigonométricas, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta} &= \frac{1 - \tan^2 \theta + 2i \tan \theta}{\sec^2 \theta} = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + 2i \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &= \cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta) = e^{2i\theta}. \end{aligned}$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.3

1. Se $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, então:

$$z^3 = \bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = x \\ y^3 - 3x^2y = y \end{cases} \quad (1.24)$$

e considerando que o sistema do lado direito de (1.24) não tem solução (real), no caso em que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, obtemos:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 & \text{ou} & y = \pm 1 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 & \text{ou} & x = \pm 1. \end{cases}$$

Assim, as soluções de $z^3 = \bar{z}$ são: $z = 0$, $z = \pm 1$ e $z = \pm i$.

2. A partir da relação

$$(1 - i\sqrt{3})^n = (2 e^{-i\pi/3})^n = 2^n [\cos(n\pi/3) - i \operatorname{sen}(n\pi/3)]$$

deduzimos que $(1 - i\sqrt{3})^n$ é um número real se $\operatorname{sen}(n\pi/3) = 0$, isto é, n for múltiplo inteiro de 3.

3. Recordemos que $w = z^{p/q}$ se, e somente se, $z^p = w^q$.

(a) $z^2 = 2i \Leftrightarrow z = \sqrt{2} [\cos(k\pi + \frac{\pi}{4}) + i \operatorname{sen}(k\pi + \frac{\pi}{4})] = \pm(1 + i)$.

(b) $z^3 = -i \Leftrightarrow z = \cos\left(\frac{2k\pi - \pi/2}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi - \pi/2}{3}\right) \Leftrightarrow z = i \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} - i)$.

(c) $z^6 = 8 \Leftrightarrow z = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right) \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Logo:

$$z = \pm\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \pm i\sqrt{3}) \quad \text{ou} \quad z = \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}).$$

(d) $z = (-\sqrt{3} + i)^{3/2} \Leftrightarrow z^2 = (-\sqrt{3} + i)^3 = (2e^{i5\pi/6})^3 = 8e^{i\pi/2}$. As raízes são: $z = \pm 2(1 + i)$.

(e) A equação $z = (-1)^{3/4}$ é equivalente a $z^4 = -1$, cujas raízes são: $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$.

4. Considerando que $w^n = 1$, por ser w uma raiz da unidade, e $w \neq 1$, obtemos:

$$1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = 0.$$

Para calcular o valor da soma $S = 1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \dots + nw^{n-1}$, observamos que:

$$S - wS = 1 + w + w^2 + w^3 + \dots + w^{n-1} - nw^n = -n$$

e daí resulta $S = \frac{-n}{1 - w}$.

5. Mostrar que $\sqrt{w} = \pm\xi$ é equivalente a mostrar que $w = \xi^2$. Se fizermos

$$\xi = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re}(w))} + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re}(w))} \right]$$

teremos

$$\begin{aligned}\xi^2 &= \frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re}(w)) - \frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re}(w)) \pm i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w)) \sqrt{|w|^2 - \operatorname{Re}(w)^2} \\ &= \operatorname{Re}(w) \pm i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im}(w)) \sqrt{\operatorname{Im}(w)^2} = \operatorname{Re}(w) + i \operatorname{Im}(w) = w.\end{aligned}$$

(a) Temos

$$z^2 + z + 1 = i \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} + i \Leftrightarrow z + \frac{1}{2} = \sqrt{w}, \quad w = -\frac{3}{4} + i.$$

Logo,

$$z + \frac{1}{2} = \pm \left[\sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \operatorname{Re}(w))} + i \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \operatorname{Re}(w))} \right] = \pm \left(\frac{1}{2} + i\right)$$

Assim, as raízes da equação $z^2 + z + 1 = i$ são precisamente $z = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + i\right)$, isto é, $z = i$ ou $z = -1 - i$.

6. Os possíveis valores de N são $4k$, $4k + 1$, $4k + 2$ e $4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$, conforme o resto da divisão de N por 4 seja 0, 1, 2 ou 3. Use o Exemplo 1.3.4 da Seção 1.1 para concluir. Por exemplo, se o resto da divisão é 2, então $N = 4k + 2$ e encontramos:

$$\begin{aligned}1 + i + i^2 + \dots + i^N &= \frac{1 - i^{N+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^{4k+2}}{1 - i} = \frac{1 - (i^2)^{2k+1}}{1 - i} \\ &= \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i.\end{aligned}$$

7. Como ilustração, faremos a parte (a). Usando a identidade

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1,$$

com $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $\theta \neq 0$, encontramos:

$$1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + \dots + e^{in\theta} = \frac{1 - \cos(n+1)\theta - i \operatorname{sen}(n+1)\theta}{(1 - \cos\theta) - i \operatorname{sen}\theta},$$

de onde resulta:

$$\begin{aligned}1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta &= \frac{1}{2} + \frac{\cos(n+1)\theta \cdot \cos\theta + \operatorname{sen}(n+1)\theta \cdot \operatorname{sen}\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{2(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(n+1/2)\theta \cdot \operatorname{sen}(\theta/2)}{1 - \cos\theta}.\end{aligned}$$

onde usamos a identidade $\cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{y-x}{2}\right)$. Para concluir a parte (a), use a identidade $1 - \cos\theta = 2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$. A identidade (b) é deduzida de forma similar, igualando as partes imaginárias.

8. No caso das equações biquadradas, procedemos como no Exemplo 1.3.9.

(a) Considerando $z = re^{i\theta}$, temos:

$$z^2 = 1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow z = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{2} \right) \right], \quad k = 0, 1,$$

isto é, $z = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} - i)$.

(b) As raízes são: $\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$.

(c) Efetuando o completamento do quadrado, chegamos a:

$$\left(z^2 - \frac{1}{2} + i \right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow z^2 = 1 - i \quad \text{ou} \quad z^2 = -i.$$

As raízes são, portanto: $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \mp i \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt[4]{2} [\pm \cos(\pi/8) \mp \operatorname{sen}(\pi/8)]$.

(d) Considerando que $|-1 - i| = \sqrt{2}$ e $\operatorname{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4$, temos:

$$z^7 = -1 - i \Leftrightarrow z^7 = \sqrt{2} e^{-i3\pi/4}$$

e as raízes são dadas por:

$$z_k = 2^{1/14} \left[\cos \left(\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{7} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{-3\pi/4 + 2k\pi}{7} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, 6.$$

(e) Temos que $\bar{z}^3 = -i$ se, e somente se, $z^3 = i$ e as raízes desta última equação são:

$$z_k = [\cos(\pi/6 + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\pi/6 + 2k\pi)], \quad k = 0, 1, 2.$$

(f) A equação é equivalente a $(z^2 - 1)(z^2 + i) = 0$, com raízes: $z = \pm 1$ ou $z = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2} - i\sqrt{2})$.

9. As n raízes complexas de $z = re^{i\theta}$ são

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

e como $|z_k| = \sqrt[n]{r}$, segue que as n raízes z_k estão igualmente espaçadas ao longo da circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Ressaltamos que $\arg(z_k) - \arg(z_{k-1}) = 2\pi/n$ e o comprimento do arco entre essas raízes é $s = 2\pi \sqrt[n]{r}/n$.

10. Temos que $a_3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = 0$ e efetuando diretamente o cálculo, chegamos a:

$$\begin{aligned} 0 &= a_3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\ &= a_3[z^3 - (z_1 + z_2 + z_3)z^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3] = 0. \end{aligned}$$

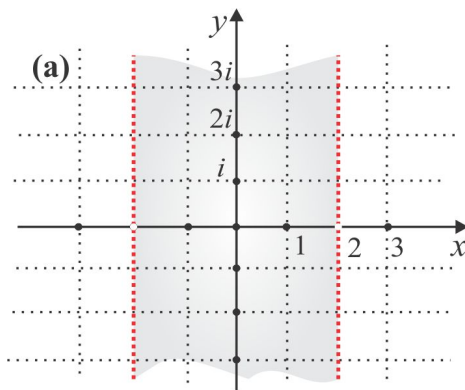
Daí resulta que:

$$-a_3(z_1 + z_2 + z_3) = a_2 \quad \text{e} \quad -a_3(z_1z_2z_3) = a_0.$$

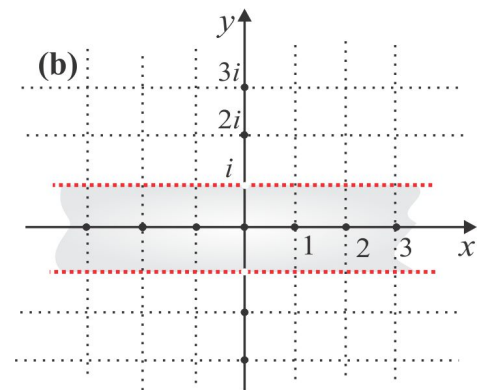
11. $z^4 + 9 = (z^2 + \sqrt{6}z + 3) \cdot (z^2 - \sqrt{6}z + 3).$

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.4

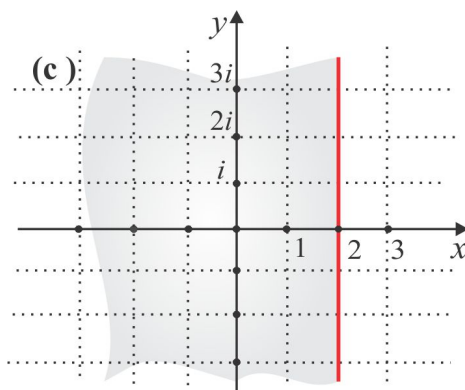
1. Podemos olhar a descrição do conjunto em coordenadas cartesianas, considerando $z = x + iy$.



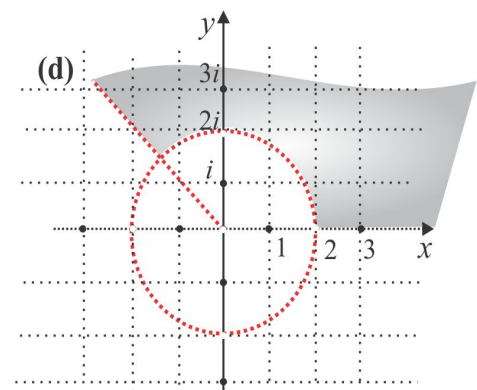
$$|\operatorname{Re}(z)| < 2 \Leftrightarrow |x| < 2 \quad (\text{A})$$



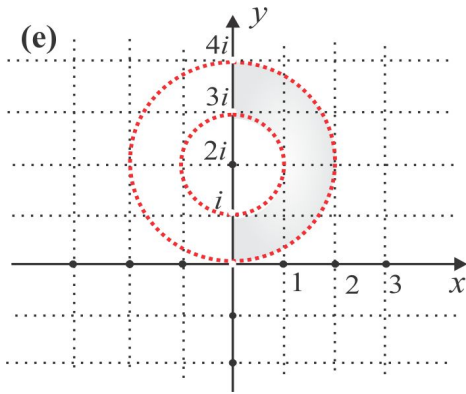
$$|\operatorname{Im}(z)| > 1 \Leftrightarrow |y| > 1 \quad (\text{A})$$



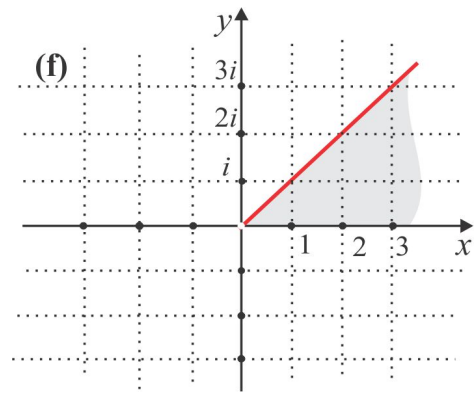
$$|z - 4| \leq \bar{z} \Leftrightarrow |x| \leq 2 \quad (\text{F})$$



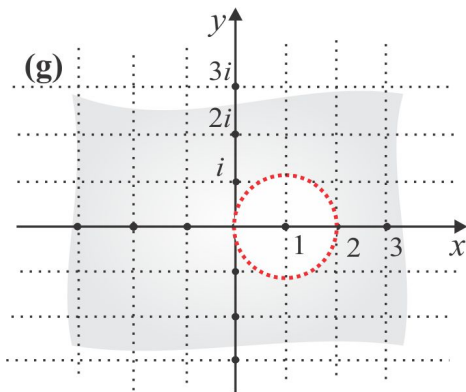
$$0 < \arg(z) < 3\pi/4, \quad |z| > 2 \quad (\text{A})$$



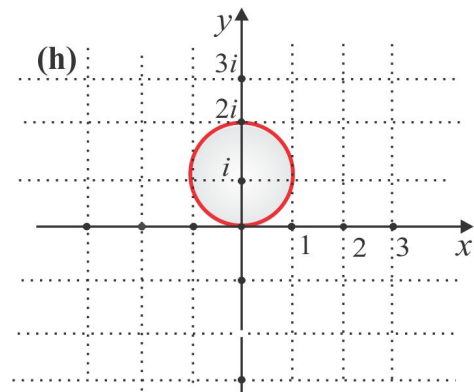
$\text{Re}(z) > 0, 1 < |z - 2i| < 2$ (A)



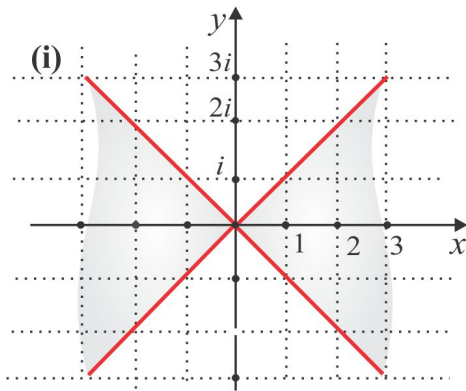
$0 \leq \arg(z) \leq \pi/4, z \neq 0$



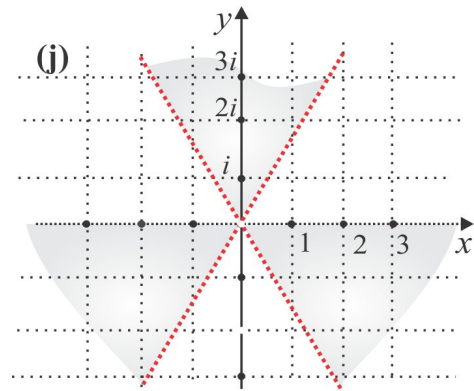
$|z - 1| < 1$ (A)



$|z - i| \leq 1$ (F)



$\text{Re}(z^2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$ (F)



$\text{Im}(z^3) < 0 \Leftrightarrow 3x^2y - y^3 < 0$ (A)

2. Em alguns casos, podemos considerar $z = x + iy$ e olhar a equação na forma cartesiana.

(a) $|z - 2| = |z - 3i| \Leftrightarrow 4x - 6y + 5 = 0.$ (Reta)

(b) $|z - 1 + i| = |3 + i - z| \Leftrightarrow 4x + 4y + 5 = 0.$ (Reta)

(c) $|z - i| + |z + 2| = 3.$ (Elipse com Focos: $z_1 = i$ e $z_2 = -2$)

- (d) $|z + 1| = 2|z - i|$. (Circunferência de centro $z_0 = 1 + 2i$ e raio $R = \sqrt{7}$)
- (e) $\operatorname{Re}(1 - z) = |z| \Leftrightarrow 1 - 2x = y^2$. (Parábola com Foco: $z_0 = -i/2$)
- (f) $z = z_0 + re^{i\theta} \Leftrightarrow |z - z_0| = r$. (Circunferência de centro z_0 e raio r)

3. Se $z = x + iy$, a equação se reduz a:

$$(\lambda^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2x = 1.$$

- Se $\lambda = 0$, o conjunto se reduz ao ponto $z = 1$.
- Se $\lambda = 1$, o conjunto se reduz ao ponto $z = 1/2$.
- Se $\lambda = -1$, o conjunto é vazio.
- Nos demais casos, o conjunto é a circunferência

$$(x - a)^2 + y^2 = 1 + a^2, \quad a = (\lambda^2 - 1)^{-1}.$$

4. Considerando $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e passando a equação $|z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2$ para coordenadas cartesianas, encontramos

$$(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2 = R^2,$$

que representa uma circunferência de centro z_0 e raio R .

5. O plano \mathbb{C} é o complementar do conjunto vazio. Considerando que o plano \mathbb{C} é, ao mesmo tempo, um conjunto aberto e também fechado, deduzimos que o conjunto vazio \emptyset é aberto e fechado!

6. Sejam S_1 e S_2 dois subconjuntos do plano \mathbb{C} e sejam $A = S_1 \cap S_2$ e $B = S_1 \cup S_2$.

(i) Se S_1 e S_2 são abertos, então A e B são abertos. De fato, dado z_0 em A , então $z_0 \in S_1 \cap S_2$ e, portanto, existem δ_1 e δ_2 positivos, tais que

$$V_{\delta_1}(z_0) \subset S_1 \quad \text{e} \quad V_{\delta_2}(z_0) \subset S_2.$$

Se considerarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, teremos $V_\delta(z_0) \subset S_1 \cap S_2$, isto é, $V_\delta(z_0) \subset A$. Por outro lado, dado z_1 em B , então $z_1 \in S_1$ ou $z_1 \in S_2$ e, portanto, $V_\delta(z_0) \subset B$.

(ii) Se S_1 e S_2 são fechados, então A e B são fechados. Passando aos complementares, temos:

$$\mathbb{C} \setminus A = \mathbb{C} \setminus (S_1 \cap S_2) = (\mathbb{C} \setminus S_1) \cup (\mathbb{C} \setminus S_2) \quad \text{é aberto (união de dois abertos)}$$

$$\mathbb{C} \setminus B = \mathbb{C} \setminus (S_1 \cup S_2) = (\mathbb{C} \setminus S_1) \cap (\mathbb{C} \setminus S_2) \quad \text{é aberto (interseção de dois abertos)}$$

7. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere os conjuntos (discos) abertos $A_n = \{z \in \mathbb{R} : |z| < 1/n\}$. Não é difícil deduzir que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

não é um conjunto aberto.

8. Consequência da definição de limite e do fato: $|z_n| \leq |\operatorname{Re}(z_n)| + |\operatorname{Im}(z_n)| \leq 2|z_n|$.

9. Do exercício 9, segue que $\lim z_n = \lim \operatorname{Re}(z_n) + i \lim \operatorname{Im} z_n$. Assim, temos:

$$(a) \lim \left(1 + \frac{in}{n+1}\right) = 1 + i \cdot \lim \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 + i.$$

$$(b) \lim \left(\frac{1 + i \ln n}{n}\right) = \lim \left(\frac{1}{n}\right) + i \cdot \lim \left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0.$$

10. Seja $z_n = x_n + iy_n$. Temos que

$$z_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \rightarrow 0 \\ y_n \rightarrow 0 \end{cases} \Leftrightarrow |z_n| = (x_n^2 + y_n^2)^{1/2} \rightarrow 0.$$

11. Se $z = 0$, o resultado é óbvio. Suponhamos que $z \neq 0$ e seja $\varepsilon > 0$ dado. Temos:

$$|z|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln |z| < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |z|}. \quad (1.25)$$

Se N é o primeiro inteiro maior do que $\frac{\ln \varepsilon}{\ln |z|}$, segue de (1.25) que:

$$|z^n - 0| = |z|^n < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

2. Funções Analíticas



2.1 Exemplos de Funções Complexas

Como no caso de variável real, o conceito de *função complexa de uma variável complexa* é uma regra f que associa a cada número complexo z , de um subconjunto $D \subset \mathbb{C}$, um único número complexo $w = f(z)$. Em símbolos, escrevemos:

$$f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto w = f(z).$$

Neste caso, $D = D(f)$ é denominado *Domínio* da função f e $w = f(z)$ é a *Imagem* do número complexo z pela função f . A Figura 2.1 ilustra o conceito de função de uma variável complexa.

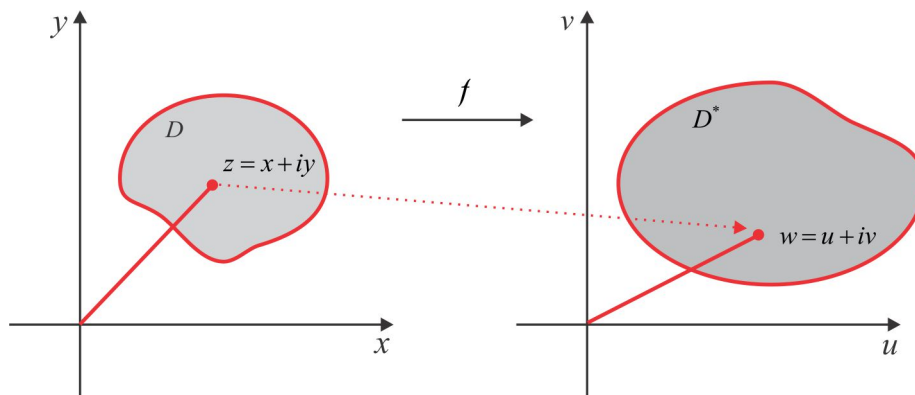


Figura 2.1: Função Complexa $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Cada função $f : D(f) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é determinada por um par de funções reais de duas variáveis $u(x, y)$ e $v(x, y)$, definidas por:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)), \quad z = x + iy \in D.$$

EXEMPLO 2.1.1 Não havendo restrições para o cálculo de z^2 , como número complexo, a função f definida pela regra $f(z) = z^2$ tem para domínio todo o plano complexo \mathbb{C} . Neste caso, temos:

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi, \quad u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad v(x, y) = 2xy.$$

EXEMPLO 2.1.2 O domínio da função $f(z) = 1/z$ é o subconjunto $D(f) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$ e, neste caso, temos:

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z)) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad e \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z)) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

EXEMPLO 2.1.3 O domínio da função $f(z) = |z|^2$ é todo o plano complexo. A parte real e a parte imaginária de $f(z)$ são, neste caso:

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad e \quad v \equiv 0.$$

EXEMPLO 2.1.4 A função $g(z) = \int_0^\infty e^{-xt} dt + i \left(\sum_{n=0}^\infty y^n \right)$ tem para domínio o conjunto

$$D(g) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ e } |\operatorname{Im}(z)| < 1\},$$

no qual a integral imprópria e a série numérica são convergentes.

EXEMPLO 2.1.5 O domínio da função racional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, onde $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios complexos, é o conjunto $D(f) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$.

EXEMPLO 2.1.6 O domínio da função $g(z) = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$ é o plano \mathbb{C} e ela transforma circunferências em segmentos de reta. De fato, se $\gamma_R : |z| = R$ é a circunferência de centro na origem e raio $R > 0$, temos:

$$z = x + iy \in \gamma_R \Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 \quad e \quad |y| \leq R$$

e, portanto, a imagem $g(z) = u + iv$ é tal que $u = \sqrt{x^2 + y^2} = R$ e $|v| = |y| \leq R$. Assim, $g(\gamma_R)$ é o segmento de reta $L_R = \{u + iv \in \mathbb{C} : u = R \text{ e } |v| \leq R\}$.

EXEMPLO 2.1.7 Para identificar a imagem do disco $D : |z| < \sqrt{2}$ pela função $w = z^2$, notamos que um ponto do disco D é da forma $z = re^{i\theta}$, com $0 \leq r < \sqrt{2}$ e $0 < \theta \leq 2\pi$, e sendo $w = z^2$, segue que $\operatorname{Arg}(w) = 2\theta$ e $|w| = r^2 < 2$. Assim, a imagem de D é o disco $D^* : |w| < 2$, como ilustra a Figura 2.2. A imagem pode ser identificada, também, usando coordenadas cartesianas. Se $z = x + iy$, então o disco D é descrito por $x^2 + y^2 < 2$ e designando $w = u + iv$, temos

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

e, portanto, $|w| = u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2 < 4$. Vemos, então, que a imagem é o disco aberto $u^2 + v^2 < 4$, do plano uv , de centro na origem e raio 2.

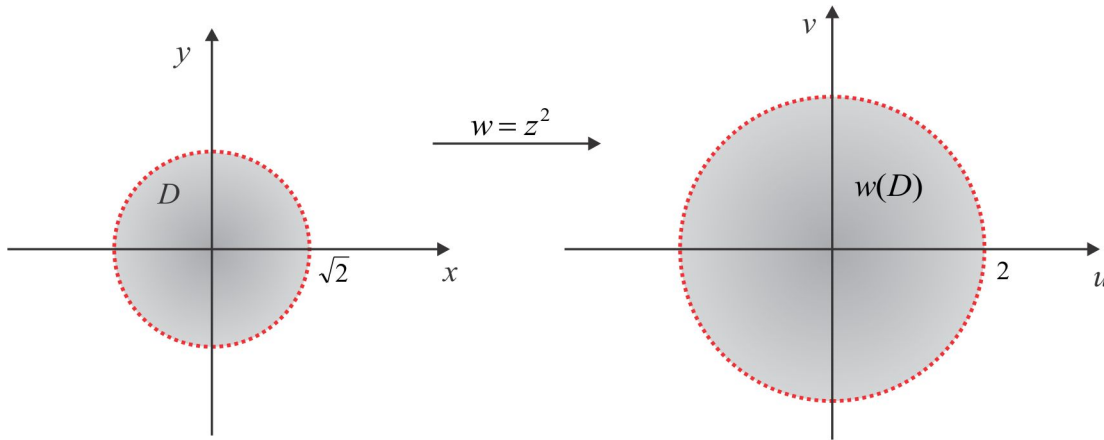


Figura 2.2: Função Complexa $w = z^2$.

EXEMPLO 2.1.8 Vejamos a imagem do conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1\}$ pela função $w = 1/z$. Fazendo $z = re^{i\theta}$, $0 < r \leq 1$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, temos que:

$$w = \frac{1}{r}e^{-i\theta}, \quad -\pi \leq \theta < \pi, \quad e \quad |w| = \frac{1}{r} \geq 1$$

e vemos que a imagem $w(S)$ é o exterior do disco de raio 1 e centro na origem. Veja a ilustração gráfica na Figura 2.3.

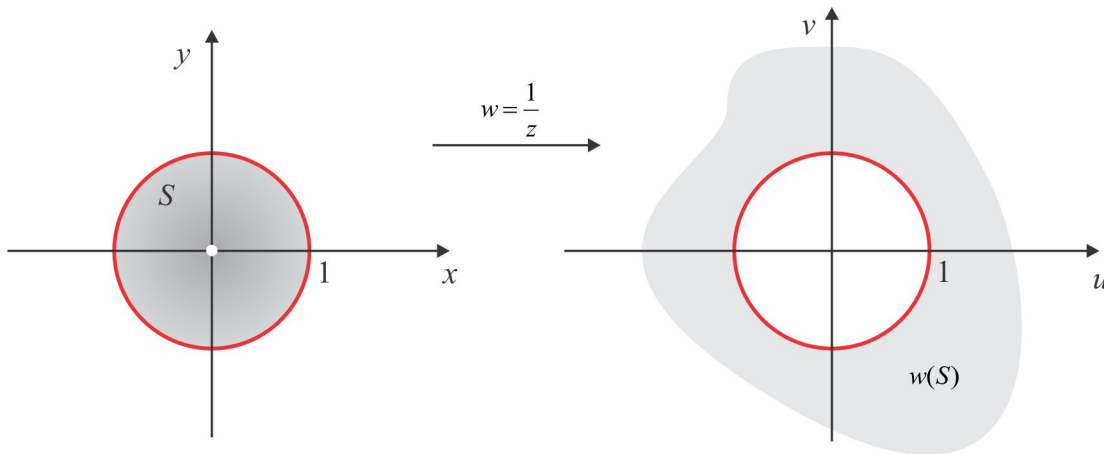


Figura 2.3: Função Complexa $w = 1/z$.

EXEMPLO 2.1.9 Se $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi/4\}$, decorre da relação $\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z)$ que a imagem do conjunto S pela função $w = \bar{z}$ é dada por:

$$w(S) = \{z \in \mathbb{C} : -\pi/4 \leq \text{Arg}(z) \leq 0\}.$$

Veja a ilustração na Figura 2.4.

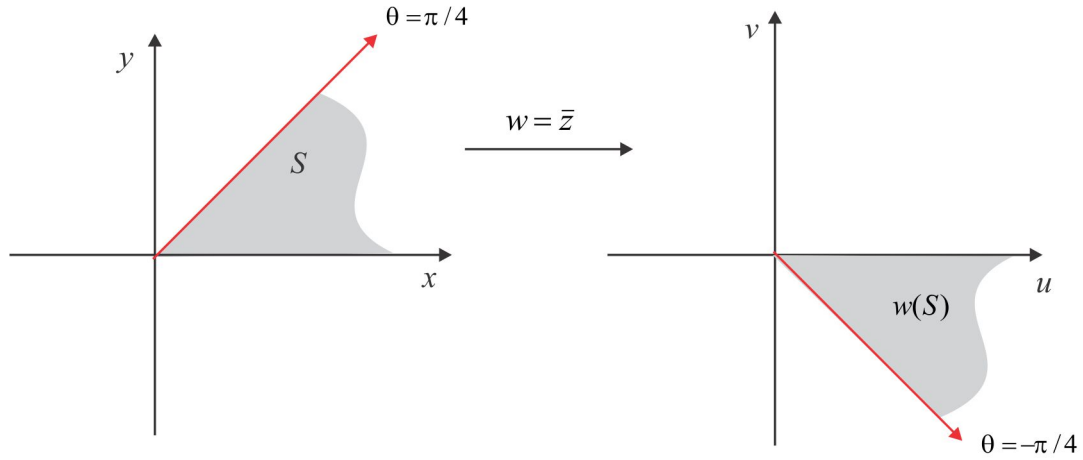


Figura 2.4: Função Complexa $w = \bar{z}$.

EXEMPLO 2.1.10 A Figura 2.5 ilustra o disco $S : |z - 1| < 1$ e a imagem $w(S)$ pela função $w = 1/z$.

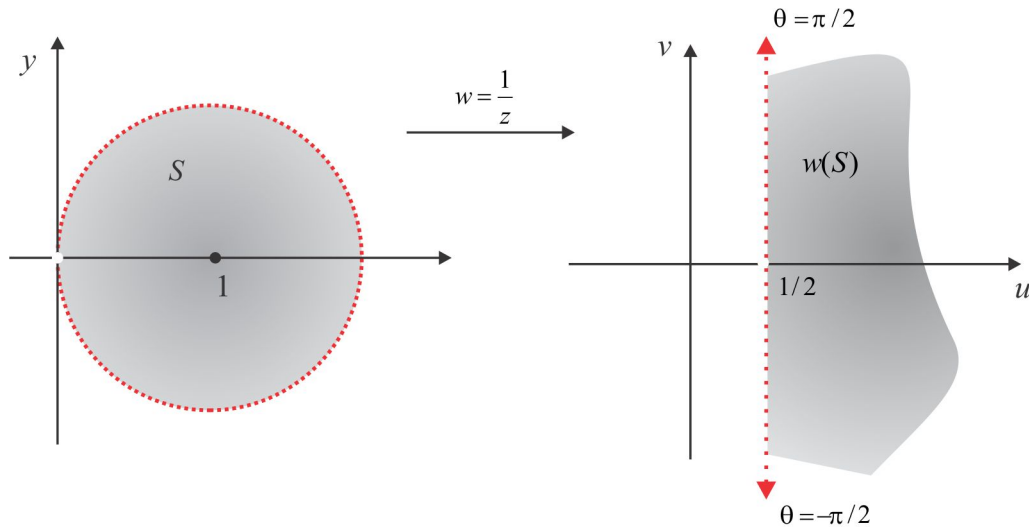


Figura 2.5: Imagem de $|z - 1| < 1$ pela função $w = 1/z$.

Um ponto $z = re^{i\theta}$ do disco S é tal que $0 < r < 2 \cos \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, e a imagem $w = (1/r)e^{-i\theta}$ é caracterizada por $-\pi/2 < \text{Arg}(w) < \pi/2$ e $|w| = 1/r$. Como $1/r = 1/(2 \cos \theta) > 1/2$, temos:

$$w(S) = \{w \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \text{Arg}(z) < \pi/2 \text{ e } |w| > 1/2\} = \{w \in \mathbb{C} : \text{Re}(w) > 1/2\}$$

Em coordenadas cartesianas, o disco S é descrito por $x^2 + y^2 < 2x$ e se designarmos $w = u + iv$, teremos

$$w = u + iv = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

de onde resulta:

$$u(x, y) > \frac{1}{2} \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 0} v(x, \pm x) = \mp \infty.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.1

1. Calcule o valor de $f(z) = 3z^2 + z$ em $z = 2 + i$ e $z = 3i$.
2. Se $z = x + iy$, como se expressa a função $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$ em termos de z ?
3. Considerando $z = x + iy$, determine o domínio máximo das seguintes funções:

(a) $f(z) = \frac{z}{(z-i)\operatorname{sen} y}$ (b) $f(z) = \frac{z^2 + (z-i)^3}{(e^{iy} - 1)\cos y}$ (c) $f(z) = \frac{y}{x} + \frac{i}{1-y}$.

4. Determine a parte real e a parte imaginária de $w = f(z)$, nos seguintes casos:

(a) $w = 2z^2 - 3z$ (b) $w = |z| + z \operatorname{Re}(z)$ (c) $w = \frac{1}{1-z}$ (d) $w = \frac{\operatorname{Im}(z)}{z^2 - i}$.

5. Em cada caso, esboce o domínio D da função $w = f(z)$.

(a) $w = z^2 + 1$; $D : |z| \leq 2$ (b) $w = 3z$; $D : |\arg(z)| < \pi/2$ (c) $w = z^2$; $D : |z| > 3$
 (d) $w = \frac{1}{z}$; $D : \operatorname{Re}(z) \geq 1$ (e) $w = \frac{1}{z^2}$; $D : |z| > 1$ (f) $w = |z| - \frac{iy^2}{\operatorname{Im}(z)}$; $D : \operatorname{Im}(z) > 1$.

6. Em cada caso, identifique a imagem do conjunto S pela função $w = f(z)$.

(a) $w = 3z$; $S : |\arg(z)| < \pi/2$ (b) $w = z^2$; $S : |z| > 3$
 (c) $w = \frac{1}{z^2}$; $S : |z| > 1$ e $|\arg z| \leq \pi/4$ (d) $w = \frac{1}{z}$; $S : \operatorname{Re}(z) > 0$.

7. Qual a imagem da faixa horizontal $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$ pela função $w(x + iy) = e^x \cdot e^{iy}$?

Se \mathcal{R} é o retângulo

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi\}$$

qual a imagem $w(\mathcal{R})$?

8. Se $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 1, 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi\}$, qual a imagem de S pela função $w = z + 1/z$?

2.2 Limite e Continuidade

Vamos considerar a função complexa $f(z) = \bar{z}$, definida em todo o plano complexo. Quando z se aproxima do número complexo $z_0 = 2 - 3i$, indicamos isto escrevendo $z \rightarrow (2 - 3i)$, é fácil observar que os números complexos $f(z)$ se aproximam do número $w_0 = 2 + 3i$. Em símbolos escrevemos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad \text{ou} \quad \lim_{z \rightarrow 2-3i} (\bar{z}) = 2 + 3i.$$

CONCEITO DE LIMITE Seja $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função complexa e fixemos z_0 um ponto de acumulação de D . Anotamos $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, para indicar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{sempre que } z \in D \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

É oportuno ressaltar que esse δ , que em princípio depende de ε e de z_0 , não é único; uma vez encontrado um tal δ , qualquer outro menor do que ele também atenderá ao conceito de limite.

Em termos de vizinhanças, escrever $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ significa que a cada raio $\varepsilon > 0$ dado, existe, em correspondência um raio $\delta > 0$, tal que:

$$f(z) \in V_\varepsilon(w_0), \quad \text{sempre que } z \in D \cap V_\delta(z_0), \quad z \neq z_0. \quad (2.4)$$

É claro que a sentença (2.4) é equivalente a $f[D \cap (V_\delta(z_0) - \{z_0\})] \subset V_\varepsilon(w_0)$ e que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{|z - z_0| \rightarrow 0} |f(z) - w_0| = 0. \quad (2.5)$$

EXEMPLO 2.2.1 Como primeira ilustração, vamos encontrar um raio $\delta > 0$, tal que:

$$|z^2 + 1| < 0.03, \quad \text{sempre que } |z - i| < \delta.$$

SOLUÇÃO Temos que:

$$|z^2 + 1| < 0.03 \Leftrightarrow |z + i||z - i| < 0.03 \quad (2.6)$$

e como o δ procurado deve ser tal que $|z - i| < \delta$, sendo essa a única informação que temos, o termo $|z + i|$ que figura em (2.6) deve ser substituído por uma constante. Ora:

$$|z + i| = |z - i + 2i| \leq |z - i| + |2i| = |z - i| + 2$$

e se supusermos $\delta < 1$, teremos $|z + i| < 3$, sempre que $|z - i| < \delta$ e assim:

$$|z^2 + 1| = |z - i||z + i| < 3|z - i| < 3\delta, \quad \text{sempre que } |z - i| < \delta.$$

Para chegarmos a $|z^2 + 1| < 0.03$, basta escolher δ de modo que $3\delta = 0.03$, isto é, $\delta = 0.01$.

EXEMPLO 2.2.2 Ainda para ilustrar o conceito, provemos que $\lim_{z \rightarrow i} (z + 2i) = 3i$.

SOLUÇÃO Neste caso, $f(z) = z + 2i$, $z_0 = i$ e $w_0 = 3i$ e dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - i| < \delta \Rightarrow |f(z) - 3i| < \varepsilon.$$

Temos

$$|f(z) - 3i| = |z + 2i - 3i| = |z - i|$$

e se $|z - i| < \delta$, então $|f(z) - 3i| < \delta$ e para chegarmos a $|f(z) - 3i| < \varepsilon$, basta escolher $\delta = \varepsilon$.

EXEMPLO 2.2.3 Mostremos que $\lim_{z \rightarrow 2i} (2x + iy^2) = 4i$, sendo $z = x + iy$. De fato, se considerarmos na definição de limite $f(z) = 2x + iy^2$, $z_0 = 2i$ e $w_0 = 4i$, teremos:

$$|f(z) - w_0| = |2x + iy^2 - 4i| \leq 2|x| + |i||y^2 - 4| = 2|x| + |y + 2||y - 2|,$$

e, considerando que, $|z - 2i| < \delta \Leftrightarrow |x + i(y - 2)| < \delta$, resulta:

$$|y - 2| \leq |x + i(y - 2)| < \delta \quad \text{e} \quad |x| \leq |x + i(y - 2)| < \delta.$$

Se escolhermos $\delta < 1$, teremos $|y + 2| \leq |y - 2 + 4| < |y - 2| + 4 < 5$ e, portanto,

$$|f(z) - w_0| < 2\delta + 5\delta = 7\delta, \quad \text{com } \delta < \min\{1, \varepsilon/7\}.$$

OBSERVAÇÃO 2.2.4 Os seguintes fatos decorrem da definição de limite.

$$(a) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - w_0| = 0.$$

- (b) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|$. De fato, basta notar que $||f(z)| - |w_0|| \leq |f(z) - w_0|$.
- (c) Se $f(z)$ é limitada⁴ em uma vizinhança de z_0 e $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$, então $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = 0$, mesmo que $f(z)$ não tenha limite no ponto z_0 . De fato, basta notar que nessa vizinhança tem-se:

$$|f(z) \cdot g(z)| \leq C |g(z)| \rightarrow 0, \quad \text{com } z \rightarrow z_0.$$

2.2.1 Lemas Técnicos e Propriedades do Limite

Dada uma função complexa $w = f(z)$, $z \in D$, deixe z_0 ser um ponto de acumulação do conjunto D . Se em (1.9) usarmos $f(z) - w_0$ no lugar do z , teremos:

$$|f(z) - w_0| \leq |\operatorname{Re}(f(z) - w_0)| + |\operatorname{Im}(f(z) - w_0)| \leq \sqrt{2}|f(z) - w_0| \quad (2.7)$$

e de (2.7) resulta:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow z_0} [\operatorname{Re}(f(z))] = \operatorname{Re}(w_0) & e \\ \lim_{z \rightarrow z_0} [\operatorname{Im}(f(z))] = \operatorname{Im}(w_0). \end{cases} \quad (2.8)$$

Como consequência temos o seguinte resultado:

LEMA 2.2.5 (Redução ao Caso Real) No caso em que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e considerando $z_0 = x_0 + iy_0$ e $w_0 = u_0 + iv_0$, então:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [u(x, y)] = u_0 & e \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [v(x, y)] = v_0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

LEMA 2.2.6 (Unicidade do Limite) Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1$ e $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_2$, então $w_1 = w_2$.

PROVA Seja $\varepsilon > 0$ dado e suponhamos que $|f(z) - w_j| < \varepsilon$, $j = 1, 2$, com z em uma vizinhança de z_0 . Em tal vizinhança, temos:

$$|w_1 - w_2| = |f(z) - w_2 - (f(z) - w_1)| \leq |f(z) - w_2| + |f(z) - w_1| < 2\varepsilon$$

e, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, resulta $|w_1 - w_2| \leq 0$, isto é, $w_1 = w_2$. \blacksquare

⁴ $f(z)$ é limitada em D quando existir uma constante C , tal que $|f(z)| \leq C$, $\forall z \in D$.

LEMA 2.2.7 (Limitação Local) Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w$, então existem uma constante positiva C e um raio $\delta > 0$, tais que:

$$|f(z)| \leq C, \quad \forall z \in D(f) \cap V_\delta(z_0). \quad (2.9)$$

Além disso, se $w \neq 0$ podemos escolher a constante C e o raio δ , de modo que

$$\frac{1}{|f(z)|} \leq C, \quad \forall z \in D(f) \cap V_\delta(z_0). \quad (2.10)$$

PROVA Considerando $\varepsilon = 1$ na definição de limite, encontramos um raio $\delta_1 > 0$, tal que

$$|f(z) - w| \leq 1, \quad \forall z \in D(f) \cap V_{\delta_1}(z_0)$$

e daí resulta:

$$|f(z)| \leq |f(z) - w| + |w| \leq 1 + |w|, \quad \forall z \in D(f) \cap V_{\delta_1}(z_0).$$

Por outro lado, supondo $w \neq 0$ e considerando $\varepsilon = |w|/2$, encontramos um raio $\delta_2 > 0$, tal que

$$|f(z) - w| \leq \frac{|w|}{2}, \quad \forall z \in D(f) \cap V_{\delta_2}(z_0).$$

e, portanto, se $z \in D(f) \cap V_{\delta_2}(z_0)$, então:

$$|w| - |f(z)| \leq |f(z) - w| \leq \frac{|w|}{2} \Rightarrow |f(z)| \geq \frac{|w|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|f(z)|} \leq \frac{2}{|w|}.$$

Se considerarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e $C = \max\{C_1, C_2\}$, onde $C_1 = 1 + |w|$ e $C_2 = 2/|w|$, teremos:

$$|f(z)| \leq C \quad \text{e} \quad \frac{1}{|f(z)|} \leq C, \quad \forall z \in D(f) \cap V_\delta(z_0). \quad \blacksquare$$

TEOREMA 2.2.8 (Propriedades Algébricas) Sejam $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções complexas e seja z_0 um ponto de acumulação de D . Se $w_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ e $w_2 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$ então:

(a) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + \lambda g(z)] = w_1 + \lambda w_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad \text{(Linearidade)}$

(b) $\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = w_1 \cdot w_2. \quad \text{(Produto)}$

(c) $\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{w_1}{w_2}; \quad w_2 \neq 0 \quad \text{e} \quad g(z) \neq 0, \quad z \in D. \quad \text{(Quociente)}$

(d) $\lim_{z \rightarrow z_0} [z^n] = z_0^n; \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \text{Se } z_0 \neq 0, \text{ então a propriedade vale } \forall n \in \mathbb{Z}. \quad \text{(Potência)}$

(e) Se $P(z)$ e $Q(z)$ são polinômios e $Q(z_0) \neq 0$, então $\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{P(z)}{Q(z)} \right] = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)}. \quad \text{(Função Racional)}$

DEMONSTRAÇÃO As demonstrações são semelhantes ao caso real, de modo que as apresentaremos de forma breve, deixando alguns detalhes a cargo do leitor, que deverá fazê-los. Nas conclusões usaremos a equivalência (2.5).

(a) Temos

$$0 \leq |f(z) + \lambda g(z) - w_1 - \lambda w_2| \leq |f(z) - w_1| + |\lambda| |g(z) - w_2| \rightarrow 0, \quad \text{com } z \rightarrow z_0.$$

(b) Inicialmente, observamos que:

$$|f(z)| \leq |f(z) - w_1 + w_1| \leq |f(z) - w_1| + |w_1| \leq 1 + |w_1|,$$

com z variando em certa vizinhança de z_0 , de modo que:

$$\begin{aligned} |f(z) \cdot g(z) - w_1 \cdot w_2| &= |f(z)(g(z) - w_2) + f(z)w_2 - w_1w_2| \\ &\leq |f(z)| |g(z) - w_2| + |w_2| |f(z) - w_1| \\ &\leq (1 + |w_1|) |g(z) - w_2| + |w_2| |f(z) - w_1| \rightarrow 0, \quad \text{com } z \rightarrow z_0. \end{aligned}$$

(c) Usando as limitações locais de $f(z)$ e de $1/g(z)$ determinadas no Lema 2.2.7, deduzimos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{g(z)} - \frac{w_1}{w_2} \right| &= \left| \frac{f(z)w_2 - w_1g(z)}{w_2g(z)} \right| = \left| \frac{f(z)(w_2 - g(z)) - (w_1 - f(z))g(z)}{|w_2| |g(z)|} \right| \\ &\leq \underbrace{\left(\frac{|f(z)|}{|w_2| |g(z)|} \right)}_{\text{limitada}} \cdot \underbrace{|w_2 - g(z)|}_{\downarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{|w_2|} \right)}_{\text{constante}} \cdot \underbrace{|w_1 - f(z)|}_{\downarrow 0} \rightarrow 0, \quad \text{com } z \rightarrow z_0. \end{aligned}$$

(d) Basta observar que $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$ e usar a propriedade do produto.

(e) Consequência das propriedades anteriores. ■

EXEMPLO 2.2.9 Das propriedades algébricas, resulta que $\lim_{z \rightarrow -2i} (z - 3 + 2i) = -3$.

EXEMPLO 2.2.10 Usando fatoração polinomial, calcular $\lim_{z \rightarrow 3-2i} \frac{z^2 - 6z + 13}{z - 3 + 2i}$.

SOLUÇÃO Primeiro observamos que a propriedade algébrica (c) não pode ser aplicada. Porém, usando a fatoração $z^2 - 6z + 13 = (z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i)$, obtemos:

$$\lim_{z \rightarrow 3-2i} \left(\frac{z^2 - 6z + 13}{z - 3 + 2i} \right) = \lim_{z \rightarrow 3-2i} \frac{(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i)}{z - 3 + 2i} = \lim_{z \rightarrow 3-2i} (z - 3 - 2i) = -4i.$$

EXEMPLO 2.2.11 Com argumento análogo ao Exemplo (2.2.10), vamos calcular $\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i}$.

SOLUÇÃO Considerando a fatoração $z^3 - 8i = (z + 2i)(z^2 - 2zi - 4)$, obtemos:

$$\lim_{z \rightarrow -2i} \left(\frac{z^3 - 8i}{z + 2i} \right) = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(z^2 - 2zi - 4)(z + 2i)}{z + 2i} = \lim_{z \rightarrow -2i} (z^2 - 2zi - 4) = -12.$$

LEMA 2.2.12 (Da Função Composta) Sejam $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : D^* \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções complexas, com $f(D) \subset D^*$, e sejam z_0 e w_0 pontos de acumulação de D e D^* , respectivamente. Se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad e \quad \lim_{w \rightarrow w_0} g(w) = \xi_0,$$

então, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(f(z)) = \xi_0$.

PROVA Dado $\varepsilon > 0$, existem δ e δ^* números reais positivos, tais que:

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| < \delta^*, \quad \forall z \in D \cap V_\delta(z_0), \quad \text{com } z \neq z_0. \\ |g(w) - \xi_0| < \varepsilon, \quad \forall w \in D^* \cap V_{\delta^*}(w_0), \quad \text{com } w \neq w_0. \end{aligned}$$

Ora, se $z \in D \cap V_\delta(z_0)$ e $z \neq z_0$, então $w = f(z) \in D^* \cap V_{\delta^*}(w_0)$ e, conseqüentemente:

$$|g(f(z)) - \xi_0| < \varepsilon, \quad \forall z \in D \cap V_\delta(z_0), \quad \text{com } z \neq z_0. \quad \blacksquare$$

2.2.2 Continuidade

Vimos que o limite de uma função $f(z)$ em um ponto z_0 pode existir, sem que a função f esteja definida no ponto z_0 . No conceito de limite exige-se apenas que z_0 seja um ponto de acumulação do domínio da função $f(z)$. A seguir, apresentaremos uma classe importante de funções complexas: a classe C^0 das *Funções Contínuas*. Uma função desta classe tem limite em qualquer ponto z_0 de seu domínio e o valor do limite é $f(z_0)$. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.2.13 Uma função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em um ponto z_0 de seu domínio se:

- (i) A função f tem limite numérico no ponto z_0 .
- (ii) O valor do limite de f em z_0 é igual a $f(z_0)$.

EXEMPLO 2.2.14 A função $f(z) = |z|$ é contínua em qualquer $z \in \mathbb{C}$. De fato:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} |z| = |z_0| = f(z_0).$$

EXEMPLO 2.2.15 As funções $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ e $g(z) = \operatorname{Im}(z)$ são contínuas em todo plano \mathbb{C} . De fato, basta observar que

$$|\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_0)| \leq |z - z_0| \quad e \quad |\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_0)| \leq |z - z_0|$$

e considerar na definição de limite $\delta = \varepsilon$.

EXEMPLO 2.2.16 Uma função polinomial $P(z)$ é contínua em todo ponto z_0 do plano \mathbb{C} . Isto resulta do fato que $\lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0)$. Já uma função racional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ é contínua no ponto z_0 se, e somente se, $Q(z_0) \neq 0$.

EXEMPLO 2.2.17 Segue diretamente do Lema 2.2.12 que se $f(z)$ é contínua em z_0 e $g(w)$ é contínua em $w_0 = f(z_0)$, então a função composta $g(f(z))$ é contínua em z_0 .

EXEMPLO 2.2.18 Decorre das propriedades do limite que a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é contínua em $z_0 = x_0 + iy_0$ se, e somente se, as funções reais $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(z))$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(z))$ forem contínuas em (x_0, y_0) .

EXEMPLO 2.2.19 A função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x + iy) = \frac{xy}{x^2 + y^2} + iy$, $x + iy \neq 0$, e $f(0) = 0$, não é contínua em $z_0 = 0$, porque a componente (parte real) $\operatorname{Re}(f(z))$ não é contínua em $(0, 0)$, já que não tem limite em $(0, 0)$. Ao longo das trajetórias $\gamma_1: \operatorname{Im}(z) = 0$ e $\gamma_2: \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ os limites são, respectivamente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0 \quad e$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLO 2.2.20 Vamos estudar a continuidade da função $f(z) = \frac{i \operatorname{Re}(z)}{|z|}$, se $z \neq 0$, e $f(0) = 0$, em que as componentes são $u(x, y) \equiv 0$ e $v(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$, e $v(0, 0) = 0$. Ao longo da trajetória $\gamma_1: \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$, temos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} v(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{2x^2}} \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e isto indica que não existe $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ e, portanto, f não é contínua em $z = 0$.

EXEMPLO 2.2.21 Seja, agora, a função $f(z) = \frac{(\operatorname{Re}(z))^2}{|z|}$, se $z \neq 0$, e $f(0) = 0$ e calculemos $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$. Considerando $z = e^{i\theta}$ e expressando $f(z)$ na forma polar, temos:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^2 \cos^2 \theta}{r} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} (r \cos^2 \theta) = 0,$$

e o último limite independe do ângulo θ . Logo, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0 = f(0)$, de onde concluímos a continuidade de f em $z_0 = 0$.

EXEMPLO 2.2.22 Como consequência do Lema 2.2.12, temos que se $f : D \rightarrow D^*$ é contínua em z_0 e $g : D^* \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em $w_0 = f(z_0)$, então $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua em z_0 .

LEMA 2.2.23 Se $w = f(z)$ é uma função contínua em z_0 e $f(z_0) \neq 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$f(z) \neq 0, \quad \forall z \in V_\delta(z_0) \cap D(f).$$

PROVA Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2} |f(z_0)|$ na definição de continuidade, encontramos $\delta > 0$, tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{1}{2} |f(z_0)|, \quad \forall z \in D(f) \cap V_\delta(z_0), \quad (2.11)$$

e de (2.11) resulta:

$$|f(z)| > \frac{1}{2} |f(z_0)| > 0, \quad \forall z \in D(f) \cap V_\delta(z_0). \quad \blacksquare$$

1. Usando a definição, prove que a função $f(z) = z^2$ é contínua.

2. Usando a definição de limite, prove que:

(a) $\lim_{z \rightarrow i} (z^3 - i) = -2i$.

(b) $\lim_{z \rightarrow i} (z^2 + 1) = 0$.

(c) $\lim_{z \rightarrow z_0} (\operatorname{Re}(z) + |z|) = \operatorname{Re}(z_0) + |z_0|$.

(d) $\lim_{z \rightarrow 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i$.

$$(e) \lim_{z \rightarrow z_0} \sqrt{z} = \sqrt{z_0}.$$

3. Usando as propriedades básicas do limite, verifique que:

$$(a) \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^2} = -1 \quad (b) \lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i} = 0 \quad (c) \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i} = -12.$$

4. Se $f(z) = 1/z$, $z \neq 0$, calcule o limite:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad z_0 \neq 0.$$

E se fosse $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, qual seria o valor do limite?

5. Verifique se a função $f(z) = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$, definida para $z \neq z_0$, tem limite quando $z \rightarrow z_0$.

6. Calcule, caso exista, o limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+z)^{1/4} - 1}{z}.$$

7. Verifique se a função

$$f(z) = \frac{\bar{z}^2 + 4}{z - 2i}$$

tem limite quando $z \rightarrow 2i$.

8. Estude a continuidade, no ponto $z = 0$, da função $w = f(z)$, sendo $f(0) = 0$ e, para $z \neq 0$:

$$(a) f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \quad (b) f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{1 + |z|} \quad (c) f(z) = \frac{[\operatorname{Re}(z)]^2}{|z|} \quad (d) f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}.$$

9. Mostre que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ se, e somente se, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z_n) = w_0$, seja qual for a sequência (z_n) no domínio de $f(z)$, com $z_n \rightarrow z_0$. Como consequência deduza que $f(z)$ é contínua em z_0 se, e somente se, $\lim f(z_n) = f(z_0)$, seja qual for a sequência (z_n) convergindo para z_0 .

10. Considere a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por:

$$f(z) = \begin{cases} 1 + |z|, & \text{se } |z| \leq \sqrt{2} \\ 0, & \text{se } |z| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Mostre que a função $f(z)$ não é contínua no ponto $z_0 = 1 + i$. E no ponto $z = i$, a função é contínua?

11. Construa uma função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ descontínua em todos os pontos do conjunto $S: |z| = 1$.

12. Dado $z = x + iy$, defina a função $w = f(z)$ por:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 y (y - ix)}{(x^6 + y^2)(x + iy)}, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

Se $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$ é qualquer reta do plano \mathbb{C} , tal que $\lim_{t \rightarrow 0} z(t) = 0$, mostre que $\lim_{t \rightarrow 0} f(z(t)) = 0$ e, contudo, a função $f(z)$ não tem limite quando $z \rightarrow 0$.

2.3 Derivação no Plano \mathbb{C}

A função complexa $f(z) = |z|^2$, com domínio $D = \mathbb{C}$, é contínua e tem componentes $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v \equiv 0$ infinitamente diferenciáveis⁵, ou de classe C^∞ , no plano \mathbb{R}^2 . A pergunta natural é: a função $f(z)$ é derivável e o que seria a derivada $f'(z)$?

Imitando o caso real, em que se tem uma função de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vamos eleger para derivada de $f(z)$, no ponto z_0 , o valor, caso exista, do limite:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

É claro que o valor do limite, caso exista, não deve depender da direção sobre a qual Δz se aproxima de zero. Mostremos que para a função $f(z) = |z|^2$ esse limite existe apenas se $z_0 = 0$. De fato:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{|z_0 + \Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} \\ &= \frac{(z_0 + \Delta z)(\overline{z_0} + \overline{\Delta z}) - |z_0|^2}{\Delta z} = z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z} \end{aligned}$$

e para concluir observamos que:

(i) No ponto $z_0 = 0$, temos $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\overline{\Delta z}) = 0$ e, portanto, $f'(0) = 0$.

(ii) Se $z_0 \neq 0$, mostremos que a razão $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ não tem limite, com $\Delta z \rightarrow 0$. De fato, ao longo do eixo real, isto é, com $\Delta z \in \mathbb{R}$, encontramos:

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta z \in \mathbb{R}}} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z} \right) = z_0 + \overline{z_0}$$

⁵Uma função é infinitamente diferenciável, ou de Classe C^∞ , se suas derivadas parciais, de todas as ordens, são contínuas.

e ao longo do eixo imaginário, isto é, com $\operatorname{Re}(\Delta z) = 0$, obtemos:

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re}(\Delta z) = 0}} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z} \right) = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re}(\Delta z) = 0}} \left[z_0 \left(-\frac{\Delta z}{\Delta z} \right) + \bar{z}_0 - \Delta z \right] = -z_0 + \bar{z}_0.$$

Como $z_0 \neq 0$, segue que $z_0 + \bar{z}_0 \neq -z_0 + \bar{z}_0$ e, portanto, $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ não tem limite, com $\Delta z \rightarrow 0$. Logo, f não é derivável em z_0 , se $z_0 \neq 0$.

Pelo exposto, concluímos que:

- (a) Uma função complexa pode ser derivável em um único ponto z_0 do plano \mathbb{C} .
- (b) As partes real $u(x, y)$ e imaginária $v(x, y)$ de uma função complexa $f(z)$ podem ser infinitamente diferenciáveis em $V_\delta(z_0)$, sem que $f(z)$ seja derivável em ponto algum dessa vizinhança.
- (c) Uma função complexa pode ser contínua em um ponto z_0 sem ser derivável nesse ponto.

DEFINIÇÃO 2.3.1 Uma função $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável (ou diferenciável) no ponto z_0 , interior ao conjunto D , quando existir o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Este limite, caso exista, é a derivada da função $f(z)$, no ponto z_0 , e é indicado por $\frac{df}{dz}(z_0)$ ou $f'(z_0)$.

EXEMPLO 2.3.2 Se $f(z) = z^2$, então

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = 2z + \Delta z \rightarrow 2z, \quad \text{com } \Delta z \rightarrow 0$$

de onde resulta que f é derivável em z e $f'(z) = 2z$.

EXEMPLO 2.3.3 Mostremos que a função $f(x + iy) = 2x + 8yi$ não é diferenciável em ponto algum do plano complexo. De fato, temos que

$$f(z + \Delta z) - f(z) = 2(x + \Delta x) + 8(y + \Delta y)i - 2x - 8yi = 2(\Delta x) + 8(\Delta y)i,$$

de onde resulta:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2(\Delta x) + 8(\Delta y)i}{\Delta x + (\Delta y)i}.$$

Ao longo das trajetórias $\gamma_1 : \Delta z = \Delta x$ e $\gamma_2 : \Delta z = i\Delta y$, obtemos, respectivamente:

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(\Delta x)}{\Delta x} = 2 \quad e \quad \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{8i(\Delta y)}{i(\Delta y)} = 8.$$

Portanto, não existe $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, seja qual for o número complexo z .

TEOREMA 2.3.4 Se $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ é derivável no ponto $z_0 \in \text{int}(D)$, então f é contínua em z_0 .

DEMONSTRAÇÃO Basta observar que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) \right] = f'(z_0) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = 0. \quad \blacksquare$$

TEOREMA 2.3.5 (Regras Básicas de Derivação) Sejam $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ duas funções complexas deriváveis em um ponto z_0 , interior ao conjunto D , e seja λ uma constante (complexa).

(a) $(f + \lambda \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) + \lambda \cdot g'(z_0)$. **(Linearidade)**

(b) $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$. **(Produto)**

(c) $(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{g(z_0)^2}$, $g(z_0) \neq 0$. **(Quociente)**

(d) Se $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, então $f'(z) = nz^{n-1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. **(Potência)**

DEMONSTRAÇÃO De forma geral, as Regras de Derivação decorrem das propriedades do limite.

(a) Temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) + \lambda g(z) - (f(z_0) + \lambda g(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) + \lambda g(z) - \lambda g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \lambda \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(z_0) + \lambda g'(z_0). \end{aligned}$$

(b) Sendo $g(z)$ contínua em z_0 , então $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = g(z_0)$ e, sendo assim,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[f(z) - f(z_0)]g(z) + f(z_0)[g(z) - g(z_0)]}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) \right] + f(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0). \end{aligned}$$

(c) Este caso é similar ao anterior. Temos

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)/g(z) - f(z_0)/g(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[f(z) - f(z_0)]g(z_0) - f(z_0)[g(z) - g(z_0)]}{(z - z_0)g(z)g(z_0)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z_0) - f(z_0) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] \\ &= \frac{f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}. \end{aligned}$$

(d) Se n é um número inteiro positivo, usando a identidade (1.6), chegamos a:

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}$$

e tomando o limite, com $z \rightarrow z_0$, obtemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \underbrace{z_0^{n-1} + z_0^{n-2}z_0 + \cdots + z_0 z_0^{n-2} + z_0^{n-1}}_{n \text{ parcelas}} = n z_0^{n-1}.$$

No caso em que n é um inteiro negativo e $z \neq 0$, segue da Regra do Produto que:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dz} (z^n \cdot z^{-n}) = \frac{d}{dz} (z^n) \cdot z^{-n} + z^n \cdot \frac{d}{dz} (z^{-n}) \\ &= \frac{d}{dz} (z^n) \cdot z^{-n} + z^n \cdot (-n z^{-n-1}) = \frac{d}{dz} (z^n) \cdot z^{-n} - n z^{-1} \end{aligned}$$

e daí resulta que

$$\frac{d}{dz} (z^n) \cdot z^{-n} - n z^{-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dz} (z^n) = n z^{n-1}. \quad \blacksquare$$

TEOREMA 2.3.6 (Regra da Cadeia) Se $f(z)$ é derivável em z_0 e $g(w)$ é derivável em $w_0 = f(z_0)$, então a função composta $g(f(z))$ é derivável em z_0 e temos a regra de derivação:

$$\frac{d}{dz} [g(f(z))] (z_0) = g'(w_0) \cdot f'(z_0). \quad (\text{Regra da Cadeia})$$

DEMONSTRAÇÃO Se $F(w)$ é a função definida por

$$F(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0), & w \neq w_0 \\ 0, & w = w_0, \end{cases}$$

então $\lim_{w \rightarrow w_0} F(w) = g'(w_0) - g'(w_0) = 0$ e temos que:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \times \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= [F(f(z)) + g'(f(z_0))] \times \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \end{aligned}$$

Fazendo $z \rightarrow z_0$ na última igualdade e observando que $\lim_{z \rightarrow z_0} F(f(z)) = F(w_0) = 0$, encontramos

$$\frac{d}{dz}[g(f(z))](z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = g'(f(z_0))f'(z_0). \quad \blacksquare$$

DEFINIÇÃO 2.3.7 Uma função $w = f(z)$ é **Análítica**, ou **Holomorfa**, em z_0 , quando sua derivada existir em todos os pontos de alguma vizinhança de z_0 . Quando f for analítica em todo ponto z_0 de \mathbb{C} ela é denominada **Função Inteira**.

EXEMPLO 2.3.8 Todo polinômio $P(z)$ é uma função inteira.

EXEMPLO 2.3.9 Uma função racional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ é analítica em todo ponto z_0 onde $Q(z_0) \neq 0$. De fato, se $Q(z_0) \neq 0$, existe, de acordo com o Lema 2.2.23, uma vizinhança $V_\delta(z_0)$, na qual $Q(z) \neq 0$. Nesta vizinhança, a função racional $f(z)$ é derivável.

EXEMPLO 2.3.10 No início desta seção, verificamos que a função $f(z) = |z|^2$ é derivável apenas em $z = 0$. Daí concluímos que ela não é analítica em ponto algum do plano \mathbb{C} , embora as componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sejam de classe C^∞ em todo plano \mathbb{R}^2 .

EXEMPLO 2.3.11 Resulta das Regras de Derivação que a soma, o produto, o quociente e a composição de funções analíticas é uma função analítica.

OBSERVAÇÃO 2.3.12 Não é óbvio, embora seja verdadeiro, que uma função analítica em um ponto z_0 é infinitamente derivável no ponto z_0 e que suas componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são classe C^∞ em uma vizinhança de z_0 . Este fato, que será demonstrado depois, nos autoriza derivar $f(z)$ e suas componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$ tantas vezes quantas forem necessárias, como também usar a igualdade entre as derivadas parciais mistas das funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

2.3.1 Equações de Cauchy-Riemann

Conforme ficou estabelecido nas seções anteriores, o limite (e a continuidade como consequência) de uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ é determinado pelo limite das componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) . Uma questão crucial que se apresenta no momento é: se uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é derivável no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, há alguma relação entre a derivada $f'(z_0)$ e as derivadas parciais de $u(x, y)$ e $v(x, y)$, no ponto (x_0, y_0) ?

Suponhamos que a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$ e designemos $\Delta z = \Delta x + i(\Delta y)$, $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)$ e $\Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)$. Temos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x + i(\Delta y)} \end{aligned}$$

e se considerarmos a trajetória $\Delta y = 0$, isto é, $\Delta z = \Delta x$, obteremos

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Procedendo de forma similar, agora considerando a trajetória $\Delta x = 0$, isto é, $\Delta z = i\Delta y$, encontramos:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i(\Delta y)} + i \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i(\Delta y)} \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Das expressões encontradas para a derivada $f'(z_0)$, decorrem as equações:

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases} \quad (2.12)$$

que são denominadas equações de *Cauchy-Riemann*. Em resumo, se $f(z)$ é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$, então as equações de Cauchy-Riemann (2.12) são satisfeitas no ponto (x_0, y_0) .

EXEMPLO 2.3.13 A função $f(z) = \bar{z}$ não é derivável em ponto algum do plano \mathbb{C} . De fato, temos

$$f(z) = x - iy; \quad u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y,$$

de modo que $u_x \neq v_y$, em qualquer ponto $z = x + iy$ do plano \mathbb{C} .

EXEMPLO 2.3.14 Com auxílio das equações de Cauchy-Riemann, torna-se mais fácil verificar que a função $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ não é derivável nos pontos $z \neq 0$. Neste caso, $u(x, y) = x^2 + y^2$ e $v(x, y) = 0$ e, portanto:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Como as equações de Cauchy-Riemann não são válidas nos pontos $z \neq 0$, concluímos que f só é derivável, possivelmente, em $z = 0$.

Os teoremas dados a seguir fornecem condições necessárias e suficientes para uma dada função complexa $w = f(z)$ ser derivável em ponto z_0 , interior ao seu domínio.

TEOREMA 2.3.15 (Condição Necessária) Se a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é derivável no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, então as derivadas parciais u_x , u_y , v_x e v_y existem em (x_0, y_0) e, nesse ponto, são válidas as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \blacksquare$$

OBSERVAÇÃO 2.3.16 A validade das equações de Cauchy-Riemann em certo ponto (x_0, y_0) do domínio da função $f(z)$ não assegura a derivabilidade de $f(z)$ no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$. Como exemplo, consideremos a função $w = f(z)$, definida por:

$$f(z) = \begin{cases} (\bar{z})^2 / z, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0. \end{cases}$$

(a) As equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em $z_0 = 0$.

Se $u(x, y) = \text{Re}(f(z))$ e $v(x, y) = \text{Im}(f(z))$, um cálculo direto nos dá:

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases} \quad e \quad v(x, y) = \begin{cases} -\frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

e, conseqüentemente:

$$\begin{aligned} u_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3} = 1 & e & u_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0, \Delta y)}{\Delta y} = 0 \\ v_y(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{v(0, \Delta y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^3} = 1 & e & v_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(\Delta x, 0)}{\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

e vemos que as equações de Cauchy-Riemann são válidas em $(0, 0)$.

(b) A função f não é derivável em $(0, 0)$. De fato, ao longo do eixo real ($\Delta y = 0$), temos:

$$\frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2} = 1$$

e, ao longo da reta $\Delta x = \Delta y$, isto é, $\Delta z = \Delta x + i\Delta x$, temos

$$\frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{f(\Delta x + i\Delta x) - f(0)}{\Delta x + i\Delta x} = \frac{(\Delta x - i\Delta x)^2}{(\Delta x + i\Delta x)^2} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)^2} = -1.$$

Isto mostra que $f(z)$ não é derivável em $z = 0$.

TEOREMA 2.3.17 (Condição Suficiente) *Suponha que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ tenham derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em uma vizinhança do ponto $P_0(x_0, y_0)$ e que nesse ponto as equações de Cauchy-Riemann sejam válidas. Nestas condições a função complexa $f(z) = u + iv$ é derivável em $z_0 = x_0 + iy_0$ e a derivada $f'(z_0)$ pode ser calculada por:*

$$\boxed{f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iv_y(x_0, y_0)} \quad (2.13)$$

DEMONSTRAÇÃO Por simplicidade, em algumas passagens da demonstração omitiremos o ponto $P_0(x_0, y_0)$. Sendo as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ diferenciáveis no ponto P_0 , temos:

$$\Delta u = u_x(P_0)\Delta x + u_y(P_0)\Delta y + E_1 \quad \text{e} \quad \Delta v = v_x(P_0)\Delta x + v_y(P_0)\Delta y + E_2$$

onde os restos E_1 e E_2 , que dependem de Δx e Δy , são tais que:

$$\frac{E_1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{E_2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \rightarrow 0, \quad \text{com } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0).$$

Usando as equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $v_x = -u_y$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} = \frac{u_x\Delta x + u_y\Delta y + E_1 + i(v_x\Delta x + v_y\Delta y + E_2)}{\Delta z} \\ &= \frac{u_x \cdot (\Delta x + i\Delta y) + iv_x \cdot (\Delta x + i\Delta y)}{\Delta z} + \frac{E_1 + iE_2}{\Delta z} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \frac{E_1 + iE_2}{\Delta z} \end{aligned}$$

e fazendo $\Delta z \rightarrow 0$, o que equivale a $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, encontramos:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{E_1 + iE_2}{\Delta z} \right) \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

COROLÁRIO 2.3.18 Uma função $w = f(z)$, analítica em um domínio D , será constante em qualquer das situações abaixo:

- (a) $f'(z) = 0$, para todo z no domínio D .
- (b) $|f(z)|$ é constante em D .
- (c) $f(z)$ assume apenas valores reais.

PROVA Uma função analítica $f(z) = u + iv$ é constante em D se, e somente se, as componentes $u(x, y)$ e $v(x, y)$ têm derivadas parciais de primeira ordem nulas em D .

(a) Se $f'(z) = 0$ no domínio D , então $u_x + iv_x = 0$ em D e daí resulta que u_x e v_x são nulas em D . Das equações de Cauchy-Riemann deduzimos que u_y e v_y também se anulam em D .

(b) Se $|f(z)|$ é constante, digamos $|f(z)| = k$, $\forall z \in D$, então $u^2 + v^2 = k^2$ e por derivação implícita, obtemos:

$$\begin{cases} u \cdot u_x + v \cdot v_x = 0 \\ u \cdot u_y + v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

e daí resulta:

$$\begin{cases} (u^2 + v^2) \cdot (u_x^2 + v_x^2) = 0, & \text{em } D \\ (u^2 + v^2) \cdot (u_y^2 + v_y^2) = 0, & \text{em } D. \end{cases} \quad (2.14)$$

Das equações (2.14) segue que ou $u^2 + v^2 = 0$, e isto acarreta $f \equiv 0$, ou as derivadas u_x , u_y , v_x e v_y são todas nulas em D o que nos dá u e v constantes e, portanto, $f(z)$ constante.

(c) Se $f(z)$ assume apenas valores reais, então $v \equiv 0$ em D , de onde resulta que $v_x \equiv 0$ e $v_y \equiv 0$ e das equações de Cauchy-Riemann concluímos que $u_x \equiv 0$ e $u_y \equiv 0$. Logo, f é constante. ■

EXEMPLO 2.3.19 A função $f(z) = z^2$ é inteira. De fato, as componentes

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad v(x, y) = 2xy$$

têm derivadas parciais contínuas e satisfazem ao sistema de Cauchy-Riemann em todo z do plano \mathbb{C} .

EXEMPLO 2.3.20 Seria a função $f(x + iy) = e^{iy}$ derivável em algum ponto do plano \mathbb{C} ? Temos

$$f(z) = e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

e, portanto:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \cos y \quad e \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{sen} y.$$

Se f fosse derivável em algum ponto z as equações de Cauchy-Riemann seriam válidas nesse ponto e teríamos:

$$u_x = v_y \quad e \quad u_y = -v_x \Leftrightarrow \cos y = 0 \quad e \quad \operatorname{sen} y = 0.$$

Ocorre que, não existe um número real y que satisfaça, ao mesmo tempo, às equações $\operatorname{sen} y = 0$ e $\cos y = 0$. Com isto concluímos que a função $f(z)$ não é derivável em ponto algum do plano \mathbb{C} .

EXEMPLO 2.3.21 A função $f(z) = |z|^2$, do Exemplo 2.3.14 é derivável em $z = 0$, porque suas componentes $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 0$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e satisfazem ao sistema de Cauchy-Riemann na origem. Temos que

$$f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0.$$

EXEMPLO 2.3.22 (A função $\exp(z)$) A função

$$f(z) = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y$$

será indicada por $\exp(z)$ ou e^z , com partes real e imaginária dadas por:

$$\operatorname{Re} [f(z)] = u(x, y) = e^x \cos y \quad e \quad \operatorname{Im} [f(z)] = v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

É claro que u e v são de classe C^1 e as equações de Cauchy-Riemann são válidas em todo plano \mathbb{R}^2 . Assim, f é derivável em todo ponto z do plano complexo \mathbb{C} e a derivada $f'(z)$ é:

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^x e^{iy} = f(z).$$

EXEMPLO 2.3.23 (Derivada de 2ª ordem) Se em certa vizinhança do ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ possuem derivadas parciais contínuas até a 2ª ordem e satisfazem às equações de Cauchy-Riemann, então a função $f = u + iv$ é duas vezes derivável em z_0 e temos:

$$f''(z_0) = u_{xx}(x_0, y_0) + iv_{xx}(x_0, y_0).$$

De fato, a função $g(z) = u_x + iv_x$ atende às condições do Teorema 2.3.17 e, portanto, $g(z)$ é derivável em z_0 , com $g'(z_0) = u_{xx}(x_0, y_0) + iv_{xx}(x_0, y_0)$. Para concluir, notamos que $f''(z_0) = g'(z_0)$.

2.3.2 Equações de Cauchy-Riemann na Forma Polar

Se (r, θ) são as coordenadas polares de um ponto $P(x, y)$, então

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta, \end{cases}$$

e temos as seguintes fórmulas de derivação da transformação inversa:

$$r_x = (1/r) y_\theta = \cos \theta, \quad r_y = -(1/r) x_\theta = \operatorname{sen} \theta, \tag{2.15}$$

$$\theta_x = -(1/r) y_r = -(1/r) \operatorname{sen} \theta \quad \text{e} \quad \theta_y = (1/r) x_r = (1/r) \cos \theta.$$

Agora, usando a Regra da Cadeia e (2.15), encontramos:

$$u_x = u_r \cdot r_x + u_\theta \cdot \theta_x = u_r \cdot \cos \theta - (1/r) u_\theta \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$u_y = u_r \cdot r_y + u_\theta \cdot \theta_y = u_r \cdot \operatorname{sen} \theta + (1/r) u_\theta \cdot \cos \theta$$

$$v_x = v_r \cdot r_x + v_\theta \cdot \theta_x = v_r \cdot \cos \theta - (1/r) v_\theta \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$v_y = v_r \cdot r_y + v_\theta \cdot \theta_y = v_r \cdot \operatorname{sen} \theta + (1/r) v_\theta \cdot \cos \theta.$$

Supondo $f(z) = u + iv$ derivável, usaremos as derivadas acima para passar as equações de Cauchy-Riemann (2.12) para a forma polar. Temos

$$u_x = v_y \Leftrightarrow u_r \cos \theta - \frac{1}{r} u_\theta \operatorname{sen} \theta = v_r \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{r} v_\theta \cos \theta \tag{2.16}$$

e, de modo similar, temos

$$u_y = -v_x \Leftrightarrow u_r \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{r} u_\theta \cos \theta = -v_r \cos \theta + \frac{1}{r} v_\theta \operatorname{sen} \theta. \tag{2.17}$$

Multiplicando a equação (2.16) por $\cos \theta$ e a equação (2.17) por $\operatorname{sen} \theta$, e, em seguida, somando os resultados, obtemos:

$$u_r \cos^2 \theta + u_r \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{r} v_\theta (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta),$$

isto é, $u_r = \frac{1}{r} v_\theta$. Procedendo de forma análoga, multiplicando a equação (2.16) por $-\operatorname{sen} \theta$ e a equação (2.17) por $\cos \theta$, e, em seguida, somando os resultados, obtemos $-\frac{1}{r} u_\theta = v_r$. Combinando esses resultados, chegamos às equações de Cauchy-Riemann na forma polar:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}} \quad \text{e} \quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r}} \tag{2.18}$$

A derivada $f'(z_0)$ vem dada por:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u_x + iv_x = u_r \cos \theta - \frac{1}{r} u_\theta \sin \theta + i(v_r \cos \theta - \frac{1}{r} v_\theta \sin \theta) \\ &= u_r \cos \theta + v_r \sin \theta + i(v_r \cos \theta - u_r \sin \theta) = (u_r + iv_r)(\cos \theta - i \sin \theta) \end{aligned}$$

e daí resulta a fórmula de derivação

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r). \quad (2.19)$$

Usando as equações (2.18), obtemos a fórmula de derivação equivalente:

$$f'(z_0) = \frac{1}{r} e^{-i\theta}(v_\theta - iu_\theta). \quad (2.20)$$

EXEMPLO 2.3.24 Dado $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$, a função $F(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$ é derivável em todo z fora do semi-eixo $\{(x, 0) : x \geq 0\}$ e $F'(z) = \frac{1}{2\sqrt{F(z)}}$. De fato, temos:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\theta/2) &\Rightarrow u_r = \frac{\cos(\theta/2)}{2\sqrt{r}} & e & u_\theta = -\frac{\sqrt{r} \sin(\theta/2)}{2} \\ v(r, \theta) = \sqrt{r} \sin(\theta/2) &\Rightarrow v_r = \frac{\sin(\theta/2)}{2\sqrt{r}} & e & v_\theta = \frac{\sqrt{r} \cos(\theta/2)}{2} \end{aligned}$$

onde vemos que as componentes $u(r, \theta)$ e $v(r, \theta)$ são de classe C^1 , no domínio considerado, e as equações de Cauchy-Riemann (2.18) são facilmente comprovadas. A derivada é dada por:

$$F'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{e^{-i\theta}}{2\sqrt{r}} [\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)] = \frac{1}{2\sqrt{r} \cdot e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2F(z)}.$$

1. Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a função definida por $f(z) = |z + i|^2$.

- (a) Qual o conjunto imagem da função f ?
- (b) Usando a definição de derivada, calcule $f'(-i)$.
- (c) A função $f(z)$ é derivável em algum outro ponto $z \neq -i$?

2. Em cada caso, mostre que a função $w = f(z)$ não é derivável em ponto algum do plano \mathbb{C} .

- (a) $f(z) = \operatorname{Im}(z)$ (b) $f(z) = e^{\bar{z}}$ (c) $f(z) = z - \bar{z}$ (d) $f(z) = \exp(|z|)$.

3. Em cada caso, calcule $f''(z)$, sendo:

(a) $f(z) = iz + 2$ (b) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$ (c) $f(z) = z^3$

4. Determine, onde existir, a derivada da função $f(z)$.

(a) $f(z) = \frac{1}{z}$ (b) $f(z) = x^2 + iy^2$ (c) $f(z) = z \operatorname{Im}(z)$ (d) $f(z) = z^2 + 1$ (e) $f(z) = \frac{z}{z-1}$.

5. Para a função $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$, mostre que $u_x + iv_x = 3x^2$. Por que $3x^2$ representa a derivada dessa função apenas em $z = i$?

6. Mostre que a função $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ é derivável apenas na origem e calcule $f'(0)$.

7. Mostre que as funções $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ e $g(z) = (z^2 - z)e^{-x}e^{-iy}$ são inteiras.

8. As funções $f(x + iy) = e^y e^{ix}$ e $g(x + iy) = xy + iy$ são analíticas em algum ponto?

9. Se uma função complexa $w = f(z)$ é analítica em uma vizinhança de um ponto z_0 , exceto em z_0 , o ponto z_0 recebe o nome de *Singularidade* ou *Ponto Singular* da função f .

(i) Um polinômio $P(z)$ não tem ponto singular, por ser uma função inteira.

(ii) As singularidades de uma função racional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ são as raízes do polinômio $Q(z)$.

(iii) A função $f(z) = \bar{z}$ não tem singularidade, porque não é analítica em ponto algum. O mesmo ocorre com a função $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$.

Determine, caso exista alguma, as singularidades das seguintes funções:

(a) $f(z) = \frac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$ (b) $g(z) = \frac{z^3 + i}{z^2 - 3z + 2}$ (c) $h(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} - i \operatorname{Im}(z)$.

10. Calcule a derivada e as singularidades da função $f(z) = \frac{1}{z(z-i)(z^2+i)}$.

11. Dado $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, designe $F(z) = \ln r + i\theta$. Mostre que a função F assim definida é analítica no domínio indicado e $F'(z) = 1/z$.

12. Se $f(z) = z^2$ e k é uma constante real, verifique que as curvas $u(x, y) = k$ e $v(x, y) = k$, onde $u = \operatorname{Re}[f(z)]$ e $v = \operatorname{Im}[f(z)]$, são ortogonais. Idem para a função $g(z) = 1/z$.

13. Se $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ é uma função analítica em um domínio D , que não contém a origem, use o sistema de Cauchy-Riemann e prove que as funções u e v satisfazem à equação de Laplace:

$$r^2 \Phi_{rr} + r \Phi_r + \Phi_{\theta\theta} = 0.$$

14. Se as funções $f(z)$ e $\overline{f(z)}$ são analíticas em um domínio D , mostre que f é constante.
15. O Corolário 2.3.18 sugere algumas situações em que uma função analítica $f(z)$ torna-se constante em um domínio D . Se $\operatorname{Re}[f(z)]$ for constante em D é correto afirmar que $f(z)$ é constante em D ?
16. Determine onde a função $w = f(z)$ é analítica:

$$(a) f(z) = z^3 + z \quad (b) f(z) = (1 - z)^{-1} \quad (c) f(z) = z^{-2} \quad (d) f(z) = \operatorname{Arg}(z).$$

17. Verifique que a função $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ é inteira e calcule $f'(a + ib)$.
18. Se $f(z)$ é uma função inteira, mostre que $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ também o é.
19. Se $f(z)$ é analítica em $z = 0$ e $h(z) = \overline{f(z)}$, mostre que $h(z)$ é derivável em $z = 0$ se, e só se, $f'(0) = 0$.
20. Mostre que a função $f(z) = \sqrt{|xy|}$ satisfaz às equações de Cauchy-Riemann em $z = 0$, mas, não é derivável, e muito menos analítica, em $z = 0$.

21. Se $f = u + iv$ é uma função holomorfa em z_0 e θ representa o ângulo de uma direção $\vec{\eta}$ com o eixo positivo dos x , mostre que:

$$f'(z_0) = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + i \frac{\partial v}{\partial \eta} \right).$$

22. Se f e g são funções deriváveis em z_0 , com $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, mostre que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Use o resultado e calcule $\lim_{z \rightarrow i} \left(\frac{|z - i|^2}{z^3 + z^2 + i + 1} \right)$.

2.4 Funções Harmônicas

Nesta seção usaremos a teoria de *funções harmônicas* para construir, a partir de uma função real $u(x, y)$, uma função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Na construção usaremos o seguinte resultado, admitido, por enquanto, sem demonstração.

TEOREMA 2.4.1 *Se f é analítica em z_0 , então f possui derivada de todas as ordens em z_0 . ■*

Recordemos que uma função real de duas variáveis reais $\varphi(x, y)$, com derivadas parciais até a ordem k , contínuas em um domínio D , denomina-se de *classe C^k* , ou k -vezes diferenciável em D . No caso em que $k = \infty$, a função φ denominar-se-á *infinitamente diferenciável*, ou de classe C^∞ , no domínio D .

DEFINIÇÃO 2.4.2 *Uma função $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, ou de classe C^2 , que satisfaz, no domínio D , à equação de Laplace*

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0,$$

é denominada Função Harmônica em D . Se u e v são harmônicas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann (2.12) em D , diremos que u e v são Harmônicas Conjugadas.

TEOREMA 2.4.3 *Para que uma função complexa $f(z) = u + iv$ seja analítica em D é necessário e suficiente que v seja harmônica conjugada de u , no domínio D .*

DEMONSTRAÇÃO Se $f(z)$ é analítica, são válidas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (2.21)$$

e do Teorema 2.4.1 segue que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são de classe C^∞ e por derivação das equações (2.21), chegamos a:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0 \\ v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0, \end{cases}$$

de onde resulta que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são harmônicas conjugadas. Reciprocamente, se v é harmônica conjugada de u , então u e v são de classe C^2 , satisfazem às equações de Cauchy-Riemann e do Teorema 2.3.17 segue que $f = u + iv$ é analítica. ■

EXEMPLO 2.4.4 (Construindo uma Harmônica Conjugada) Construir, a partir das equações de Cauchy-Riemann, uma harmônica conjugada de $u = x^2 - y^2$.

SOLUÇÃO Em primeiro lugar, observamos que $u(x, y) = x^2 - y^2$ é harmônica em todo plano \mathbb{C} e usando a primeira equação do sistema de Cauchy-Riemann, temos:

$$v_x = -u_y = 2y \Rightarrow v(x, y) = 2xy + C(y) \quad (2.22)$$

e derivando (2.22) com relação a y e usando a relação $v_y = u_x$, encontramos:

$$2x + C'(y) = v_y = u_x = 2x$$

resultando, dessa forma, $C(y) = k$. Assim,

$$v(x, y) = 2xy + k,$$

e, considerando, por exemplo, $k = 0$, encontramos a função inteira

$$f = u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

EXEMPLO 2.4.5 Se $f(z)$ é analítica e $|f(z)|$ é constante em D , então $f(z)$ é constante em D . De fato, dado que f uma função analítica, segue do Teorema 2.4.3 que u e v são harmônicas conjugadas, isto é,

$$\Delta u = \Delta v = 0 \quad e \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad em D.$$

Ora, sendo $|f(z)| = C$, temos que

$$u^2 + v^2 = |f(z)|^2 = C^2, \quad (2.23)$$

e, derivando implicitamente a equação (2.23) com relação a x e depois em relação a y , chegamos, respectivamente, as equações:

$$uu_x + vv_x = 0 \quad e \quad uu_y + vv_y = 0. \quad (2.24)$$

Agora, derivamos (2.24)₁ em relação a x e (2.24)₂ em relação a y e somamos membro a membro os resultados, para chegarmos a:

$$u_x^2 + uu_{xx} + v_x^2 + vv_{xx} + u_y^2 + uu_{yy} + v_y^2 + vv_{yy} = 0,$$

isto é:

$$u_x^2 + u_y^2 + u\Delta u + v\Delta v + v_x^2 + v_y^2 = 0 \quad (2.25)$$

e como $\Delta u = \Delta v = 0$, segue de (3.26) que $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ e, portanto, u e v são constantes.

Logo, $f(z) = u + iv$ é constante.

EXEMPLO 2.4.6 Seja $u(x, y)$ um polinômio do segundo grau, homogêneo e harmônico, digamos

$$u(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Da relação $u_{xx} + u_{yy} = 0$, resulta $c = -a$ e, portanto, $u(x, y)$ é da forma:

$$u(x, y) = a(x^2 - y^2) + bxy, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

A função complexa conjugada $v(x, y)$ é dada por:

$$v(x, y) = 2axy - \frac{b}{2}(x^2 - y^2) + k,$$

sendo k constante, e a função inteira $f(z) = u + iv$ correspondente é:

$$\begin{aligned} f(z) &= a(x^2 - y^2) + bxy + i[2axy - \frac{b}{2}(x^2 - y^2) + k] \\ &= a[x^2 - y^2 + 2xyi] - i\frac{b}{2}(x^2 - y^2 + 2xyi) + ik \\ &= (a - \frac{b}{2}i)z^2 + ik. \end{aligned}$$

1. Mostre que $u = x - 5xy$ é harmônica em todo plano, determine sua conjugada $v(x, y)$ e expresse $f = u + iv$ em termos de $z = x + iy$.
2. Repita o exercício precedente com a função $u(x, y) = e^x \cos y$.
3. Mostre que a função $v(x, y) = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ é harmônica e construa uma função analítica $f(z)$, com $v(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)]$.
4. Repita o exercício precedente com a função $v(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

5. Mostre que a forma mais geral dos polinômios do terceiro grau, homogêneos e harmônicos é

$$u(x, y) = ax^3 - 3bx^2y - 3axy^2 + by^3.$$

Determine a harmônica conjugada $v(x, y)$ e a função inteira correspondente $f(z) = u + iv$.

6. Se $f(z)$ é uma função de classe C^2 em um domínio D , mostre que

$$\Delta \left(|f(z)|^2 \right) = 4 |f'(z)|^2, \quad \text{nos pontos de } D.$$

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.1

1. $f(2 + i) = 11 + 13i$ e $f(3i) = -27 + 3i$.

2. Um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2ix - 2xy \\ &= (x - iy)^2 + 2i(x + iy) = \bar{z}^2 + 2iz. \end{aligned}$$

3. Sendo $z = x + iy$, temos:

(a) $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : z \neq i \text{ e } \operatorname{Im}(z) \neq k\pi\}$.

(b) $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : \operatorname{Im}(z) \neq k\pi + \pi/2 \text{ e } \operatorname{Im}(z) \neq 2k\pi\}$.

(c) $D(f) = \{z \in \mathbb{R} : \operatorname{Re}(z) \neq 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) \neq 1\}$.

4. Considerando $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)]$, com $z = x + iy$, temos:

(a) $u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 3x$ e $v(x, y) = 4xy - 3y$.

(b) $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + x^2$ e $v(x, y) = xy$.

(c) $u(x, y) = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2}$ e $v(x, y) = \frac{y}{(1-x)^2 + y^2}$.

(d) $u(x, y) = \frac{x^2y - y^3}{(x^2 + y^2)^2 - 4xy + 1}$ e $v(x, y) = \frac{y - 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2 - 4xy + 1 - 4xy + 1}$.

5. Figuras em Construção

6. Figuras em Construção

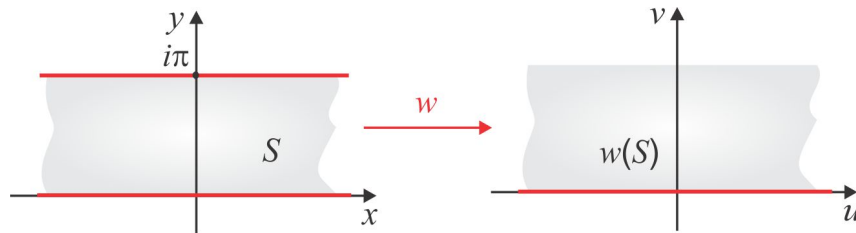
7. As partes real e imaginária da função $w = f(x + iy) = e^x \cdot e^{iy}$ são, respectivamente:

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{e} \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

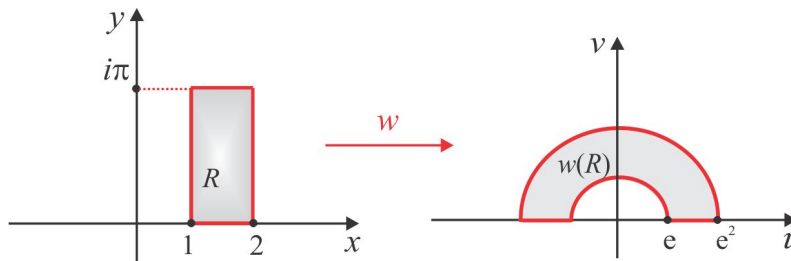
de modo que $u^2 + v^2 = e^{2x}$ (circunferência de centro $z_0 = 0$ e raio $r = e^x$). É oportuno ressaltar que y é, ao mesmo tempo, a parte imaginária de z e o argumento de w . No caso da faixa horizontal S , vemos que:

$$|w| = e^x \rightarrow +\infty, \quad \text{com } x \rightarrow \infty, \quad \text{e} \quad 0 \leq \operatorname{Arg}(w) \leq \pi.$$

e a imagem $w(S)$ é o subconjunto $\{w = u + iv, v \geq 0, w \neq 0\}$.



No caso do retângulo R , a imagem está ilustrada na figura abaixo.

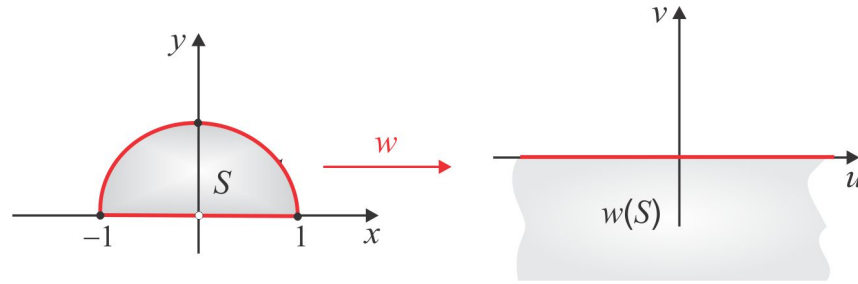


8. Olhando as componentes $u(x, y) = \operatorname{Re}(w)$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}(w)$ ao longo do eixo real e imaginário, respectivamente, vemos que:

$$u(x, 0) = x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{e} \quad v(0, y) = \operatorname{Im}(w) = y \left(1 - \frac{1}{y^2} \right)$$

de onde resulta $\lim_{x \rightarrow 0} u(x, 0) = \pm\infty$ e $v(x, y) \leq 0$, com $\lim_{y \rightarrow 0^+} v(0, y) = -\infty$. A imagem $w(S)$ é o

semiplano inferior $v \leq 0$.



ESCREVENDO PARA APRENDER 2.2

1. Use a definição de limite e a desigualdade $||f(z)| - |w_0|| \leq |f(z) - w_0|$.
2. É suficiente provar que $\lim_{z \rightarrow z_0} z^2 = z_0^2$, seja qual for o ponto z_0 do plano \mathbb{C} . Seja, então, $\varepsilon > 0$ dado e determinemos $\delta > 0$, tal que:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$

O raio δ procurado pode depender do ε dado e do ponto z_0 e, considerando $\delta < 1$, teremos:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |z + z_0| \leq |z - z_0| + |z_0| < \delta + |z_0| < 1 + |z_0|.$$

Assim, se $|z - z_0| < \delta$, então:

$$|z^2 - z_0^2| = |z + z_0| |z - z_0| < (1 + |z_0|) \cdot |z - z_0| < (1 + |z_0|) \cdot \delta$$

Para concluir, basta escolher o raio δ de modo que:

$$\delta < \min \{1, \varepsilon / (1 + |z_0|)\}.$$

3. Comprovar limite pela definição torna-se uma **caçada ao δ** . Para que se tenha $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, procuramos, a partir de um $\varepsilon > 0$ dado, um $\delta > 0$, tal que:

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{sempre que } z \in D(f) \quad \text{e} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

(a) Se $f(z) = z^3 - i$, então:

$$|f(z) + 2i| = |z^3 + i| = |(z - i) \cdot (z^2 + iz - 1)| \leq |z - i| |z| |z + i| + |z - i|. \quad (2.26)$$

Considerando $\delta < 1$, então $|z - i| < \delta$ acarreta:

$$|z| < |z - i| + 1 < 2 \quad \text{e} \quad |z + i| < |z - i| + 2 < 3$$

e de (2.26) chegamos a:

$$|f(z) + 2i| < 7|z - i| < 7\delta$$

e para concluir, basta escolher $\delta < \min\{1, \varepsilon/7\}$.

(b) Se $\delta < 1$, temos:

$$|z^2 + 1| = |z - i| |z + i| < 3\delta, \quad \text{se} \quad |z - i| < \delta$$

e dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\delta < \min\{1, \varepsilon/3\}$ para concluir que $|z - i| < \delta \Rightarrow |z^2 + 1| < \varepsilon$.

(c) Supondo $|z - z_0| < \delta$ e considerando $\delta < 1$, temos

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(z) + |z|| &= |\operatorname{Re}(z - z_0) + \operatorname{Re}(z_0) + |z - z_0 + z_0|| \\ &\leq |\operatorname{Re}(z - z_0)| + |\operatorname{Re}(z_0)| + |z - z_0| + |z_0| \\ &\leq |z - z_0| + 2|z_0| < 1 + 2|z_0| \end{aligned}$$

e escolhamos $\delta < \min\{1, \varepsilon/(1 + 2|z_0|)\}$.

(d) Se $z_0 = 1 - i$, $w_0 = 1 + i$ e $f(z) = x + i(2x + y)$, então:

$$|f(z) - w_0| = |z - z_0 + 2i \operatorname{Re}(z - z_0)| \leq |z - z_0| + 2|\operatorname{Re}(z - z_0)| \leq 3|z - z_0|$$

e para concluir, seja $\delta = \varepsilon/3$.

(e) Temos

$$\left| (\bar{z})^2 - (\bar{z}_0)^2 \right| = |z - z_0| |z + z_0|$$

e considerando $\delta < \min\{1, \varepsilon/(1 + 2|z_0|)\}$ comprovamos a definição.

4. Em alguns casos, o resultado é obtido por substituição direta; em outros é necessário fatoração.

(a) $\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z^2} = \frac{1}{i^2} = -1.$

$$(b) \lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{i(z - i)(z^2 + iz - 1)}{z - i} = \lim_{z \rightarrow i} i(z^2 + iz - 1) = -3.$$

(c) Usando a fatoração do Exercício 19 do Capítulo 1, temos:

$$\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i} = \lim_{z \rightarrow -2i} \frac{(z + 2i)(z^2 - 2iz - 4)}{z + 2i} = \lim_{z \rightarrow -2i} (z^2 - 2iz - 4) = -12.$$

5. Um cálculo direto nos dá:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{-1}{z \cdot z_0} = -\frac{1}{z_0^2}.$$

No caso em que $f(z) = z^n$, usamos a identidade (1.6) e chegamos a:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = nz_0^{n-1}.$$

6. O limite não existe, tendo em vista que:

(i) sobre a trajetória $\gamma_1 : \operatorname{Re}(z) = x_0$ o valor do limite é -1 .

(ii) sobre a trajetória $\gamma_2 : \operatorname{Im}(z) = y_0$ o valor do limite é 1 .

7. Se $w = (1 + z)^{1/4}$ então $z = w^4 - 1$ e, portanto:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + z)^{1/4} - 1}{z} = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w - 1}{w^4 - 1} = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{1}{(w - i)(w + i)(w + 1)} = \frac{1}{4}.$$

8. Considere as trajetórias $\gamma_1 : \operatorname{Re}(z) = 0$ e $\gamma_2 : \operatorname{Im}(z) = 2$, ao longo das quais o limite tem valores $4i$ e $-4i$, respectivamente. Daí conclui-se que o limite não existe.

9. A função $f(z)$ será contínua em $z = 0$ quando $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$. Sejam $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ e $v(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)]$, sendo $z = x + iy$.

(a) $u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ não tem limite em $(0, 0)$ e $f(z)$ é descontínua em $z = 0$.

(b) Neste caso, $u(x, y) \equiv 0$ e, na forma polar, $v(x, y) = \frac{r \operatorname{sen} \theta}{1 + r} \rightarrow 0$, com $r \rightarrow 0$. A função é contínua em $z = 0$.

(c) Temos $u(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \rightarrow 0$, com $z \rightarrow 0$, e $v(x, y) \equiv 0$. Assim, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ e a função é contínua em $z = 0$.

(d) A componente $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não tem limite em $(0, 0)$ e a função é descontínua em $z = 0$.

10. Suponha que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ e seja (z_n) uma sequência no domínio de f , convergindo para z_0 . Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta > 0$ e um número natural n_0 , tais que:

$$\left| \begin{array}{l} \text{(i)} \quad |f(z) - w_0| < \varepsilon, \quad \text{se } z \in D(f) \quad \text{e} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \\ \text{(i)} \quad |z_n - z_0| < \delta, \quad \text{se } n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad n \geq n_0. \end{array} \right.$$

e daí resulta que $|f(z_n) - w_0| < \varepsilon$, se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_0$, e isto nos diz que $\lim f(z_n) = w_0$. Para provar a recíproca, raciocinamos por contradição supondo que $f(z)$ não tem limite w_0 , com $z \rightarrow z_0$. Assim, existe um raio $\varepsilon_0 > 0$ e podemos escolher para cada índice n um número complexo z_n no domínio de f , tal que:

$$|z_n - z_0| < 1/n \quad \text{e} \quad |f(z_n) - w_0| \geq \varepsilon_0.$$

Dessa forma, construímos uma sequência (z_n) no domínio de f , convergindo para z_0 , sem que $f(z_n)$ convirja para w_0 , contradizendo a hipótese.

11. A sequência $z_n = (1 + 1/n) + i(1 + 1/n)$ converge para $z_0 = 1 + i$ e, contudo, a sequência imagem $(f(z_n))$ não converge para $f(z_0)$, já que $f(z_n) \rightarrow 0$ e $f(z_0) = 2$. Esse mesmo argumento pode ser usado para mostrar que a função é descontínua em qualquer ponto da circunferência $|z| = \sqrt{2}$. Nos pontos interiores ou exteriores à circunferência $|z| = \sqrt{2}$ a função é contínua.
12. Considere, por exemplo, a função $w = f(z)$, definida por:

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{se } |z| \leq 1 \\ 2 & \text{se } |z| > 1. \end{cases}$$

Dado $z_0 = a + ib$, com $a^2 + b^2 = 1$, a sequência $z_n = (a + 1/n) + i(b + 1/n)$ converge para z_0 e, ainda assim, $(f(z_n))$ não converge para $f(z_0) = a + ib$, porque $f(z_n) = 2, \forall n$, e $|f(z_0)| = 1$.

13. Primeiro, notamos que para $z \neq 0$ temos $f(z) = -\frac{ix^3y}{x^6 + y^2}$, de modo que o limite ao longo da trajetória $x^3 = y$ é igual a $-i/2$. Por outro lado, ao longo da família de retas $y = mx$, temos:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = -i \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{(x^4 + m^2)} = 0.$$

1. Temos $f(x + iy) = x^2 + (y + 1)^2$ e as componentes de $f(z)$ são:

$$u(x, y) = x^2 + (y + 1)^2 \quad \text{e} \quad v(x, y) \equiv 0.$$

- (a) O conjunto imagem de $w = f(z)$ é:

$$\mathcal{I}(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0 \text{ e } \text{Re}(z) \geq 0\}.$$

- (b) No ponto $z_0 = -i$, temos:

$$f'(-i) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(-i + \Delta z) - f(-i)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \overline{(\Delta z)} = 0.$$

2. Basta comprovar que o sistema de Cauchy-Riemann não é satisfeito em ponto algum do plano \mathbb{C} .

- (a) Temos $u(x, y) = y$, $v(x, y) = 0$ e, portanto, $u_y \neq -v_x$ em todo ponto z .

- (b) Temos $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = -e^x \sin y$ e o sistema é, neste caso:

$$\begin{cases} e^x \cos y = -e^x \cos y \\ -e^x \sin y = e^x \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = -\cos y \\ -\sin y = \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \cos y = 0 \quad \text{e} \quad \sin y = 0.$$

Um tal y não existe!

- (c) Neste caso, $u(x, y) \equiv 0$ e $v(x, y) = 2y$. A equação $u_x = v_y$ não é satisfeita em ponto algum.

3. O cálculo pode ser feito via regras de derivação ou com a fórmula (2.13).

- (a) $f(z) = iz + 2 \Rightarrow f''(z) = 0$.

- (b) $f(z) = \exp(-z) \Rightarrow f''(z) = \exp(-z)$.

Para usar a fórmula (2.13), notamos que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + iv_x = U + iV \Rightarrow f''(z) = U_x + iV_x = u_{xx} + iv_{xx} \quad \text{ou} \\ f''(z) &= V_y - iU_y = v_{xy} - iu_{xy}. \end{aligned}$$

- (c) $f(z) = z^3 \Rightarrow f''(z) = 6z$.

4. Usando regras de derivação ou a fórmula (2.13), temos:

- (a) Se $z \neq 0$, então $f'(z) = -1/z^2$.

- (b) A derivada existe nos pontos da reta $S : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ e é dada por: $f'(z) = 2x + 2iy$.
- (c) As componentes de $f(z)$ são as funções $u = xy$ e $v = y^2$, de classe C^∞ , e o sistema de Cauchy-Riemann é atendido apenas em $z = 0$. Temos $f'(0) = 0$.
- (d) $f'(z) = 2z, \quad z \in \mathbb{C}$. **(função inteira)**
- (e) Se $z \neq 1$, então $f'(z) = -(z - 1)^{-2}$.
5. As componentes $u = x^3$ e $v = -(y - 1)^3$ são de classe C^1 em todo plano \mathbb{C} , mas, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas em $z = i$ e neste ponto temos $f'(i) = 0$.
6. Temos $f(z) = x^2 + ixy$ e as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas apenas em $z = 0$. A derivada é $f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0$.
7. Verifique que o sistema de Cauchy-Riemann é satisfeito em cada ponto (x, y) do plano \mathbb{C} . Note que a função $g(z)$ é o produto da função inteira $z^2 - z$ pela função e^{-z} , também inteira.
8. As componentes da função $f(z)$ são $u = e^y \cos x$ e $v = e^y \sin x$, que não satisfazem ao sistema de Cauchy-Riemann em ponto algum, já que as funções $\cos x$ e $\sin x$ não se anulam simultaneamente. A função $f(z)$ não é derivável, e muito menos analítica, em ponto algum. Já a função $g(z)$ é derivável apenas em $z = i$, mas, não é analítica em ponto algum.
9. A simples inexistência da derivada em um ponto não indica singularidade nesse ponto. Recorde-se que z_0 é uma singularidade de $f(z)$ quando f for analítica em alguma vizinhança de z_0 , exceto no ponto z_0 .
- (a) $z = 0$ e $z = \pm i$ são as singularidades de $f(z)$.
- (b) $z = 0$ e $z = 2$ são as singularidades de $g(z)$.
- (c) A função $h(z)$ não é analítica em ponto algum e, portanto, não tem singularidade.
10. A derivada pode ser calculada por meio de regras de derivação. As singularidades são: $z = 0, z = i$ e $z = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$.
11. Sendo $F(z) = \ln r + i\theta$, então as componentes $u(r, \theta) = \ln r$ e $v(r, \theta) = \theta$ são de classe C^1 e facilmente comprovam-se as equações de Cauchy-Riemann (2.18):

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad \text{e} \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta.$$

A derivada dada por (2.19) é igual a:

$$F'(z) = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \cdot \frac{1}{r} = \frac{1}{r \cdot e^{i\theta}} = \frac{1}{z}.$$

12. No caso de $f(z) = z^2$, temos $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$. As curvas $u(x, y) = k$ e $v(x, y) = k$ são ortogonais se, e só se, $\nabla u(x, y) \bullet \nabla v(x, y) = 0$. Temos:

$$\left| \begin{array}{l} \nabla u(x, y) = (2x) \vec{i} - (2y) \vec{j} \\ \nabla v(x, y) = (2y) \vec{i} + (2x) \vec{j} \end{array} \right. \Rightarrow \nabla u(x, y) \bullet \nabla v(x, y) = 4xy - 4xy = 0.$$

Repita o processo com a função $g(z) = 1/z$, nos pontos $z \neq 0$.

13. Partindo das equações de Cauchy-Riemann, encontramos:

$$\begin{aligned} u_r = \frac{1}{r} v_\theta &\Rightarrow u_{rr} = -\frac{1}{r^2} v_\theta + \frac{1}{r} v_{\theta r} \Rightarrow r^2 u_{rr} = -v_\theta + r v_{\theta r} \\ u_\theta = -r v_r &\Rightarrow u_{\theta\theta} = -r v_{\theta r} \end{aligned}$$

e daí resulta:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = (-v_\theta + r v_{\theta r}) + v_\theta + (-r v_{\theta r}) = 0.$$

Procedimento similar se adota para a função $v(r, \theta)$.

14. Como $f(z) = u + iv$ e $g(z) = u - iv$ são analíticas no domínio D , resulta das equações de Cauchy-Riemann que:

$$\begin{aligned} u_x = v_y \quad \text{e} \quad v_x = -u_y \\ u_x = -v_y \quad \text{e} \quad v_x = u_y \end{aligned}$$

e daí segue que as derivadas primeiras de u e v são nulas em D . Logo, u e v (e portanto $f(z)$) são constantes em D .

15. Se $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ for constante, digamos $u = k$, teremos $u_x = u_y = 0$ e, conseqüentemente, $v_x = -u_y = 0$ e $v_y = u_x = 0$. Logo, $f(z)$ é constante.
16. Se \mathcal{A} representa o conjunto onde $f(z)$ é analítica, então:

(a) $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, isto é, $f(z)$ é uma função inteira.

(b) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 1\}$.

(c) $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$.

(d) $\mathcal{A} = \emptyset$, isto é, $f(z)$ não é analítica em ponto algum.

17. As componentes $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ e $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ são funções polinomiais e, portanto, de classe C^∞ em \mathbb{R}^2 . Além disso, as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas em todo plano. Logo, $f(z)$ é uma função inteira. A derivada no ponto $z = a + ib$ é igual a:

$$f'(a + ib) = 3(a^2 - b^2) + (6ab)i.$$

18. Basta observar que se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = U(x, y) + iV(x, y)$, onde $U(x, y) = u(x, -y)$ e $V(x, y) = -v(x, -y)$. Agora, comprovemos as equações de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} U_x(x, y) = u_x(x, -y) = v_y(x, -y) = V_y(x, y) \\ V_x(x, y) = -v_x(x, -y) = u_y(x, -y) = -U_y(x, y). \end{cases}$$

19. Se $f = u + iv$, então $h = u - iv$ e supondo que $h(z)$ seja derivável em $z = 0$, teremos:

$$\begin{cases} u_x(0, 0) = -v_y(0, 0) \\ u_y(0, 0) = v_x(0, 0). \end{cases} \quad (2.27)$$

Mas, sendo $f(z)$ analítica em $z = 0$, temos:

$$\begin{cases} u_x(0, 0) = v_y(0, 0) \\ u_y(0, 0) = -v_x(0, 0). \end{cases} \quad (2.28)$$

Comparando (2.27) e (2.28) deduzimos que u_x , u_y , v_x e v_y são nulas em $(0, 0)$ e, portanto, $f'(0) = 0$. Reciprocamente, se $f'(0) = 0$, então:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z) - h(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(0)}}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \overline{\left[\frac{f(z) - f(0)}{z} \right]} \cdot \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) = 0.$$

Logo, $h(z)$ é derivável em $z = 0$ e $h'(0) = 0$.

20. Temos que $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ e $v(x, y) \equiv 0$, de modo que:

$$\begin{aligned} u_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0)}{\Delta x} = 0 = v_y(0, 0) \\ u_y(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y)}{\Delta y} = 0 = -v_x(0, 0). \end{aligned}$$

Por outro lado, no ponto $z = 0$, temos

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot \Delta y|}}{\Delta x + i\Delta y}$$

e para comprovar que o último limite não existe, considere a trajetória $\gamma : \Delta x = \Delta y$, ao longo da qual o limite pode ser $\pm \frac{1}{2}(1 - i)$, conforme $\Delta x > 0$ ou $\Delta x < 0$.

21. A partir das equações de Cauchy-Riemann e notando que $\vec{\eta} = (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{j}$, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} &= \nabla u \cdot \vec{\eta} = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta = u_x \cos \theta - v_x \sin \theta \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} &= \nabla v \cdot \vec{\eta} = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta = v_x \cos \theta + u_x \sin \theta\end{aligned}$$

e daí resulta:

$$e^{-i\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{\eta}} + i \frac{\partial v}{\partial \vec{\eta}} \right) = e^{-i\theta} \left[e^{i\theta} (u_x + iv_x) \right] = u_x + iv_x = f'(z_0).$$

22. Considerando que $f(z_0) = g(z_0) = 0$, temos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{g(z) - g(z_0)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{g(z) - g(z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

No cálculo do limite

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{|z - i|^2}{z^3 + z^2 + i + 1}$$

consideramos $f(z) = |z - i|^2$ e $g(z) = z^3 + z^2 + i + 1$ para encontrar

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{|z - i|^2}{z^3 + z^2 + i + 1} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{0}{-3 + 2i} = 0.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.4

1. As harmônicas conjugadas são $v(x, y) = \frac{5}{2}(x^2 - y^2) + y + k$. Considerando $k = 0$, temos a função analítica correspondente

$$\begin{aligned}f(z) &= x - 5xy + i \left[\frac{5}{2}(x^2 - y^2) + y \right] = x + iy + i \frac{5}{2}(x^2 - y^2 + 2xyi) \\ &= z + \frac{5}{2}iz^2.\end{aligned}$$

2. Harmônica conjugada $v(x, y) = e^x \sin y$ e a função analítica é $f(z) = \exp(z)$.
3. A harmônica conjugada é $u(x, y) = \cos x \cosh y$ e $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.
4. $v(x, y) = 3x^2 - y^3$ e $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$.

5. Considerando o polinômio do terceiro grau homogêneo e harmônico:

$$u(x, y) = ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2$$

e usando a equação de Laplace $\Delta u = 0$, obtemos:

$$(6a + 2d)x + (6b + 2c)y = 0 \quad (2.29)$$

e de (2.29) chegamos a $d = -3a$ e $c = -3b$. O polinômio é $u(x, y) = ax^3 + by^3 - 3bx^2y - 3axy^2$, com harmônica conjugada $v(x, y) = bx^3 + 3ax^2y - 3bxy^2 - ay^3$, e a função inteira correspondente é $f(z) = (a + ib)z^3$.

6. Se $f(z) = u + iv$ é analítica em D , então u e v são harmônicas conjugadas e $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$.

Logo:

$$\begin{aligned} \Delta(|f(z)|^2) &= \Delta(u^2) + \Delta(v^2) = 2(u_x^2 + u_y^2) + 2(v_x^2 + v_y^2) \\ &= 2(u_x^2 + v_x^2) + 2(u_y^2 + v_y^2) = 4|f'(z)|^2. \end{aligned}$$

3. Funções Elementares



Além dos polinômios $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$ e das funções racionais (quocientes de polinômios), já tratadas nos capítulos anteriores, outras funções $w = f(z)$, de uma variável complexa, merecem destaques. Neste capítulo abordaremos funções do tipo:

- (a) Exponencial: $w = \exp(z)$.
- (b) Trigonômicas: $w = \cos z$, $w = \operatorname{sen} z$, $w = \tan z$, etc.
- (c) Logarítmica: $w = \operatorname{Log} z$.
- (d) Expoentes Complexos: $w = z^\lambda$ e $w = \lambda^z$, $\lambda \in \mathbb{C}$ fixo.

Estas funções, combinadas com polinômios e funções racionais, são denominadas *funções elementares*.

3.1 A Função $w = \exp(z)$

Dado um número complexo $z = x + iy$, a *Exponencial de z* , indicada por $\exp(z)$ ou e^z , é definida pela relação:

$$\exp(z) = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (3.5)$$

Dessa forma, obtemos a função complexa

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \exp(z), \end{aligned}$$

onde identificamos as partes real $u(x, y) = e^x \cos y$ e imaginária $v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ como funções de classe C^1 e que satisfazem às equações de Cauchy-Riemann em todo ponto z do plano complexo. Em outras palavras, a função $f(z) = \exp(z)$ é uma função inteira (veja o Exemplo 2.3.22), com derivada dada por:

$$\frac{d}{dz}(e^z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como consequência direta da definição, temos as seguintes propriedades:

- (a) Dado $z = x + iy$, temos $|e^z| = e^x > 0$ e $\operatorname{Arg}(e^z) = y$.

(b) Se $k \in \mathbb{Z}$, então $\exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$.

(c) Dado um número complexo z , então $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.

EXEMPLO 3.1.1 É claro que a equação $\exp(z) = 0$ não tem solução, já que $|e^z| = e^x > 0$, $\forall z$. Por outro lado, ao contrário do que ocorre no caso real, a equação $\exp(z) = -1$ tem solução. De fato:

$$\exp(z) = -1 \Leftrightarrow e^x \cdot e^{iy} = e^{i\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1, & \text{isto é, } x = 0 \\ y = (2k + 1)\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Assim, $\exp(z) = -1$ tem uma infinidade de soluções, dadas por $z = (2k + 1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLO 3.1.2 Dado um número complexo não nulo w , a equação $\exp(z) = w$ tem uma infinidade de soluções. De fato, considerando $z = x + iy$ e $w = \rho e^{i\phi}$, temos:

$$\exp(z) = w \Leftrightarrow e^x \cdot e^{iy} = \rho e^{i\phi} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = \rho, & \text{isto é, } x = \ln \rho \\ y = \phi + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Daí resulta que as soluções da equação $e^z = w$ são dadas por $z_k = \ln \rho + (\phi + 2k\pi)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

OBSERVAÇÃO 3.1.3 Levando em conta que $\text{Im}(z) = \text{Arg}(e^z)$, segue dos Exemplos 3.1.1 e 3.1.2 que a função $w = \exp(z)$ é uma bijeção do conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im}(z) \leq \pi\}$ sobre a imagem $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, com inversa determinada por:

$$w = e^z \Leftrightarrow z = \ln |w| + i \text{Arg}(w), \quad w \neq 0. \quad (3.6)$$

LEMA 3.1.4 (Propriedades operacionais de $\exp(z)$) Dados os números complexos z e w , então:

(a) $\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w)$. Por indução, prova-se que $(\exp z)^n = \exp(nz)$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.

(c) $\frac{\exp(z)}{\exp(w)} = \exp(z - w)$.

PROVA Dados $z = a + ib$ e $w = c + id$, então $z + w = a + c + i(b + d)$ e do Lema 1.2.4, deduzimos que:

(a) $\exp(z) \cdot \exp(w) = (e^a \cdot e^{ib})(e^c \cdot e^{id}) = e^{a+c} \cdot e^{i(b+d)} = \exp(z + w)$.

(b) $\frac{1}{\exp(z)} = \frac{1}{e^a \cdot e^{ib}} = e^{-a} \cdot e^{-ib} = \exp(-z)$.

(c) $\frac{\exp(z)}{\exp(w)} = \exp(z) \cdot \frac{1}{\exp(w)} = \exp(z) \cdot \exp(-w) = \exp(z-w).$

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.1

1. Escreva as funções abaixo sob a forma $u(x, y) + iv(x, y)$.

(a) $w = \exp(2z)$ (b) $w = \exp(z^2)$ (c) $w = \exp(i\bar{z})$.

2. Determine todas as soluções complexas das seguintes equações:

(a) $\exp(2z) = -1$ (b) $\exp(z) = i$ (c) $\exp(z) = -2$ (d) $\exp(z^2) = 1$ (e) $\exp(2z-1) = 1$.

3. Repita o exercício precedente com as equações:

(a) $\operatorname{Re}(e^z) = 0$ (b) $e^z + 6e^{-z} = 5$ (c) $\exp(3z-4) = -1$ (d) $\exp(z) = 1 + \sqrt{3}i$.

4. Determine os valores de z para os quais se tem $\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$.

5. Mostre que $|\exp(-2z)| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$.

6. Esboce graficamente o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : |\exp(iz)| < 1\}$ e identifique sua fronteira. O conjunto S é aberto? É conexo?

7. Simplifique a expressão $\exp(2z+i) + \exp(iz^2)$ para deduzir que

$$|\exp(2z+i) + \exp(iz^2)| \leq \exp(2\operatorname{Re}z) + \exp[[-2\operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z)]]$$

8. Se $\exp(z)$ é real, mostre que $\operatorname{Im}(z) = k\pi$.

9. Determine onde as funções $f(z) = \exp(\bar{z})$ e $g(z) = \frac{e^z + z - i}{e^z - 1}$ são analíticas.

10. Se $f(z)$ é analítica em um domínio D , mostre que $F(z) = \exp(f(z))$ também o é. Como consequência, deduza que as funções $f(z) = \exp(z^2)$ e $g(z) = \exp(\pm iz)$ são inteiras.

11. Mostre que a função $\varphi(x, y) = \operatorname{Re}(e^{1/z})$ é harmônica em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

12. Suponha que $f(z) = u + iv$ seja analítica em D . Explique a razão das funções

$$U(x, y) = e^{u(x,y)} \cos v(x, y) \text{ e } V(x, y) = e^{u(x,y)} \operatorname{sen} v(x, y)$$

serem harmônicas em D e $V(x, y)$ ser harmônica conjugada de $U(x, y)$.

13. Determine as singularidades da função $w = \exp\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$.

14. Dado $\phi \in \mathbb{R}$, considere a transformação $f(z) = \frac{e^{i\phi}(z-z_0)}{\bar{z}_0 z - 1}$.

(i) Descreva, geometricamente, a transformação no caso em que $z_0 = 0$.

(ii) Qual a imagem pela transformação f do semiplano $[\operatorname{Im}(z) \leq 0]$?

(iii) Se $|z_0| < 1$, mostre que f transforma o disco $|z| \leq 1$ no disco $|w| \leq 1$.

(iv) Se $\operatorname{Im}(z_0) < 0$, qual a imagem do semiplano $[\operatorname{Im}(z) \leq 0]$ pela transformação f ?

3.2 As Funções Trigonômicas Complexas

3.2.1 As Funções $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$

Para definir as funções trigonométricas $\cos z$ e $\operatorname{sen} z$, recordemos que:

$$\exp(ix) = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \exp(-ix) = \cos x - i \operatorname{sen} x,$$

de onde deduzimos que

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i} [\exp(ix) - \exp(-ix)] \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{1}{2} [\exp(ix) + \exp(-ix)], \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Motivados pelas relações (3.7), definimos as primeiras funções trigonométricas:

$$\boxed{\operatorname{sen} z = \frac{1}{2i} [\exp(iz) - \exp(-iz)]} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos z = \frac{1}{2} [\exp(iz) + \exp(-iz)]}. \quad (3.8)$$

e o leitor pode comprovar diretamente da definição que:

$$\boxed{\cos \bar{z} = \cos(\bar{z})} \quad \text{e} \quad \boxed{\operatorname{sen} \bar{z} = \operatorname{sen}(\bar{z})}.$$

LEMA 3.2.1 As funções $\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{cos} z$ definidas em (3.8) são inteiras, com derivadas dadas por:

$$\boxed{(\operatorname{sen} z)' = \operatorname{cos} z.} \quad \text{e} \quad \boxed{(\operatorname{cos} z)' = -\operatorname{sen} z.}$$

PROVA As funções $z \mapsto \exp(iz)$ e $z \mapsto \exp(-iz)$ são inteiras, de modo que $\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{cos} z$ também o são. Além disso,

$$(a) \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \frac{1}{2i} [i \exp(iz) + i \exp(-iz)] = \frac{1}{2} [\exp(iz) + \exp(-iz)] = \operatorname{cos} z.$$

$$(b) \quad \frac{d}{dz}(\operatorname{cos} z) = \frac{1}{2} [i \exp(iz) - i \exp(-iz)] = -\frac{1}{2i} [\exp(iz) - \exp(-iz)] = -\operatorname{sen} z. \quad \blacksquare$$

3.2.2 Algumas Identidades Trigonômétricas

Algumas identidades trigonométricas envolvendo as funções $\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{cos} z$ são estabelecidas com auxílio das funções hiperbólicas reais:

$$\boxed{\operatorname{senh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}), \quad y \in \mathbb{R}.} \quad \text{e} \quad \boxed{\operatorname{cosh} y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad y \in \mathbb{R}.} \quad (3.9)$$

As seguintes propriedades das funções hiperbólicas reais decorrem diretamente da definição (3.9) e as demonstrações são deixadas para o leitor, como parte do processo de treinamento.

(i) $\operatorname{cosh}^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1.$

(ii) $\operatorname{senh} y = 0 \Leftrightarrow y = 0.$

(iii) $\frac{d}{dy}(\operatorname{senh} y) = \operatorname{cosh} y$ e $\frac{d}{dy}(\operatorname{cosh} y) = \operatorname{senh} y.$

(iv) A função $y \mapsto \operatorname{cosh} y$, além de ser uma função par, é crescente no intervalo $(0, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$. A função $y \mapsto \operatorname{senh} y$ é ímpar e crescente em $(-\infty, +\infty)$.

(v) A equação $\operatorname{cosh} y = 0$ não tem solução real e dado um número real a , as soluções da equação $\operatorname{cosh} y = \operatorname{cosh} a$ são $y = \pm a$.

Assim como ocorre no caso real, as funções $\operatorname{sen} z$ e $\operatorname{cos} z$ também são 2π -periódicas e temos a *Relação Fundamental*:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 z + \operatorname{cos}^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.} \quad (3.10)$$

De fato, a periodicidade decorre diretamente da propriedade: $\exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$, $\forall z$, e para comprovar a *Identidade Fundamental* (3.10), notamos que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z &= \left[\frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \right]^2 + \left[\frac{1}{2i} (e^{iz} + e^{-iz}) \right]^2 \\ &= -\frac{1}{4} [e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}] + \frac{1}{4} [e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}] = 1.\end{aligned}$$

LEMA 3.2.2 *Dado um número complexo z , temos:*

(a) $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i (\cos x \operatorname{senh} y)$.

(b) $\cos z = \cos x \cosh y - i (\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y)$.

PROVA As demonstrações de (a) e (b) são similares e para ilustrar faremos o item (a). Considerando $z = x + iy$, temos que $iz = -y + ix$ e, portanto

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \frac{1}{2i} (e^{-y+ix} - e^{y-ix}) = \frac{1}{2i} [e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x)] \\ &= \frac{1}{2i} [i (e^y + e^{-y}) \operatorname{sen} x - (e^y + e^{-y}) \cos x] = \operatorname{sen} x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + i \cos x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

COROLÁRIO 3.2.3 *Se z é um número complexo, então:*

(a) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.

(b) $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y$.

PROVA Considerando $z = x + iy$, resulta da parte (a) do Lema 3.2.2 que

$$\begin{aligned}|\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \operatorname{senh}^2 y - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x (\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{senh}^2 y \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y.\end{aligned}$$

Para provar a parte (b) use a parte (b) do Lema 3.2.2. \blacksquare

EXEMPLO 3.2.4 (Os zeros de $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$) Usando o Corolário 3.2.3, vamos encontrar os zeros das funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$.

SOLUÇÃO Se $z = x + iy$, temos que $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow |\operatorname{sen} z|^2 = 0$ e do Corolário 3.2.3, resulta:

$$|\operatorname{sen} z| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \operatorname{senh}^2 y = 0 \Leftrightarrow y = 0, \end{cases}$$

e a partir daí, deduzimos que $\operatorname{sen} z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. De modo similar, deduzimos que

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.2.3 Outras Funções Trigonométricas

As outras funções trigonométricas são definidas de modo natural, como no caso de uma variável real. Temos:

(a) **TANGENTE:** $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$

(b) **COTANGENTE:** $\cotg z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

(c) **SECANTE:** $\sec z = \frac{1}{\cos z}$

(d) **COSSECANTE:** $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$

As identidades básicas e as fórmulas de derivação são obtidas com as regras já estabelecidas para as funções $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$. Vejamos dois exemplos para ilustrar.

EXEMPLO 3.2.5 *Provar a identidade*

$$\boxed{1 + \tan^2 z = \sec^2 z} \tag{3.11}$$

SOLUÇÃO Temos que

$$1 + \tan^2 z = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z.$$

EXEMPLO 3.2.6 *Vamos estabelecer a regra de derivação*

$$\boxed{(\cotg z)' = -\operatorname{cosec}^2 z} \tag{3.12}$$

SOLUÇÃO Usando a regra do quociente, temos:

$$\frac{d}{dz}(\cotg z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{\sin z}\right) = \frac{-\sin z \sin z - \cos z \cos z}{\sin^2 z} = -\frac{1}{\sin^2 z} = -\operatorname{cosec}^2 z.$$

Outras identidades e regras de derivação envolvendo essas funções são deixadas como exercícios.

1. Encontre as soluções das seguintes equações:

(a) $\sin z = 2$ (b) $\cos z = 2$ (c) $\cos z = \sqrt{2}$ (d) $\cos z = 1/2$.

2. Verifique que as funções $\operatorname{Re}(\cos z)$ e $\operatorname{Im}(\sin z)$ são harmônicas no plano \mathbb{C} .

3. Estabeleça as seguintes identidades trigonométricas:

(a) $\sin(iz) = i \sinh z$.

(b) $\cos(iz) = \cosh z$.

(c) $1 + \cotg^2 z = \operatorname{cosec}^2 z$.

(d) $|\cos z|^2 - |\sin^2 z| = \cos(2 \operatorname{Re} z)$.

(e) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

(f) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$.

(g) $2 \sin(z + w) \cdot \sin(z - w) = \cos(2w) - \cos(2z)$.

(h) $2 \cos(z + w) \cdot \sin(z - w) = \sin(2z) - \sin(2w)$.

4. Determine os valores de z para os quais $\cos z$ é real.

5. Determine onde a função $f(z) = \frac{e^z + z - i}{(e^z - 1) \cos z}$ é analítica.

6. Dado $z = x + iy$, comprove as seguintes desigualdades:

(a) $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$ (b) $|\sin x| \leq |\sin z|$ (c) $|\cos x| \leq |\cos z|$.

7. Determine os valores de z para os quais:

(a) $\cos(i\bar{z}) = \overline{\cos(iz)}$ (b) $\sin(i\bar{z}) = \overline{\sin(iz)}$.

8. Determine todas as raízes da equação $\sen z = \cosh 4$.

9. **FUNÇÕES HIPERBÓLICAS** As funções hiperbólicas $\sinh z$ e $\cosh z$ são definidas por:

$$\boxed{\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})} \quad \text{e} \quad \boxed{\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})}. \quad (3.13)$$

Com base na definição (3.13), vemos que $\sinh z$ e $\cosh z$ são funções inteiras. Agora, mostre que:

(a) $\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z$ e $\frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z$.

(b) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

(c) $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sen y$.

(d) $\cosh z = \cosh x \cos y - \sinh x \sen y$.

(e) $\sinh(z + \pi i) = -\sinh z$ e $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$.

10. Em cada caso, determine as raízes da equação.

(a) $2 \cosh z = 1$ (b) $\sinh z = i$ (c) $\cosh z = -2$.

11. Mostre que $|\cos z|^2 + |\sen z|^2 = 1$ se, e somente se, z é real.

3.3 Logarítmos & Expoentes

O Exemplo 3.1.2 é a motivação para se definir o *Logarítmo Complexo*. Dado um número complexo não nulo $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, o *logarítmo* de z , indicado por $\log z$, é definido por:

$$\boxed{\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad r > 0, \quad k \in \mathbb{Z},} \quad (3.14)$$

o que torna a função $z \mapsto \log z$, $z \neq 0$, *plurívoca* ou *multivalente*. Em outras palavras, se z é um número complexo não nulo, então $\log z$ representa um conjunto infinito de números complexos e, no caso em que $k = 0$, obtemos o *Valor Principal* de $\log z$, denotado por $\text{Log } z$, isto é:

$$\boxed{\text{Log } z = \ln r + i\theta, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi.} \quad (3.15)$$

É claro que se $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, então $w = \text{Log } z \Leftrightarrow z = \exp(w)$. Além disso, fixado k , a aplicação $z = \exp w$ define uma bijeção da faixa $(2k - 1)\pi < \text{Im}(w) \leq (2k + 1)\pi$, sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, cuja inversa é dada por:

$$w = \ln r + i(\theta + 2k\pi), \quad r > 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi.$$

EXEMPLO 3.3.1 Temos que $\text{Log } i = i\pi/2$ e $\text{Log } (-1) = i\pi$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} \log i &= \{(2k + 1/2)\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \quad e \\ \log(-1) &= \{(2k + 1)\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 3.3.2 Do Exemplo (3.3.1), vemos que:

$$\text{Log}(i^2) = \text{Log}(-1) = i\pi = 2(i\pi/2) = 2\text{Log } i$$

que se assemelha ao caso real, onde temos $\ln(x^2) = 2\ln x$, $x > 0$. Em se tratando de $\log z$, que representa um conjunto de valores, temos $\log(i^2) \neq 2\log i$. De fato:

$$\begin{aligned} 2\log i &= \{(4k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}\} \\ \log(i^2) &= \log(-1) = \{(2k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

e esses conjuntos são distintos, isto é, $\log(i^2) \neq 2\log i$. Notamos que $3\pi i \in \log(i^2)$ e $3\pi i \notin 2\log i$.

EXEMPLO 3.3.3 Se $z = w = -1$, então:

$$\begin{aligned} \log(z \cdot w) &= \log 1 = \ln 1 + (0 + 2k\pi i) = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad e \\ \log z + \log w &= \log(-1) + \log(-1) = (2k + 1)\pi i + (2n + 1)\pi i = 2(k + n + 1)\pi i, \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

e, portanto, $\log(z \cdot w) = \log z + \log w$. Essa igualdade deve ser interpretada da seguinte forma: qualquer valor de $\log(z \cdot w)$ se expressa como soma de um valor de $\log z$ com um valor de $\log w$.

EXEMPLO 3.3.4 A propriedade $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, válida no caso real, com $x > 0$ e $y > 0$, seria válida no caso complexo para a função $\text{Log } z$? Se considerarmos $z = w = -1$, obteremos:

$$\text{Log}(z \cdot w) = 0 \quad e \quad \text{Log}(z) = \text{Log}(w) = \pi i,$$

de modo que a propriedade não é válida, em geral, para a função $\text{Log } z$.

EXEMPLO 3.3.5 Um fato que nos parece óbvio é que $\exp(\log z) = z$, para $z \neq 0$. Entretanto, a relação $\log(e^z) = z$ não ocorre para todo z , já que $\log(e^z) = z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Na verdade, z é apenas um dos valores assumidos por $\log(\exp z)$.

3.3.1 Ramos de $w = \log z$ (Propriedades Analíticas de $\text{Log } z$)

A função $w = \text{Log } z = \ln r + i\theta$, $r > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$, tem parte real $u(r, \theta) = \ln r$ e parte imaginária $v(r, \theta) = \theta$ e no domínio $D : r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, onde as funções u e v são contínuas, temos a continuidade de $\text{Log } z$. Para comprovarmos que D é o domínio máximo no qual $\text{Log } z$ é contínua, basta observarmos que u não está definida na origem e, por outro lado, $\text{Log } z$ é descontínua em qualquer ponto $z = re^{i\pi}$, $r > 0$, do eixo negativo dos x . De fato, em um tal ponto $\text{Log } z$ tem valor $\ln r + i\pi$ e considerando $z_n = re^{i(-\pi+1/n)}$, temos que $z_n \rightarrow z$ e $\text{Log}(z_n)$ não converge para $\text{Log } z$, já que

$$\text{Log}(z_n) = \ln r + i(-\pi + 1/n) \rightarrow \ln r - i\pi.$$

No domínio D , as funções $u(r, \theta)$ e $v(r, \theta)$ são de classe C^2 e as equações de Cauchy-Riemann são facilmente comprovadas:

$$v_\theta = ru_r = 1/r \quad \text{e} \quad u_\theta = -rv_r = 0$$

e, por conseguinte, $w = \text{Log } z$ é analítica em D , com derivada dada por

$$\frac{d}{dz}(\text{Log } z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}, \quad \text{em } D.$$

A notação $\text{Log } z$ é usada para denotar o valor principal de $\log z$ e, também, a função analítica obtida por restrição de $\text{Log } z$ ao domínio $D : r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$. Se na definição $\text{Log } z = \ln r + i\theta$ restringirmos o valor de θ ao intervalo $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, α fixado, a função

$$\log z = \ln r + i\theta, \quad r > 0, \quad \alpha < \theta < \alpha + 2\pi, \tag{3.16}$$

é unívoca, ou univalente, na faixa horizontal $\alpha < \text{Im}(w) < \alpha + 2\pi$.

Por *Ramo* de uma função plurívoca $f(z)$ entendemos qualquer função unívoca F , analítica em algum domínio D , no qual $F(z)$ é um dos valores de $f(z)$.

EXEMPLO 3.3.6 O *Ramo Principal* da função $f(z) = \text{Log } z$ é definido por:

$$\text{Log } z = \ln r + i\theta, \quad z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi. \tag{3.17}$$

EXEMPLO 3.3.7 Considerando o ramo principal de $\text{Log } z$, vamos identificar a região de analiticidade da função $f(z) = \text{Log}(z + \lambda)$, sendo λ um número real positivo. Se $z = x + iy$, a função $w = f(z)$, definida por:

$$f(z) = \text{Log}(x + \lambda + iy)$$

é analítica nos pontos $z = x + iy$ fora da semireta $\{(x, y) : x + \lambda \leq 0 \text{ e } y = 0\}$, isto é, fora do corte $L = \{(x, 0) : x \leq -\lambda\}$, como sugere a Figura 3.1

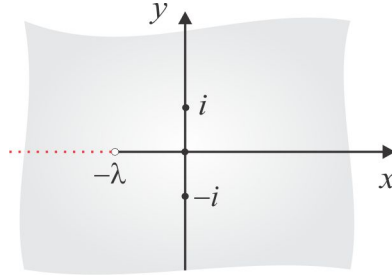


Figura 3.1: Domínio de $\text{Log}(\lambda + z)$.

EXEMPLO 3.3.8 O domínio de analiticidade da função $f(z) = \text{Log}(2 + z^2)$ é determinado de forma similar ao Exemplo 3.3.7; excluímos os pontos z para os quais $z^2 + 2$ estão no corte $L = \{(x, 0) : x \leq 0\}$. Temos:

$$f(z) = \text{Log}(2 + x^2 - y^2 + 2xyi)$$

e $f(z)$ será analítica nos pontos fora da semireta $\{(x, y) : 2 + x^2 - y^2 \leq 0 \text{ e } xy = 0\}$. A opção $y = 0$ é descartada e com $x = 0$ chegamos a $|y| \geq \sqrt{2}$; o domínio de analiticidade de $f(z)$, ilustrado na Figura 3.2, é constituído dos pontos fora das semiretas $L = \{(0, y) : |y| \geq \sqrt{2}\}$.

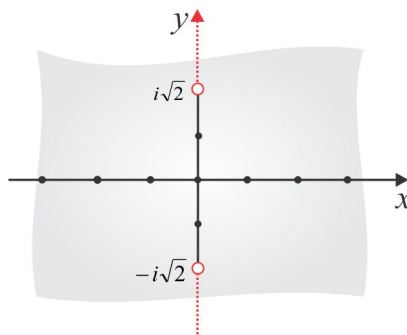


Figura 3.2: Domínio de $\text{Log}(2 + z^2)$.

3.3.2 Propriedades & Consequências

Algumas propriedades do logaritmo complexo são válidas para $\log z$ e outras para $\text{Log } z$ e é necessário separar os casos. Por exemplo, a propriedade clássica $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, válidas no caso real para $x > 0$ e $y > 0$, não é válida no caso complexo, como ilustra o Exemplo 3.3.4. Vejamos alguns casos.

(a) Se $z \neq 0$, então $\exp(\log z) = z$ e, de acordo com o que vimos no Exemplo 3.3.5, não é verdade, em geral, que $\log(\exp z) = z$.

(b) Se $z \neq 0$, então $w = \text{Log}(z) \Leftrightarrow z = \exp(w)$. De fato, considerando $z = x + iy$, temos:

$$\text{Log}(\exp z) = \text{Log}(e^x \cdot e^{iy}) = \ln(e^x) + iy = x + iy = z.$$

Por outro lado, dado $w = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, então:

$$\exp(\text{Log } w) = \exp(\ln \rho + i\varphi) = \exp(\ln \rho) \cdot \exp(i\varphi) = \rho e^{i\varphi} = w.$$

(c) Se z e w são números complexos não nulos, então $\log(z \cdot w) = \log(z) + \log(w)$. Esta igualdade deve ser interpretada como uma igualdade entre conjuntos, isto é, qualquer valor de $\log(z \cdot w)$ pode ser escrito como soma de um valor de $\log(z)$ com um valor de $\log(w)$. Para comprová-la, sejam $z = r e^{i\theta}$ e $w = \rho e^{i\varphi}$, com $r > 0$ e $\rho > 0$, e observemos que:

$$\begin{aligned} \log z + \log w &= \log(r \cdot e^{i\theta}) + \log(\rho \cdot e^{i\varphi}) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) + \ln \rho + i(\varphi + 2n\pi) \\ &= \ln(r\rho) + i[\theta + \varphi + 2(k+n)\pi] = \log\left[(r\rho) \cdot e^{i(\theta+\varphi)}\right] = \log(z \cdot w). \end{aligned}$$

No Exemplo 3.3.4 enfatizamos que a relação $\text{Log}(z \cdot w) = \text{Log } z + \text{Log } w$ não é válida, em geral. Vale ressaltar, ainda, que o conjunto de valores $\log z + \log z$ pode ser diferente do conjunto $2 \log z$. Considere $z = -1$ e verifique que os conjuntos $\log z + \log z$ e $2 \log z$ são distintos.

(d) Se $w \neq 0$, então $\log(1/w) = -\log w$. De fato, considerando $w = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$ e $k = -n$, temos:

$$\begin{aligned} \log(1/w) &= \log(\rho^{-1} \cdot e^{-i\varphi}) = \ln(\rho^{-1}) + i(-\varphi + 2n\pi) \\ &= -\ln \rho - i(\varphi + 2k\pi) = -\log(w). \end{aligned}$$

(e) Decorre de (c) e (d) que se z e w são números complexos não nulos, então:

$$\log(z/w) = \log(z) - \log(w).$$

LEMA 3.3.9 (Propriedade da Potência) Se $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$, um complexo não nulo, então:

$$\log(z^{1/n}) = \frac{1}{n} \log(z), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

PROVA Considerando que $z^{1/n} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \cdot i\right)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, temos:

$$\log\left(z^{1/n}\right) = \ln\left(\sqrt[n]{r}\right) + i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} + 2m\pi\right) = \frac{1}{n} \ln r + i\left(\frac{\theta + 2k'\pi}{n}\right), \quad (3.18)$$

onde $m \in \mathbb{Z}$ e $k' = k + nm$. Por outro lado,

$$\frac{1}{n} \log z = \frac{1}{n} [\ln r + i(\theta + 2m'\pi)] = \frac{1}{n} \ln r + i\left(\frac{\theta + 2m'\pi}{n}\right), \quad m' \in \mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

Vemos que os conjuntos de números complexos $S_1 = \log(z^{1/n})$ e $S_2 = \frac{1}{n} \log z$ dados, respectivamente, por (3.18) e (3.19) são iguais. ■

Finalizamos esta seção ressaltando que, ao contrário do caso real, a propriedade $\log(z^n) = n \log z$, $n = 1, 2, 3, \dots$, não é válida, em geral, no caso complexo. De fato, dado $z = re^{i\theta}$, com $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, temos:

$$\begin{aligned} \log(z^n) &= \log\left(r^n e^{in\theta}\right) = n \ln r + i(n\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\ n \log(z) &= n \log\left(re^{i\theta}\right) = n \ln r + in(\theta + 2k'\pi), \quad k' \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

e para que $n \ln r + i(n\theta + 2k\pi) = n \ln r + in(\theta + 2k'\pi)$, devemos ter $k = nk'$, isto é, k deve ser um múltiplo inteiro de n . É claro que $n \log z$ é um subconjunto de $\log(z^n)$, mas, nem sempre se tem $\log(z^n) \subset n \log z$. Por exemplo, considerando $n = 2$ e $k = 1$, vemos que $z = 2 \ln r + i(2\theta + 2\pi)$ pertence ao conjunto $\log(z^2)$ e não pertence ao conjunto $2 \log z$, porque não existe um inteiro k' , tal que $z = 2 \ln r + 2i(\theta + 2k'\pi)$.

3.3.3 Expoentes Complexos

Da relação

$$\log(z^{1/n}) = \frac{1}{n} \log z, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.20)$$

deduzimos que

$$\exp [\log(z^{1/n})] = \exp \left(\frac{1}{n} \log z \right) \quad (3.21)$$

e, para cada $z \neq 0$ fixo, o lado direito da equação (3.21) assume n valores distintos. De fato:

$$\frac{1}{n} \log z = \frac{1}{n} [\ln r + i(\theta + 2k\pi)] = \ln(\sqrt[n]{r}) + i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

e, assim,

$$\exp \left(\frac{1}{n} \log z \right) = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right].$$

Considerando que a expressão $\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ assume n valores distintos, correspondentes aos valores $k = 0, 1, \dots, n-1$, deduzimos que o mesmo ocorre com $\exp \left(\frac{1}{n} \log z \right)$. Por outro lado, temos que $z^n = \exp(n \log z)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $z \neq 0$, e, também:

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z} \right)^n = \exp \left(n \log \frac{1}{z} \right) = \exp(-n \log z).$$

Temos, portanto, as seguintes relações:

$$z^k = \exp(k \log z), \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (3.22)$$

$$z^{1/n} = \exp \left(\frac{1}{n} \log z \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.23)$$

As relações (3.22) e (3.23) motivam o conceito de potência com expoente complexo que, em geral, definem funções multivalentes.

DEFINIÇÃO 3.3.10 *Dados $z \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, a potência complexa z^λ é definida pela expressão:*

$$z^\lambda = \exp(\lambda \log z). \quad (3.24)$$

Por Ramo Principal de z^λ entendemos a função univalente $\Phi(z) = \exp(\lambda \operatorname{Log} z)$, definida no domínio $D: r > 0, -\pi < \theta < \pi$.

EXEMPLO 3.3.11 *Determinemos a potência i^{-2i} . Temos:*

$$i^{-2i} = \exp(-2i \log i) = \exp[-2i(2k\pi + \pi/2)i], \quad k \in \mathbb{Z},$$

e daí resulta:

$$i^{-2i} = \exp[(4k+1)\pi], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

O exemplo a seguir, mostra, através de igualdade entre conjuntos, uma propriedade da potência complexa de z .

EXEMPLO 3.3.12 Assim como ocorre com os expoentes inteiros, se $z \neq 0$ e λ é um número complexo dado, então $z^{-\lambda} = \frac{1}{z^\lambda}$. De fato, de (3.24) temos que:

$$z^{-\lambda} = \exp(-\lambda \log z) = \frac{1}{\exp(\lambda \log z)} = \frac{1}{z^\lambda}.$$

Os valores de $z^{-\lambda}$ e de $\frac{1}{z^\lambda}$ são, respectivamente:

$$\exp[-\lambda(\ln r + i(\theta + 2k\pi))] \quad e \quad \{\exp[\lambda(\ln r + i(\theta + 2k\pi))]\}^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e esses conjuntos de valores são iguais.

LEMA 3.3.13 O ramo principal $\Phi(z) = \exp(\lambda \operatorname{Log} z)$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, é analítico e a derivada é dada por:

$$\Phi'(z) = \frac{d}{dz}(z^\lambda) = \lambda z^{\lambda-1}.$$

PROVA O ramo principal $\Phi(z) = \exp(\lambda \operatorname{Log} z)$ é a composição das funções analíticas $z \mapsto \lambda \operatorname{Log} z$ e $w \mapsto e^w$ sendo, portanto, analítico no domínio considerado. A partir da Regra da Cadeia, obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= \frac{d}{dz}[z^\lambda] = \frac{d}{dz}[\exp(\lambda \operatorname{Log} z)] = \frac{\lambda}{z}[\exp(\lambda \operatorname{Log} z)] \\ &= \lambda \left[\frac{\exp(\lambda \operatorname{Log} z)}{\exp(\operatorname{Log} z)} \right] = \lambda \exp[(\lambda - 1) \operatorname{Log} z] = \lambda z^{\lambda-1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EXEMPLO 3.3.14 Vejamos o ramo principal de \sqrt{z} . Temos que:

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} z\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \ln r + \frac{1}{2} i\theta\right) = \exp(\ln \sqrt{r} + i\theta/2) \\ &= \sqrt{r} \exp(i\theta/2) = \sqrt{r}[\cos(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2)]. \end{aligned}$$

A analiticidade decorre do Lema 3.3.13, mas, pode ser investigada diretamente a partir das componentes

$$u(r, \theta) = \sqrt{r} \cos(\theta/2) \quad e \quad v(r, \theta) = \sqrt{r} \operatorname{sen}(\theta/2),$$

que são de classe C^2 e as Equações de Cauchy-Riemann são facilmente comprovadas, notando que:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos(\theta/2) \quad e \quad v_\theta = \frac{\sqrt{r}}{2} \cos(\theta/2) \\ u_\theta &= -\frac{\sqrt{r}}{2} \operatorname{sen}(\theta/2) \quad e \quad v_r = \frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen}(\theta/2) \end{aligned}$$

e, portanto, $u_r = (1/r)v_\theta$ e $u_\theta = -(1/r)v_r$. A derivada pode ser obtida diretamente do Lema 3.3.13, com $\lambda = 1/2$, ou pela fórmula (2.19) do Capítulo 2. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\sqrt{z}) &= e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{e^{-i\theta}}{2\sqrt{r}} [\cos(\theta/2) + i \operatorname{sen}(\theta/2)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}e^{i\theta/2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 3.3.15 No ramo principal $0 \leq \operatorname{Arg} z < 2\pi$, temos $\sqrt{-1} = i$. De fato:

$$\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log}(-1)\right) = \exp\left[\frac{1}{2}(\ln 1 + i\pi)\right] = e^{i\pi/2} = i.$$

Por outro lado, se considerarmos para \sqrt{z} o ramo $2\pi \leq \operatorname{Arg} z < 4\pi$, teremos $\sqrt{-1} = -i$, pois, neste caso, $\operatorname{Arg}(-1) = 3\pi$ e, portanto:

$$\sqrt{-1} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(-1)\right) = \exp\left[\frac{1}{2}(\ln 1 + 3\pi i)\right] = e^{3\pi i/2} = -i.$$

EXEMPLO 3.3.16 Em qual ramo devemos considerar \sqrt{z} , para que se tenha $\sqrt{4} = -2$? No ramo $\pi/2 < \theta < 5\pi/2$, temos que $\operatorname{Arg}(4) = 2\pi$, de modo que:

$$\sqrt{4} = \exp\left[\frac{1}{2}(\ln 4 + 2\pi i)\right] = 2e^{\pi i} = -2.$$

EXEMPLO 3.3.17 Consideremos a função $f(z) = \sqrt{z^2 + 4}$, determinada pela condição $f(0) = -2$, isto é, $\sqrt{4} = -2$, e identifiquemos sua região de analiticidade. Temos:

$$f(z) = \exp\left[\frac{1}{2} \operatorname{Log}(z^2 + 4)\right]$$

e no ramo principal de $\operatorname{Log} z$, a função $f(z)$ é analítica fora dos cortes $L = \{(x, \pm 2) : x \leq 0\}$, mas, a condição $\sqrt{4} = -2$ exige uma mudança no ramo de $\operatorname{Log} z$. No domínio

$$\pi/2 < \operatorname{Arg}(z - 2i) < 5\pi/2 \quad \text{e} \quad -\pi/2 < \operatorname{Arg}(z + 2i) < 3\pi/2$$

temos que $f(z) < 0$, para todo z real, e as funções $\sqrt{z \pm 2i}$ são analíticas. O domínio, ilustrado na Figura 3.3, consiste dos pontos do plano \mathbb{C} , fora dos cortes $[(0, y) ; y > 2]$ e $[x = 0 ; y < -2]$.

EXEMPLO 3.3.18 Fixado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, a exponencial de base λ , indicada por λ^z , é definida pela relação:

$$\lambda^z = \exp(z \log \lambda).$$

O valor principal de λ^z é a função analítica $f(z) = \operatorname{VP}(\lambda^z) = \exp(z \operatorname{Log} \lambda)$, com derivada dada por:

$$f'(z) = \lambda^z \operatorname{Log} \lambda.$$

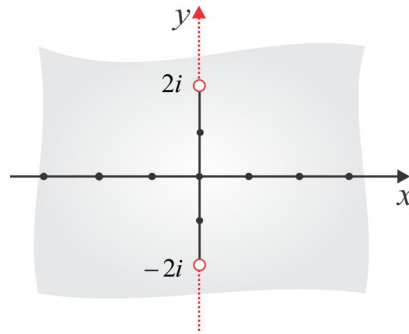


Figura 3.3: Domínio de $\sqrt{z^2 + 4}$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.3

1. Em cada caso, determine as soluções da equação

(a) $\log z = i\pi/2$ (b) $\log z = 1 + i\pi$.

2. Determine todos os valores e o valor principal de:

(a) $\log(-1)$ (b) $\log i$ (c) $\log 2$ (d) $\log(\sqrt{i})$.

3. Dado $z = re^{i\theta}$, $z \neq 1$, $-\pi < \theta < \pi$, mostre que:

$$\operatorname{Re}[\log(z-1)] = \frac{1}{2} \ln(1+r^2-2r\cos\theta).$$

Fora do semieixo $L = \{(x,0) : x \leq 1\}$, por que a função $w = \operatorname{Re}[\operatorname{Log}(z-1)]$ deve atender à equação de Laplace?

4. Determine as singularidades da função $w = \frac{\operatorname{Log}(z+4)}{z^2+i}$.

5. Determine o valor principal de:

(a) i^i (b) $(1-i)^{4i}$ (c) $\sqrt{2i}$ (d) $(1-i)^{1+i}$ (e) $(-1-i\sqrt{3})^{3\pi i}$.

6. Dados $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, e $\alpha \in \mathbb{R}$, mostre que $|z^\alpha| = |z|^\alpha$.

7. Mostre que a função $w = \operatorname{Log}(z-i)$ é analítica fora do eixo $E = \{z : \operatorname{Re}(z) \leq 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) = 1\}$.

8. Usando o ramo principal de $\log z$, obtenha uma expressão para $\sqrt{z-1}$.
9. Investigue a existência ou não do limite:

$$\lim_{z \rightarrow -1} \text{Log } z.$$

A função $\text{Log } z$ é contínua no ponto $z = -1$?

10. Calcule o limite das seguintes seqüências (z_n) :

(a) $z_n = \frac{\text{Log}(in)}{in}$ (b) $z_n = (in)^{1/in}$ (c) $z_n = \frac{\lambda^n}{n}$, $|\lambda| < 1$ (d) $z_n = n^{1/in}$.

11. **SOBRE O PARADOXO DE BERNOULLI** Identifique onde está o erro na sentença abaixo:

$$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow 2 \cdot \log(-z) = 2 \cdot \log z \Rightarrow \log(-z) = \log z.$$

12. **FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS** A função inversa de $z = \text{sen } w$, representada por $w = \text{arcsen } z$, é definida pela relação:

$$w = \text{arcsen } z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2i} (e^{iw} - e^{-iw}). \tag{3.25}$$

Considerando $\xi = e^{iw}$, a equação do lado direito de (3.25) nos dá:

$$\xi^2 - 2iz\xi - 1 = 0$$

e, efetuando o completamento do quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} (\xi - iz)^2 &= 1 - z^2 \Leftrightarrow \xi - iz = \pm (1 - z^2)^{1/2} \\ \Leftrightarrow \exp(iw) &= iz + \sqrt{1 - z^2}. \end{aligned}$$

Da última igualdade, resulta:

$$w = \text{arcsen } z = -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Agora, defina as funções $\text{arccos } z$ e $\text{arctg } z$ e estabeleça as seguintes relações:

(a) $\text{arccos } z = -i \log(z + \sqrt{z^2 - 1})$ (b) $\text{arctan } z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{i+z}{i-z} \right).$

13. Estabeleça as seguintes regras de derivação:

$$(a) \frac{d}{dz} (\arcsen z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad (b) \frac{d}{dz} (\arccos z) = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad (c) \frac{d}{dz} (\arctan z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

14. **FUNÇÕES HIPERBÓLICAS INVERSAS** Demonstre as relações:

$$(a) \operatorname{arccosh} z = \log(z + \sqrt{z^2 - 1}) \quad (b) \operatorname{arcsenh} z = \log(z + \sqrt{z^2 + 1}) \quad (c) \operatorname{arctgh} z = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right).$$

3.4 Transformações do Plano \mathbb{C}

Para começar, investiguemos, do ponto de vista geométrico, a ação de uma transformação linear $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, em três situações simples.

- (a) **TRANSLAÇÃO** Fixado um número complexo $\eta = a + ib$, a translação $w = z + \eta$ transforma o ponto (x, y) do plano z no ponto $(x + a, y + b)$ do plano w e uma dada região \mathcal{R} do plano z é transformada em uma região congruente \mathcal{R}^* do plano w . Em particular, w transforma retas em retas e círculos em círculos. Por exemplo, o círculo $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 < \theta \leq 2\pi$, é transformado no círculo $w = \eta + re^{i\theta}$ de centro η e raio r .
- (b) **ROTAÇÃO** Dado um número $\xi = c + id$, a transformação $w = \xi z$ consiste de uma rotação de um ângulo $\varphi = \operatorname{Arg}(\xi)$, seguida de uma contração, se $|\xi| < 1$, ou uma expansão, no caso em que $|\xi| > 1$. Essa transformação também transforma retas em retas e círculos em círculos. Note que se $z = re^{i\theta}$ e $\xi = \rho e^{i\varphi}$, então $w = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$.
- (c) **MOVIMENTO RÍGIDO** A Transformação Afim $T(z) = \xi z + \eta$, sendo ξ e η números complexos, é a composição da rotação $z \mapsto \xi z$ com a translação $w \mapsto w + \eta$. A imagem da circunferência $\gamma: z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 < \theta \leq 2\pi$, é a circunferência $\Gamma: w = \eta + \rho r e^{i(\theta+\varphi)}$, de centro η e raio $r\rho$.

EXEMPLO 3.4.1 A transformação $w = (1 + i)z + 2 - i$ é do tipo $w = \xi z + \eta$, onde $\xi = 1 + i$ e $\eta = 2 - i$. Ela consiste de uma rotação de $\pi/4$ seguida de uma translação por meio de $\eta = 2 - i$

EXEMPLO 3.4.2 Nos parece óbvio que a transformação $w = z/|z|^2$ é uma inversão no círculo $|z| = 1$, porque $|w| = 1/|z|$ e $\arg(w) = \arg(z)$. Ela transforma círculos em círculos (veja o Exercício 13).

Se a, b, c e d são números reais, a equação

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \tag{3.26}$$

pode representar um círculo, no caso em que $a \neq 0$, ou uma reta se $a = 0$. Com a mudança de variável $u + iv = \frac{1}{x + iy}$, ou $w = 1/z$, a equação (3.26) torna-se:

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0, \tag{3.27}$$

e observando as equações (3.26) e (3.27) concluímos que:

1. Um círculo γ no plano z que não passa pela origem ($d \neq 0$) é transformado pela função $w = 1/z$ em um círculo no plano w , que não passa pela origem.
2. Um círculo no plano z que passa na origem ($d = 0$) é transformado em uma reta no plano w que não passa pela origem.
3. Uma reta no plano z que não passa pela origem é transformada em um círculo no plano w que passa na origem.
4. uma reta no plano z pela origem é transformada em uma reta no plano w pela origem.

Como casos particulares, ressaltamos:

- (a) A imagem da reta vertical $\text{Re}(z) = x_0 \neq 0$ do plano z é o círculo $u^2 + v^2 - \frac{u}{x_0} = 0$ do plano w ;
- (b) A imagem da reta horizontal $\text{Im}(z) = y_0 \neq 0$ do plano z é o círculo $u^2 + v^2 + \frac{v}{y_0} = 0$ do plano w ;
- (c) O semiplano $\text{Re}(z) \geq x_0 > 0$ é transformado no disco $\frac{u}{u^2 + v^2} \geq x_0$, isto é:

$$\left(u - \frac{1}{2x_0}\right)^2 + v^2 \leq \frac{1}{4x_0^2}.$$

A função $w = 1/z$ é útil no estudo das propriedades de uma função $f(z)$, onde se envolve o *ponto no infinito*. Quando $\lim_{z \rightarrow 0} f(1/z) = w_0$, diremos que $f(\infty) = w_0$ e, nesse sentido, teremos:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(1/z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0.$$

Por exemplo, para tornar a função $f(z) = \frac{4z^2}{(1-z)^2}$ contínua no infinito, colocamos $f(\infty) = 4$. De fato, basta observarmos que:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(1/z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{4}{(z-1)^2} = 4.$$

Por fim, observamos que $\lim_{z \rightarrow 1} 1/f(z) = 0$ e ao definirmos $f(1) = \infty$, tornamos f contínua em $z = 1$.

EXEMPLO 3.4.3 (Transformação de Möebius) A transformação $w = T(z)$ definida por:

$$w = T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\xi z + \eta}. \quad (3.28)$$

é a Transformação de Möebius e admitindo $\xi \neq 0$ e $\alpha\eta - \beta\xi \neq 0$, ela assume a forma:

$$w = \frac{\alpha}{\xi} + \left(\frac{\alpha\eta - \beta\xi}{\xi}\right) \frac{1}{\xi z + \eta} \quad (3.29)$$

ou ainda:

$$Azw + Bz + Cw + D = 0. \quad (3.30)$$

A condição $\alpha\eta - \beta\xi \neq 0$ faz com que a transformação (3.28) não seja constante e resolvendo (3.29) encontramos:

$$z = \frac{-\eta w + \beta}{\xi w - \alpha}$$

e cada ponto do plano w é imagem de um único ponto do plano z , exceto quando $w = \alpha/\xi$. Para obtermos uma bijeção $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ basta definirmos $T(-\eta/\xi) = \infty$ e $T(\infty) = \alpha/\xi$, $\xi \neq 0$, e $T(\infty) = \infty$, no caso em que $\xi = 0$. Se $w = Tz$ é a Transformação de Möbius e definirmos $T(\infty) = \infty$, se $\xi = 0$, $T(-\eta/\xi) = \infty$ e, caso $\xi \neq 0$, colocarmos $T(\infty) = \alpha/\xi$, obteremos uma bijeção $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Finalmente, olhando a transformação T sob a forma (3.29), deduzimos que ela transforma círculos em círculos (retas são consideradas círculos de raio ∞).

EXEMPLO 3.4.4 Dados os números complexos z_k e w_k , $k = 1, 2, 3$, a transformação de Möbius

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} = \quad (3.31)$$

leva z_k em w_k , $k = 1, 2, 3$. Primeiro observamos que (3.31) pode ser escrita sob a forma:

$$(z - z_3)(z_2 - z_1)(w - w_1)(w_2 - w_3) = (z - z_1)(z_2 - z_3)(w - w_3)(w_2 - w_1) \quad (3.32)$$

e, expandindo os produtos, vemos que (3.32) é do tipo (3.30), isto é, (3.31) é, de fato, uma transformação de Möbius. Segue diretamente de (3.32) que $w = w_j$, quando $z = z_j$, para $j = 1$ e $j = 3$. No caso em que $z = z_2$, obtemos de (3.31):

$$(w - w_1)(w_2 - w_3) = (w - w_3)(w_2 - w_1),$$

que possui solução única $w = w_2$. Em resumo, (3.31) transforma o ponto z_k no ponto w_k , $k = 1, 2, 3$.

EXEMPLO 3.4.5 Se, por exemplo, $w_2 = \infty$, substituímos em (3.31) w_2 por $1/w_2$ e obtemos, com $w_2 = 0$, a seguinte expressão:

$$\frac{(w - w_1)}{(w - w_3)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \tag{3.33}$$

que é a Transformação de Möbius que leva z_1, z_2 e z_3 em w_1, ∞ e w_3 , respectivamente.

1. Mostre que a função $w = iz + i$ transforma o semiplano $[\operatorname{Re} z > 0]$ no semiplano $[\operatorname{Im} w > 1]$.
2. Determine a imagem do semiplano $[\operatorname{Im}(z) > 0]$ pela transformação $w = (1 + i)z$. Primeiro usando coordenadas polares e, depois, coordenadas cartesianas.
3. Determine a imagem da faixa $x > 0, 0 < y < 2$ pela transformação $w = iz + 1$.
4. Em cada caso, determine a imagem do conjunto D indicado, pela transformação $w = z^2$.
 - (a) $D : r \geq 0; 0 \leq \theta \leq \pi$ (b) $D : r \leq r_0; 0 \leq \theta \leq \pi$ (c) $D : xy = c; x^2 - y^2 = c$
 - (d) $D : y = c$ (e) $D : x > 0; y > 0; xy < 1$ (f) $D : |x| + |y| \leq 1$
5. Descreva a imagem do setor circular $0 < \theta < \pi/4; 0 \leq r < 1$, pela transformação:
 - (a) $w = z^2$ (b) $w = z^3$ (c) $w = z^4$.
6. Descreva a região do plano \mathbb{C} (a pré-imagem) que é transformada pela aplicação $w = z^2$ no retângulo $\mathcal{R} : 1 \leq u \leq 2; 1 \leq v \leq 2$.
7. Descreva, geometricamente, a aplicação $w = (z - 1)^{-1}$.

8. Repita o Exercício (4), com a transformação $w = 1/z$ e o conjunto D descrito por:

(a) $D : 0 < y < 1/2c$ (b) $D : y > c > 0$ (c) $D : x > 1; y > 0$ (d) $D : x^2 - y^2 = 1$.

9. Determine a imagem da faixa $x \geq 0; 0 \leq y \leq 1$ pela transformação $w = 1/z$.

10. Suponha que o círculo $z = z_0 + re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, seja transformado pela aplicação $w = 1/z$ em um círculo de centro w_0 . Mostre que w_0 não pode ser imagem de z_0 .

11. Um ponto z_0 é dito *ponto fixo* da transformação $w = T(z)$ se $T(z_0) = z_0$. Determine os *pontos fixos* da transformação $w = \frac{z-1}{z+1}$.

12. Qual a imagem da região $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 2]$ pela transformação $T(z) = (1+i)z + 2-i$?

13. A transformação $w = 1/z$ estabelece uma correspondência entre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e \mathbb{C} e pode ser escrita na forma $w = \bar{\xi}$, sendo $\xi = z/|z|^2$.

(a) Mostre que a função w transforma um círculo γ do plano z , que não passa pela origem em um círculo Γ no plano w , que não passa pela origem.

(b) Determine as imagens das retas $x = 1$ e $y = 2$ pela transformação w .

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.1

1. Considerando $z = x + iy$, encontramos:

(a) $\exp(2z) = e^{2x} \cos(2y) + ie^{2x} \sen(2y)$.

(b) $\exp(z^2) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy) + ie^{x^2-y^2} \sen(2xy)$.

(c) $\exp(i\bar{z}) = e^y \cos x + ie^y \sen x$.

2. Para resolver a equação $e^z = \rho e^{i\varphi}$ designamos $z = x + iy$ para obter $e^x = \rho$ e $y = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(a) $\exp(2z) = -1 \Leftrightarrow e^{2x} = 0$ e $2y = \pi + 2k\pi$. As raízes são $z = (k\pi + \pi/2)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\exp(z) = i \Leftrightarrow e^x = 0$ e $y = \pi/2 + 2k\pi$. As raízes são $z = (2k\pi + \pi/2)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

- (c) $z = \ln 2 + (2k + 1)\pi i$.
- (d) $z = \pm\sqrt{k\pi} \pm i\sqrt{k\pi}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (e) $z = \frac{1}{2} + k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. Considerando $z = x + iy$, temos:

- (a) $\operatorname{Re}(e^z) = 0 \Leftrightarrow e^x \cos y = 0 \Leftrightarrow y = k\pi + \pi/2$ de modo que as soluções da equação são $z = x + (k\pi + \pi/2)i$, $k \in \mathbb{Z}$.
- (b) Se $\lambda = e^z$, a equação $e^z + 6e^{-z} = 5$ é equivalente a:

$$(\lambda - 5/2)^2 = 1/4,$$

isto é, $\lambda = 3$ ou $\lambda = 2$. Logo, $z = \ln 3 + 2k\pi i$ ou $z = \ln 2 + 2n\pi i$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

- 4. A igualdade $\exp(\overline{iz}) = \overline{\exp(iz)}$ é válida seja qual for o número complexo z .
- 5. Se $z = x + iy$, então $|\exp(-2z)| < 1 \Leftrightarrow e^{-2x} < 1 \Leftrightarrow -2x < 0$, isto é, $x > 0 = \operatorname{Re}(z) > 0$.
- 6. O conjunto aberto S é o semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.
- 7. Considerando $z = x + iy$, temos que $|\exp(2z + i)| = \exp(2x)$ e $|\exp(iz^2)| = \exp(-2xy)$ e, usando a desigualdade triangular, resulta:

$$\begin{aligned} |\exp(2z + i) + \exp(iz^2)| &\leq |\exp(2z + i)| + |\exp(iz^2)| \\ &= \exp(2x) + \exp(-2xy). \end{aligned}$$

- 8. Para $z = x + iy$, temos que $\exp(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^x \sin y = 0$ e daí resulta $y = k\pi$.
- 9. A função $f(z)$ não é analítica em ponto algum, enquanto $g(z)$ é analítica nos pontos $z \neq 2k\pi i$.
- 10. Temos uma consequência da Regra da Cadeia. A função $F(z)$ é a composição das funções analíticas $f(z)$ e $w \mapsto \exp(w)$. As funções $z \mapsto z^2$ e $z \mapsto iz$ são inteiras e o mesmo ocorre com as composições $z \mapsto \exp(z^2)$ e $z \mapsto \exp(iz)$.
- 11. Nos pontos $z \neq 0$ a função $f(z) = \exp(1/z)$ é analítica e suas componentes $\operatorname{Re}[f(z)]$ e $\operatorname{Im}[f(z)]$ são, portanto, harmônicas conjugadas.

12. As funções $U(x, y)$ e $V(x, y)$ são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária da função analítica $F(z) = \exp(f(z))$ sendo, portanto, harmônicas conjugadas.
13. A única singularidade é o ponto $z = -1$.
14. Da desigualdade (1.12), com $w = -z_0$, vemos que $|f(z)| \leq 1$, sempre que $|z| \leq 1$. No caso em que $z_0 = 0$, temos $f(z) = -e^{i\phi} \cdot z$, que corresponde a uma rotação do ponto $-z$ de um ângulo ϕ .

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.2

1. Em cada caso, consideramos $z = x + iy$ e $\lambda = e^{iz}$.

(a) Temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z = 2 &\Leftrightarrow \lambda^2 - 4i\lambda - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda - 2i)^2 = \pm i\sqrt{3} \Leftrightarrow \lambda = (2 \pm \sqrt{3})i. \end{aligned}$$

Retornando à variável z , encontramos:

$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i \Leftrightarrow e^{-y}e^{ix} = (2 \pm \sqrt{3})e^{i\pi/2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\ln(2 \pm \sqrt{3}) \\ x = 2k\pi + \pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Assim, as soluções da equação $\operatorname{sen} z = 2$ são $z = 2k\pi + \pi/2 - i \ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Se fizermos $\lambda = e^{iz}$, a equação $\cos z = 2$ torna-se equivalente a $(\lambda - 2)^2 = 3$ e, assim:

$$\begin{aligned} \cos z = 2 &\Leftrightarrow e^{iz} = \operatorname{Log}(2 \pm \sqrt{3}) = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2k\pi i \Leftrightarrow z = 2n\pi - i \ln(2 \pm \sqrt{3}), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2. Do Lema (3.2.2) resulta que

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(\cos z) = \cos x \cosh y \quad \text{e} \quad v(x, y) = \operatorname{Im}(\operatorname{senh} z) = \cos x \operatorname{senh} y,$$

as quais são funções de classe C^2 e temos:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (-\cos x \cosh y) + (\cos x \cosh y) = 0, \quad \text{em } \mathbb{C},$$

e, de forma similar, mostra-se que $\Delta v = 0$, em \mathbb{C} . Recorde-se que as componentes (parte real e parte imaginária) de uma função inteira são harmônicas conjugadas!

3. Primeiro, veja os conceitos das funções trigonométricas e hiperbólicas.

(a) Temos:

$$\operatorname{sen}(iz) = \frac{1}{2i} [e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}] = \frac{1}{2i} [e^{-z} - e^z] = \frac{i}{2} [e^z - e^{-z}] = i \operatorname{senh} z.$$

(b) Similar ao anterior.

(c) Partindo de $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$, temos:

$$1 + \operatorname{cotg}^2 z = 1 + \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \operatorname{cosec}^2 z.$$

(d) Do Corolário 3.2.3, temos:

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 - |\operatorname{sen} z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y - (\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y) \\ &= \cos^2 x - \operatorname{senh}^2 y = \cos(2x). \end{aligned}$$

(e) Temos:

$$\begin{aligned} \cos z \cos w &= \frac{1}{4} [e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z-w)} + e^{i(w-z)}] \\ \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w &= \frac{1}{4} [e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{i(w-z)}] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w = \frac{1}{2} [e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}] = \cos(z+w).$$

(f) Proceda como no caso precedente.

(g) De acordo com a definição, temos:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}(z+w) \operatorname{sen}(z-w) &= 2 \cdot \frac{1}{2i} (e^{iz+iw} - e^{-iz-iw}) \cdot \frac{1}{2i} (e^{iz-iw} - e^{-iz+iw}) \\ &= -\frac{1}{2} (e^{2iz} + e^{-2iz} - e^{2iw} - e^{-2iw}) = -\cos(2z) + \cos(2w). \end{aligned}$$

(h) Proceda como no caso precedente.

4. Temos que

$$\begin{aligned} \cos z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(\cos z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x (e^{-y} - e^y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = k\pi \quad \text{ou} \quad y = 0. \end{aligned}$$

Assim, $\cos z$ é real se, e só se, z é real ou $z = k\pi + iy$, $y \in \mathbb{R}$.

5. A função $f(z)$ é analítica em qualquer ponto z , tal que $(e^z - 1) \cos z \neq 0$, isto é, nos pontos $z \neq 2k\pi i$ ou $z \neq k\pi + \pi/2$.

6. As desigualdades decorrem do Corolário 3.2.3

7. A igualdade $\cos(i\bar{z}) = \overline{\cos(iz)}$ ocorre para qualquer z . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(i\bar{z}) &= \overline{\operatorname{sen}(iz)} \Leftrightarrow \frac{1}{2i} [\exp(-\bar{z}) - \exp(\bar{z})] = -\frac{1}{2i} [\overline{\exp(-z)} - \overline{\exp(z)}] \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2i} [\exp(-\bar{z}) - \exp(\bar{z})] = -\frac{1}{2i} [\exp(-\bar{z}) - \exp(\bar{z})] \\ &\Leftrightarrow \exp(-\bar{z}) - \exp(\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

8. Temos que

$$\operatorname{sen} z = \cosh 4 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y = \cosh 4$$

e, portanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x \cosh y = \cosh 4 \quad (\text{I}) \\ \cos x \operatorname{senh} y = 0. \quad (\text{II}) \end{array} \right.$$

De (II) resulta que $y = 0$ ou $x = k\pi + \pi/2$, com $k \in \mathbb{Z}$, e a opção $y = 0$ nos conduz ao absurdo $\operatorname{sen} x = \cosh 4$, já que $\cosh 4 > 1$. Assim, $x = k\pi + \pi/2$ e usando a equação (I), considerando que $(-1)^k = \pm 1$ e $\cosh 4 > 0$, encontramos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(k\pi + \pi/2) \cosh y &= \cosh 4 \Leftrightarrow (-1)^k \cosh y = \cosh 4 \\ &\Leftrightarrow \cosh y = \cosh 4 \\ &\Leftrightarrow y = \pm 4. \end{aligned}$$

Assim, as raízes são $z = 2n\pi + \pi/2 \pm 4i$, $n \in \mathbb{Z}$.

9. Consequência direta da definição. Como ilustração, vejamos a parte (e).

(e) Temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(z + \pi i) &= \frac{1}{2} (e^{z+\pi i} - e^{-z-\pi i}) = \frac{1}{2} (e^z \cdot e^{\pi i} - e^{-z} \cdot e^{-\pi i}) \\ &= \frac{1}{2} (-e^z + e^{-z}) = -\operatorname{senh} z. \end{aligned}$$

10. Em cada caso, vamos considerar $\lambda = e^z$.

(a) A equação $2 \cosh z = 1$ é equivalente a $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, com raízes $\lambda = e^{\pm i\pi/3}$. Logo:

$$e^z = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z = i(2k\pi \pm \pi/3), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) A equação $\sinh z = i$ é equivalente a $\lambda^2 - 2i\lambda - 1 = 0$, com raiz $\lambda = i = e^{i\pi/2}$, de onde resulta $z = i(2k\pi + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Neste caso, temos:

$$\cosh z = -2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(2 \pm \sqrt{2}/2\right) \cdot e^{i\pi}$$

e as raízes são $z = \ln(2 \pm \sqrt{2}/2) + (2k + 1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

11. Se $z = x$ é um número real, é sabido que $\cos^2 x + \sen^2 x = 1$. Reciprocamente, se $z = x + iy$ é tal que $|\cos z|^2 + |\sen z|^2 = 1$, segue do Corolário 3.2.3 que $\sinh^2 y = 0$ e, portanto, $y = 0$ e temos que z é real.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.3

1. Recordemos que se $z = re^{i\theta}$ é não nulo, então $\log z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, e temos a seguinte propriedade: $\exp(\log z) = z$.

(a) Temos:

$$\log z = i\pi/2 \Rightarrow z = \exp(i\pi/2) \Rightarrow z = i.$$

(b) $\log z = 1 + i\pi \Rightarrow z = \exp(1 + i\pi) \Rightarrow z = -e$.

2. Dado $z = re^{i\theta} \neq 0$, o valor principal de $\log z$ é $\text{Log } z = \ln r + i\theta$.

(a) $\log(-1) = \log(e^{i\pi}) = (2k + 1)\pi i$ e $\text{Log}(-1) = \pi i$.

(b) $\log i = \log(e^{i\pi/2}) = (2k + 1/2)\pi i$ e $\text{Log } i = i\pi/2$.

(c) $\log 2 = \log(2e^{i \cdot 0}) = \ln 2 + 2k\pi i$ e $\text{Log } 2 = \ln 2$.

(d) $\log(i^{1/2}) = \log[\exp(\frac{1}{2} \log i)] = (k + \frac{1}{4})\pi i$ e $\text{Log}(\sqrt{i}) = i\pi/4$.

3. Se $z = x + iy$, ao calcular $\log(z - 1)$, encontramos:

$$\log(z - 1) = \ln|z - 1| + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi = \text{Arg}(z - 1),$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\log(z - 1)) &= \ln|z - 1| = \ln\left(\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + 1 - 2x) = \frac{1}{2} \ln(1 + r^2 - 2r \cos \theta). \end{aligned}$$

A função $w = \text{Re}[\text{Log}(z - 1)]$, $z \neq 1$, é a parte real da função analítica $z \mapsto \text{Log}(z - 1)$ e, portanto, é uma função harmônica.

4. A função $\text{Log}(z + 4)$ é analítica fora da semireta $S : \text{Re}(z) \leq -4, \text{Im}(z) = 0$, enquanto $z^2 + i$ se anula nos pontos $z \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$. Assim, a função $w = \frac{\text{Log}(z + 4)}{z^2 + i}$ é analítica na região:

$$R = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) \text{ e } z \notin S \right\}.$$

5. O valor principal de z^λ é dado por:

$$z^\lambda = \exp(\lambda \text{Log } z), \quad z \neq 0.$$

(a) $(i)^i = \exp(-\pi/2)$.

(b) $(1 - i)^{4i} = \exp(\pi + i \ln 4)$.

(c) $(2i)^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2} \text{Log}(2i)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}(\ln 2 + i\pi/4)\right] = 1 + i$.

(d) $(1 - i)^{1+i} = 2 \exp(\pi/4) \cdot \exp[i(\ln 2 - \pi/4)]$.

(e) $(-1 - i\sqrt{3})^{3\pi i} = \exp[2\pi^2 + (3\pi \ln 2)i]$.

6. Se $z = re^{i\theta}$, e considerando que α é real, temos:

$$\begin{aligned} |z^\alpha| &= |\exp(\alpha \text{Log } z)| = |\exp(\alpha \ln|z| + i\theta)| = \left| e^{\alpha \ln|z|} \cdot e^{i\theta} \right| \\ &= e^{\alpha \ln|z|} = e^{\ln|z|^\alpha} = |z|^\alpha. \end{aligned}$$

7. Recorde-se que $\text{Log } z$ é analítica fora do semieixo $L = \{(x, 0) : x \leq 0\}$.

8. Considerando $z = x + iy$, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{z-1} &= (z-1)^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\text{Log}(z-1)\right] \\ &= \exp\left[\ln\sqrt{(x-1)^2+y^2} + \frac{i}{2}\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right)\right] \\ &= \sqrt{(x-1)^2+y^2} \cdot \exp\left[\frac{i}{2}\arctan\left(\frac{y}{x-1}\right)\right], \quad x \neq 1. \end{aligned}$$

9. A função $f(z) = \text{Log } z$ não é contínua em ponto algum do semieixo $L = \{(x, 0) : x \leq 0\}$.

10. (a) 0 (b) 1 (c) 0 (d) 1.

11. Se $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$, então $z^2 = r^2e^{2i\theta}$, de modo que:

$$\begin{aligned} \log(z^2) &= 2\ln r + i(2\theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2 \cdot \log z &= 2 \cdot [\ln r + i(\theta + 2n\pi)] = 2\ln r + i(2\theta + 4n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Os conjuntos $\{2\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e $\{2\theta + 4n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ são distintos! O erro ocorre ao usar a propriedade $\log(z^2) = 2 \cdot \log z$, a qual não é válida em geral no plna \mathbb{C} .

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.4

1. Se $z = x + iy$, então $w = iz + i = -y + (x + 1)i$ e, portanto:

$$\text{Re}(z) = x > 0 \Leftrightarrow \text{Im}(w) = x + 1 > 1.$$

2. Em coordenadas polares, o semiplano $[\text{Im}(z) > 0]$ é descrito por $r \geq 0$, $0 < \theta < \pi$. Assim:

$$w = (1 + i)z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}re^{i\theta} = r\sqrt{2}e^{i(\theta+\pi/4)}$$

e, portanto, $\pi/4 < \text{Arg}(w) < 5\pi/4$. A imagem de $[\text{Im}(z) > 0]$ é o semiplano $[\text{Im}(w) > \text{Re}(w)]$.

Em coordenadas cartesianas, temos:

$$\text{Im}(w) > \text{Re}(w) \Leftrightarrow v > u \Leftrightarrow x + y > x - y \Leftrightarrow y > 0 \Leftrightarrow z \in [\text{Im}(z) > 0].$$

3. A imagem é a faixa $\{w = u + iv : -1 < u < 1 \text{ e } v > 0\}$.

4. Integração Complexa



4.1 Função Complexa de uma Variável Real

Seja $F(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, uma função complexa de uma variável real t , e suponhamos que as funções reais $x(t)$ e $y(t)$ sejam contínuas no intervalo $[a, b]$, exceto, possivelmente, em uma quantidade finita de pontos de $[a, b]$, onde elas têm limites finitos. Uma tal função $F(t)$ é conhecida pela denominação de *Contínua por Partes* em $[a, b]$ e a integral de $F(t)$ no intervalo $[a, b]$, indicada por

$\int_a^b F(t) dt$, é o número complexo definido por:

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} [F(t)] dt + i \int_a^b \operatorname{Im} [F(t)] dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt. \quad (4.11)$$

EXEMPLO 4.1.1 Se $F(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi/2$, temos, de acordo com a definição, que:

$$\int_0^{\pi/2} F(t) dt = \int_0^{\pi/2} e^{it} dt = \int_0^{\pi/2} \cos t dt + i \int_0^{\pi/2} \sin t dt = 1 + i.$$

PROPOSIÇÃO 4.1.2 (Propriedades Básicas) Se $F(t)$ e $G(t)$ são funções contínuas por partes em $[a, b]$ e λ é qualquer constante complexa, então:

(a) **LINEARIDADE:** $\int_a^b [\lambda \cdot F(t) + G(t)] dt = \lambda \cdot \int_a^b F(t) dt + \int_a^b G(t) dt.$

(b) **DESIGUALDADE ELEMENTAR:** $\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt.$

(c) **TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO:** Se $\Phi(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ é uma primitiva de $F(t)$ em $[a, b]$, isto é, as componentes $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são deriváveis em $[a, b]$ e

$$\Phi'(t) = \alpha'(t) + i\beta'(t) = F(t), \quad a \leq t \leq b,$$

então $\int_a^b F(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a)$. Em particular, se $F(t)$ é de classe C^1 em $[a, b]$, temos:

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a). \quad (4.12)$$

DEMONSTRAÇÃO

(a) Considerando $F(t) = x(t) + iy(t)$, $G(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ e $\lambda = a + ib$, um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned} \int_a^b [\lambda \cdot F(t) + G(t)] dt &= \int_a^b [\lambda \cdot x(t) + \alpha(t)] dt + i \int_a^b [\lambda \cdot y(t) + \beta(t)] dt \\ &= \lambda \cdot \left(\int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt \right) + \int_a^b \alpha(t) dt + i \int_a^b \beta(t) dt \\ &= \lambda \cdot \int_a^b F(t) dt + \int_a^b G(t) dt. \end{aligned}$$

(b) Representando $\int_a^b F(t) dt$ sob a forma polar $re^{i\theta}$ e notando que $\int_a^b e^{-i\theta} \cdot F(t) dt = r$ é um número real, segue da propriedade linear (a) que:

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta} \cdot F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} \cdot F(t)] dt.$$

Logo,

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| = r = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta} \cdot F(t)] dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta} \cdot F(t)| dt = \int_a^b |F(t)| dt.$$

(c) Consequência direta do Teorema Fundamental do Cálculo de variável real. De fato:

$$\begin{aligned} \int_a^b F(t) dt &= \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt = \left[\alpha(t) \right]_{t=a}^{t=b} + i \cdot \left[\beta(t) \right]_{t=a}^{t=b} \\ &= \alpha(b) - \alpha(a) + i \cdot [\beta(b) - \beta(a)] = \alpha(b) + i \cdot \beta(b) - [\alpha(a) + i\beta(a)] \\ &= \Phi(b) - \Phi(a). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \int_0^{\pi/4} e^{it} dt \quad (b) \int_0^{\infty} e^{-zt} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0 \quad (c) \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt, \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Calcule as integrais trigonométricas:

$$(a) \int_0^{\sqrt{\pi}} t \exp(it^2) dt \quad (b) \int_0^{\pi} (e^{it} + i \operatorname{sen} t) dt \quad (c) \int_0^{\pi} \cos(it) dt.$$

4.2 Função Complexa de uma Variável Complexa

Nesta seção apresentaremos o cálculo integral para funções $w = f(z)$, de uma variável complexa, definida e contínua em uma região do plano \mathbb{C} contendo um arco $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$. Inicialmente faremos um breve comentário sobre contornos regulares γ , no plano \mathbb{C} , para em seguida tratarmos das integrais de $f(z)$ sobre o contorno γ .

4.2.1 Contornos e Integrais

Por *arco* γ no plano \mathbb{C} entendemos a imagem de uma função contínua $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, isto é, o conjunto dos pontos $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções reais contínuas no intervalo $[a, b]$. A orientação positiva do arco γ é aquela correspondente ao sentido crescente de valores de t . O ponto $A = z(a)$ e $B = z(b)$ denominam-se, respectivamente, *Ponto Inicial* e *Ponto Final* do arco γ . Por simplicidade, faremos referência ao arco γ como sendo a função $t \mapsto z(t)$. Veja a ilustração gráfica na Figura 4.1.

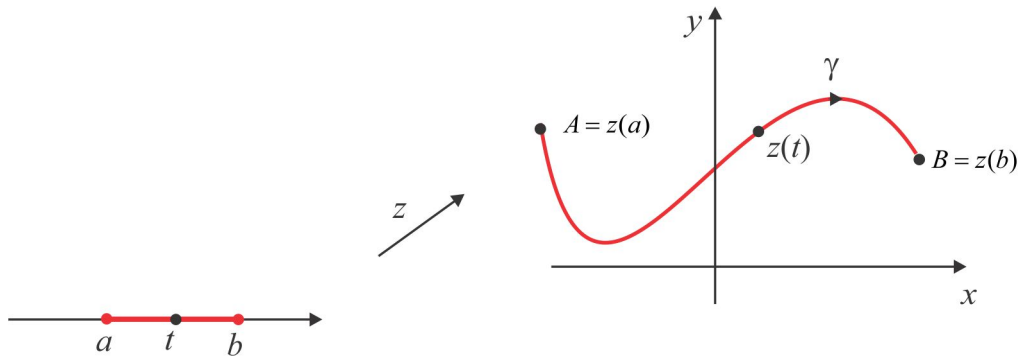


Figura 4.1:

Em um arco $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, um ponto $P = z(t)$, proveniente de dois valores distintos de t , internos ao intervalo $[a, b]$, denomina-se **Ponto Múltiplo**; os demais pontos são **Pontos Simples**. Um arco $\gamma = z(t)$ constituído apenas de pontos simples denomina-se **Arco Simples**. Neste caso, temos:

$$t \neq s \Rightarrow z(t) \neq z(s), \quad a < t, s < b.$$

No arco simples pode ocorrer que $\gamma(a) = \gamma(b)$ e, neste caso, o arco simples denomina-se *fechado*; um arco simples fechado também é denominado **arco de Jordan**. O comprimento do arco γ é o número real $L(\gamma)$, dado por:

$$L(\gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt \quad (4.13)$$

e, com a notação $dz = dx + idy$, vemos que o comprimento do arco γ se expressa sob a forma

$$L(\gamma) = \int_a^b |dz|. \quad (4.14)$$

DEFINIÇÃO 4.2.1 Um arco γ de equação $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, é denominado **Arco Regular** ou **Suave** quando as funções $x(t)$ e $y(t)$ forem de classe C^1 em $[a, b]$ e a velocidade $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ é não nula em cada t do intervalo $[a, b]$.

Em um arco regular γ , se $x'(t) = 0$, então o vetor $z'(t) = iy'(t)$ é vertical e no caso em que $x'(t) \neq 0$, então $y'(t)/x'(t)$ é a declividade da reta tangente ao arco γ , no ponto $z(t)$.

LEMA 4.2.2 Se a função $f(z)$ é contínua sobre o arco regular γ e $|f(z)| \leq M$, em γ , então:

$$\left| \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt \right| \leq M \cdot L(\gamma). \quad (4.15)$$

PROVA Segue da propriedade básica (c) da Seção 4.1 que:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt \right| &\leq \int_a^b |f(z(t)) \cdot z'(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b |z'(t)| dt = M \cdot L(\gamma). \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.2.3 A circunferência $|z| = 1$, de centro na origem e raio 1, é descrita na forma paramétrica por $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Trata-se de um arco simples, fechado e regular.

EXEMPLO 4.2.4 O arco γ definido por

$$z(t) = \begin{cases} t + it, & 0 \leq t \leq 1 \\ t + i, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

é simples e consiste do segmento de reta de $z = 0$ até $z = 1 + i$, seguido do segmento de $z = 1 + i$ até $z = 2 + i$, como ilustra a Figura 4.2.

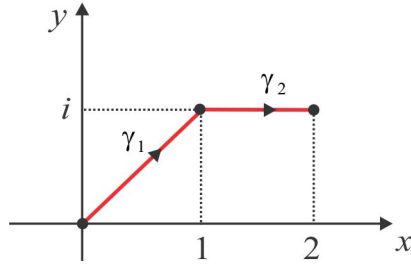


Figura 4.2: Gráfico para o Exemplo 4.2.4

EXEMPLO 4.2.5 (Arcos Justapostos) Os arcos $\gamma_1 : z = z(t), a \leq t \leq b$ e $\gamma_2 : w = w(s), b \leq s \leq c$ são justapostos, como ilustra Figura 4.3, e o contorno $\gamma_1 + \gamma_2$, denominado justaposição dos arcos γ_1 e γ_2 , é definido por $\xi = \xi(t)$, sendo:

$$\xi(t) = \begin{cases} z(t), & \text{se } a \leq t \leq b \\ w(t), & \text{se } b \leq t \leq c. \end{cases}$$

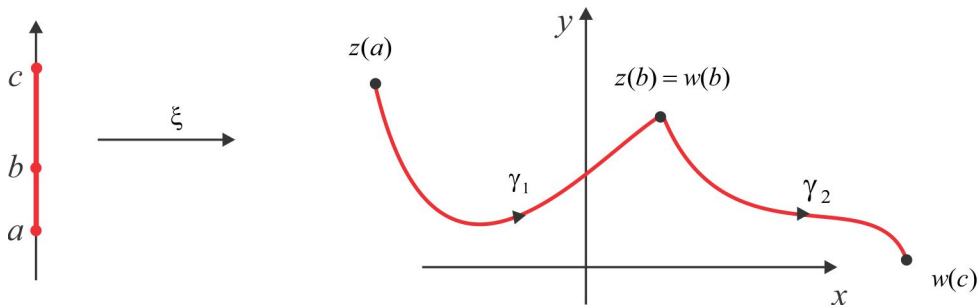


Figura 4.3: Arcos Justapostos

DEFINIÇÃO 4.2.6 Um número finito de arcos regulares e justapostos recebe o nome de **Contorno**.

EXEMPLO 4.2.7 O arco γ definido no Exemplo 4.2.4 é um contorno simples. Ele é constituído pelos arcos regulares γ_1 e γ_2 .

EXEMPLO 4.2.8 A fronteira da região $D = \{z = x + iy : |x| + |y| \leq 1\}$ é um contorno simples e fechado, o qual coincide com o quadrado de vértices $z = \pm 1$ e $z = \pm i$.

4.2.2 A Integral

A integral de uma função contínua $w = f(z)$ sobre um contorno $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, é, por definição, o número complexo $\int_{\gamma} f(z) dz$, dado por:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt. \quad (4.16)$$

De forma mais geral, podemos considerar funções complexas $f(z) = u + iv$, com componentes $u(x(t), y(t))$ e $v(x(t), y(t))$ contínuas por partes em $[a, b]$, isto é, sobre a curva γ , e a integral (4.16) está bem definida:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] \cdot (x'(t) + iy'(t)) dt.$$

EXEMPLO 4.2.9 Para ilustrar o conceito, vamos calcular a integral da função $f(z) = z^2$, ao longo do segmento γ que liga a origem ao ponto $1 + 2i$.

SOLUÇÃO O segmento γ é descrito por $z(t) = t + 2it$, $0 \leq t \leq 1$, de modo que $dz = (1 + 2i) dt$ e temos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z^2 dz &= \int_0^1 (t + 2it)^2 (1 + 2i) dt = (1 + 2i) \int_0^1 (-3 + 4i) t^2 dt \\ &= (1 + 2i)(-3 + 4i) \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} (1 + 2i)(-3 + 4i) = -\frac{1}{3} (11 + 2i). \end{aligned}$$

EXEMPLO 4.2.10 Se γ é o arco $|z| = 1$, orientado de $z = -1$ até $z = 1$, temos:

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_{\pi}^0 e^{-it} \cdot ie^{it} dt = -\pi i.$$

LEMA 4.2.11 (Teorema Fundamental do Cálculo) Se, sobre o contorno $\gamma : z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, a função $F(z)$ é uma primitiva analítica⁶ de $f(z)$, então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a)). \quad (4.17)$$

PROVA Usando o conceito de integral e a Regra da Cadeia, encontramos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [F(z(t))] dt = F(z(b)) - F(z(a)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

⁶ $F(z)$ é uma "primitiva analítica" de $f(z)$ se $F(z)$ é analítica e $f'(z) = F(z)$.

EXEMPLO 4.2.12 Se γ é um arco regular ligando o ponto $z_1 = 1$ ao ponto $z_2 = i$, então $F(z) = z^3/3$ é uma primitiva de z^2 e do Lema 4.2.11

$$\int_{\gamma} z^2 dz = \left. \frac{z^3}{3} \right|_1^i = \frac{1}{3} (i^3 - 1) = -\frac{1}{3} (1 + i).$$

EXEMPLO 4.2.13 Se γ é o segmento de reta de $z = 1$ até $z = 1 + i$, usamos $\text{Log } z$ como primitiva de $1/z$ e obtemos:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \text{Log}(1 + i) - \text{Log } 1 = \text{Log}(\sqrt{2}e^{i\pi/4}) = \ln \sqrt{2} + i\pi/4.$$

PROPOSIÇÃO 4.2.14 (Propriedades Básicas) Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções complexas, contínuas nos pontos de um contorno $\gamma : z = z(t)$, $a \leq t \leq b$.

(P1) Usando a Integral de Linha: Se $f(z) = u + iv$, então:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy. \tag{4.18}$$

(P2) Invertendo a orientação: Se $-\gamma$ representa o contorno γ , com a orientação invertida, então:

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz. \tag{4.19}$$

(P3) Linearidade: Se λ é qualquer número complexo, então:

$$\int_{\gamma} [f(z) + \lambda \cdot g(z)] dz = \int_{\gamma} f(z) dz + \lambda \cdot \int_{\gamma} g(z) dz. \tag{4.20}$$

(P4) Justaposição: Se $\gamma_1 : z = z(t)$, $a \leq t \leq b$ e $\gamma_2 : w = w(s)$, $b \leq s \leq c$ são dois arcos justapostos, então:

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz. \tag{4.21}$$

DEMONSTRAÇÃO

(P1) Por simplicidade, omitiremos a variável t na demonstração. Considerando $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b (u + iv)(x' + iy') dt \\ &= \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt \\ &= \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy. \end{aligned}$$

(P2) O contorno $-\gamma$ pode ser parametrizado da seguinte forma:

$$-\gamma : w(s) = x(-s) + iy(-s), \quad -b \leq s \leq -a,$$

e, considerando $t = -s$, resulta:

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} f(z) dz &= \int_{-b}^{-a} f(w(s)) w'(s) ds = \int_{-b}^{-a} f(z(-s)) [-z'(-s)] ds \\ &= - \int_b^a f(z(t)) z'(t) (-dt) = - \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

(P3) A partir do conceito, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} [f(z) + \lambda g(z)] dz &= \int_a^b [f(z(t)) + \lambda g(z(t))] z'(t) dt \\ &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt + \lambda \int_a^b g(z(t)) z'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz + \lambda \int_{\gamma} g(z) dz. \end{aligned}$$

(P4) Usando a parametrização dada no Exemplo 4.2.5, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz &= \int_a^c f(\xi(t)) \xi'(t) dt = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt + \int_b^c f(w(t)) w'(t) dt \\ &= \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

1. Represente as seguintes curvas na forma $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$.

- (a) o segmento de reta de $z = 0$ a $z = 1 + 2i$.
- (b) o segmento de reta de $z = -2 + i$ a $z = -2 + 4i$.
- (c) a circunferência $|z - 2i| = 4$.
- (d) a circunferência de raio 5 e centro na origem.
- (e) o arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(3, 9)$.
- (f) a elipse $x^2 + 9y^2 = 9$.

2. Em cada caso, identifique e esboce o gráfico do contorno γ , descrito por:

- (a) $\gamma : z(t) = 3i + 3e^{it}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$
- (b) $\gamma : z(t) = t + 3it^2, \quad 1 \leq t \leq 2.$
- (c) $\gamma : z(t) = 1 + (2 - i)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$
- (d) $\gamma : z(t) = t + i\sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 1.$
- (e) $\gamma : z(t) = 1 + 2i/t, \quad -\infty \leq t < 0.$
- (f) $\gamma : z(t) = \sqrt{1 - t^2} + it, \quad -1 \leq t \leq 1.$

3. Seja $\gamma : z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$, um arco suave contido no domínio de uma função analítica $w = F(z)$. Nos pontos $z(t)$ do arco γ , mostre que:

$$\frac{d}{dt}[F(z(t))] = F'(z(t)) \cdot z'(t).$$

4. Em cada caso, calcule a integral $\int_{\gamma} 3z^2 dz$.

- (a) γ é o segmento de reta de $z = -i$ até $z = i$.
- (b) γ é o arco $|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0$.
- (c) γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(3, 9)$.

5. Calcule $\int_{\gamma} |z| dz$, onde γ é o arco $|z| = 1, \operatorname{Re} z \leq 0$. E se γ fosse o segmento de $-i$ até i , qual seria o valor da integral?

6. Calcule $\int_{\gamma} \sqrt{z} dz$, onde γ é o arco $z = \exp(i\theta)$, nos seguintes casos:

- (a) $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ (b) $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (c) $\pi \leq \theta \leq 3\pi$.

7. Calcule as seguintes integrais de linha:

- (a) $\int_{\gamma} [x^2 - y^2 + i(x^2 - y^2)] dz, \quad \gamma$ é o segmento de $3 + 2i$ até a origem.
- (b) $\int_0^{2+i} (y - x^2) dz$, ao longo da poligonal constituída do eixo y e da reta $y = 1$.
- (c) $\int_{|z|=R} \operatorname{Log} z dz.$
- (d) $\int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{z}}$, ao longo do arco de circunferência $|z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0$.

(e) $\int_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, ao longo do arco $z = 2 \exp(i\theta)$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

(f) $\int_{|z|=1} z^m \cdot (\bar{z})^n dz$.

(g) $\int_{\gamma} \exp(z) dz$, ao longo da poligonal de πi até 1, sobre os eixos coordenados.

(h) $\int_{\pi i}^{2\pi i} \cos z dz$.

(i) $\int_0^{\pi i} z \cos(z^2) dz$.

8. Seja γ o arco ao longo da curva $y = x^3$, de $z = -1 - i$ a $z = 1 + i$ e seja $f(z) = 4y$, se $y > 0$ e $f(z) = 1$, se $y < 0$. Calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$.

9. Sem calcular a integral, mostre que:

(a) $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \right| \leq 1$, sendo γ o segmento de $z = 1$ até $z = 1 + i$

(b) $\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} \right| \leq \frac{\pi}{3}$, sendo γ o arco do círculo $|z| = 2$ de $z = 2$ até $z = 2i$.

10. Se a função $w = f(z)$ é contínua em $z = 0$, mostre que $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta = 2\pi f(0)$.

11. Se γ é o triângulo de vértices $z = 0$, $z = 3i$ e $z = -4$, com orientação positiva, mostre que:

$$\left| \int_{\gamma} (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq 60.$$

12. Se γ_R é o círculo $|z| = R$, $R > 1$, orientado no sentido positivo, mostre que:

(a) $\left| \int_{\gamma_R} \frac{\text{Log } z}{z^2} dz \right| \leq \frac{2\pi(\pi + \ln R)}{R}$ (b) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\text{Log } z}{z^2} dz = 0$.

13. Se $f(z)$ é contínua no círculo $\gamma_R : |z - z_0| = R$, mostre que $\int_{\gamma_R} f(z) dz = iR \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$.

Com o resultado, deduza que:

(a) $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ (b) $\int_{\gamma_R} (z - z_0)^{n-1} dz = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

4.3 Teoremas Clássicos & Consequências

Iniciamos esta seção recordando o Teorema de Green no plano xy , do qual se originou o resultado fundamental da teoria das funções analíticas: o *Teorema de Cauchy-Goursat*.

TEOREMA 4.3.1 (Teorema de Green) *Sejam $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ duas funções de classe C^1 em uma região D , do plano xy , cuja fronteira γ é um contorno simples, fechado e parcialmente regular, com orientação positiva. Então:*

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \quad \blacksquare$$

Agora, se $f(z) = u + iv$ é uma função analítica, com derivada $f'(z)$ contínua, na região D , usamos o Teorema de Green e as equações de Cauchy-Riemann para deduzir que as integrais de linha

$$\int_{\gamma} vdx + udy \quad \text{e} \quad \int_{\gamma} udx - vdy$$

são nulas. De fato, considerando que na região D temos $u_x = v_y$ e $v_x = -u_y$, deduzimos que

$$\int_{\gamma} vdx + udy = \iint_D (u_x - v_y) dxdy = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\gamma} udx - vdy = \iint_D (-v_x - u_y) dxdy = 0.$$

Logo, tendo em vista (4.18), encontramos:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy = 0. \tag{4.22}$$

EXEMPLO 4.3.2 *Como consequência do que acabamos de estabelecer, concluímos que:*

$$\int_{|z|=1} (z^3 + \cos z) dz = 0 \quad \text{e} \quad \int_{|z-i|=1} \left(\frac{\exp z}{z^2 + 4} \right) dz = 0.$$

Ao usar o Teorema de Green para concluir (4.22), a hipótese de ser $f'(z)$ contínua é necessária. Contudo, esta hipótese pode ser removida e E. Goursat foi o primeiro a provar tal fato. O resultado de Cauchy, agora sem a hipótese de continuidade de $f'(z)$, leva o nome de *Teorema de Cauchy-Goursat*.

OBSERVAÇÃO 4.3.3 *Uma região \mathcal{R} do plano \mathbb{C} sem buracos denomina-se **Simplemente Conexa**. De forma precisa, uma região do plano \mathbb{C} é simplesmente conexa quando qualquer contorno simples, fechado e suave, contido em \mathcal{R} , contiver no seu interior apenas pontos da região. Uma região que não é simplesmente conexa denomina-se **Multiplamente Conexas**.*

TEOREMA 4.3.4 (Cauchy-Goursat) Se $f(z)$ é uma função analítica em um domínio simplesmente conexo D , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (4.23)$$

seja qual for o contorno γ simples, fechado e regular por partes contido em D . ■

COROLÁRIO 4.3.5 (Independência do Caminho) Nas condições do Teorema de Cauchy-Goursat, a integral de $f(z)$ ao longo de um contorno ligando os pontos z_1 e z_2 só depende dos pontos z_1 e z_2 e nunca do contorno em D ligando esses pontos.

PROVA Na Figura 4.4 ilustramos dois contornos suaves γ_1 e γ_2 , ligando os pontos z_1 e z_2 . Do Teorema de Cauchy-Goursat resulta:

$$0 = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz,$$

isto é:

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad \blacksquare$$

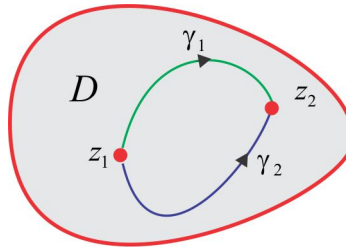


Figura 4.4: Independência do Caminho.

4.3.1 Existência de Primitivas

No que se segue, D representa um domínio simplesmente conexo e $f(z)$ uma função analítica em D . Dados um ponto z_0 , no domínio D , e um número complexo λ , a função complexa $F : D \rightarrow \mathbb{C}$, definida pela relação

$$F(z) = \lambda + \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi,$$

é uma primitiva de $f(z)$, isto é, $F(z)$ é derivável e $F'(z) = f(z)$, em qualquer z do domínio D . De fato, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta z} &= \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right) \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(\xi) d\xi = f(z) + \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} [f(\xi) - f(z)] d\xi. \end{aligned}$$

Daí resulta que:

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z + \Delta z} |f(\xi) - f(z)| |d\xi| \right|. \quad (4.24)$$

Quando $\Delta z \rightarrow 0$, os valores $|f(\xi) - f(z)|$, com ξ entre z e $z + \Delta z$, aproximar-se-ão, uniformemente (independente de ξ), de zero, de modo que:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_z^{z + \Delta z} |f(\xi) - f(z)| |d\xi| = 0. \quad (4.25)$$

De (4.25) concluímos que $\frac{\Delta F}{\Delta z} \rightarrow f(z)$, com $\Delta z \rightarrow 0$, isto é, $F'(z) = f(z)$. Se $G(z)$ é outra primitiva de $f(z)$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[G(z) - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right] &= G'(z) - \frac{d}{dz} \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \\ &= f(z) - f(z) = 0 \end{aligned}$$

e, sendo assim, existe uma constante complexa λ , tal que

$$G(z) = \lambda + \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi.$$

COROLÁRIO 4.3.6 *Se, no domínio D , a função $F(z)$ é qualquer primitiva de $f(z)$ e z_1 e z_2 são dois pontos em D , então:*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1). \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 4.3.7 *Usando $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ como primitiva de $f(z) = z^2$, temos:*

$$\int_i^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3} \left[(1+i)^3 - i^3 \right] = -\frac{2}{3} + i.$$

EXEMPLO 4.3.8 *Se γ_δ representa o círculo $z(t) = z_0 + \delta e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, percorrido no sentido positivo, então, independente do raio δ , temos:*

$$\int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i.$$

De fato:

$$\int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{it}}{\delta e^{it}} dt = 2\pi i.$$

EXEMPLO 4.3.9 Agora, deixe γ ser um contorno simples, fechado e parcialmente regular, envolvendo o ponto z_0 . Então, dependendo da orientação escolhida para o contorno γ , teremos:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \pm 2\pi i.$$

Na Figura 4.5 abaixo ilustramos a situação geométrica, onde D é a região entre os contornos γ e γ_δ , sendo δ suficientemente pequeno, de modo que o círculo γ_δ esteja envolvido pelo contorno γ . Do Teorema de Cauchy-Goursat, segue que:

$$0 = \int_{\gamma+L-L+\gamma_\delta} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_\delta} \frac{dz}{z - z_0},$$

e a conclusão segue do Exemplo 4.3.8.

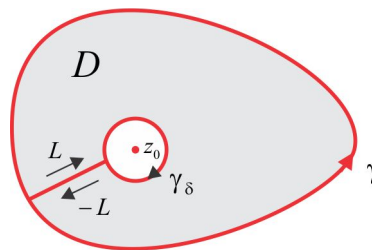


Figura 4.5: Figura para o Exemplo 4.3.9.

OBSERVAÇÃO 4.3.10 O Teorema de Cauchy-Goursat admite uma versão para regiões multiplamente conexas, formulada da seguinte maneira: seja γ_0 um contorno simples, fechado e regular, interno ao contorno γ , também simples, fechado e regular, e seja \mathcal{R} a região entre os contornos γ_0 e γ , com fronteira $\partial\mathcal{R}$ orientada no sentido positivo. Se $f(z)$ é analítica na região $\mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$, então:

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz = 0.$$

4.3.2 Fórmula Integral de Cauchy

A Fórmula Integral de Cauchy é o instrumento básico para estabelecer as propriedades, algumas surpreendentes, das funções analíticas.

Seja γ um contorno simples, fechado, parcialmente regular, com orientação positiva⁷, e consideremos z_0 um ponto interno ao contorno γ ⁸. Se $f(z)$ é analítica na região \mathcal{R} , contendo o contorno γ , então:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0). \tag{4.26}$$

A fórmula (4.26) é a versão simples da Fórmula Integral de Cauchy e para demonstrá-la, consideremos $\delta > 0$, tal que o disco $D_{\delta} : |z - z_0| < \delta$ esteja envolvido pelo contorno γ . Resulta do Teorema de Cauchy-Goursat que:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

sendo γ_{δ} o círculo $|z - z_0| = \delta$, percorrido no sentido positivo. Se expressarmos $f(z)$ sob a forma

$$f(z) = [f(z) - f(z_0)] + f(z_0),$$

teremos:

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \tag{4.27}$$

e a última integral do lado direito de (4.27) é igual a $2\pi i f(z_0)$, conforme vimos no Exemplo 4.3.8. Sendo assim, resta-nos provar que:

$$\int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \rightarrow 0, \quad \text{com } \delta \rightarrow 0.$$

Ora, considerando que $|f(z) - f(z_0)|$ se aproxima de zero, quando $z \rightarrow z_0$, de modo uniforme, isto é, independente do z , temos que dado $\varepsilon > 0$, podemos admitir que $|f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$, seja qual for o z no círculo γ_{δ} e, portanto:

$$\left| \int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \int_{\gamma_{\delta}} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \int_{\gamma_{\delta}} |dz| = \frac{2\pi\varepsilon\delta}{\delta} = 2\pi\varepsilon.$$

Da última relação deduzimos que $\int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0$ e, por conseguinte, temos a fórmula (4.26).

EXEMPLO 4.3.11 Usando a Fórmula Integral de Cauchy, com $z_0 = \pi i$, encontramos:

$$\int_{|z - \pi i| = 4} \frac{e^z dz}{z - \pi i} = 2\pi i \exp(\pi i) = -2\pi i.$$

⁷Um tal contorno denominar-se-á "contorno admissível".

⁸Quando um contorno fechado envolver um ponto, diremos que tal ponto está no interior ou é interno ao contorno.

EXEMPLO 4.3.12 Vamos usar a Fórmula Integral de Cauchy para calcular o valor da integral:

$$\int_{|z+2i|=1} \frac{z dz}{z^2 + 4}.$$

Olhando a integral sob a forma

$$\int_{|z+2i|=1} \frac{z dz}{(z-2i)(z+2i)} = \int_{|z+2i|=1} \frac{f(z) dz}{z+2i},$$

com $f(z) = z(z-2i)^{-1}$, aplicamos Fórmula Integral de Cauchy, com $z_0 = -2i$, e encontramos:

$$\int_{|z+2i|=1} \frac{z dz}{z^2 + 4} = 2\pi i f(z_0) = \pi i.$$

CONSEQUÊNCIAS

1. VALOR DA FUNÇÃO SOBRE O CONTORNO Conhecendo os valores de uma função analítica $f(z)$ sobre um contorno admissível γ , é possível calcular, via integração, todos os valores da função f nos pontos internos ao contorno. De fato, se z_0 é um ponto interno ao contorno γ , então:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (4.28)$$

No cálculo da integral é suficiente conhecermos os valores $f(z)$ nos pontos do contorno γ .

2. REGULARIDADE DAS FUNÇÕES ANALÍTICAS Uma função $f(z)$, analítica em z_0 , é infinitamente derivável em uma vizinhança de z_0 e, além disso, todas as derivadas $f^{(n)}(z)$ são analíticas em z_0 . A comprovação desta consequência tem como princípio a derivação sob o sinal de integral, onde permutamos o limite com o sinal de integral, o que é permitido, neste caso. Para a derivada $f'(z)$, consideramos um contorno admissível γ e obtemos de (4.28):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Delta z} \int_{\gamma} \frac{(\Delta z) f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)}. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $\Delta z \rightarrow 0$, encontramos:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}.$$

Usando o processo indutivo é possível comprovar a Fórmula Integral de Cauchy em sua versão geral:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

3. TEOREMA DE MORERA Se $f(z)$ é contínua em um domínio D , simplesmente conexo, e

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (4.30)$$

ao longo de qualquer contorno admissível γ em D , então a função $f(z)$ é analítica em D . O Teorema de Morera é na verdade uma recíproca do Teorema de Cauchy-Goursat e a condição (4.30) estabelece que a integral de $f(z)$ independe do contorno. Assim, fixado z_0 em D , a função

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

está bem definida e é analítica, já que $F'(z) = f(z)$.

4. TEOREMA DE LIOUVILLE Uma função complexa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que é, ao mesmo tempo, inteira e limitada, é constante. De fato, dado z em \mathbb{C} , segue da Fórmula Integral de Cauchy que:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z|=R} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} \quad (4.31)$$

e considerando M um majorante de $|f(z)|$ em \mathbb{C} , resulta de (4.31)

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi-z|=R} \frac{|f(\xi)| |d\xi|}{|\xi - z|^2} \leq \frac{M}{2\pi R^2} \int_{|\xi-z|=R} |d\xi| = \frac{M}{R} \quad (4.32)$$

e fazendo em (4.32) $R \rightarrow \infty$, obtemos $|f'(z)| = 0$, para todo z em \mathbb{C} , e daí segue que $f(z)$ é constante.

5. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA Todo polinômio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0,$$

de grau $n \geq 1$, possui ao menos uma raiz no corpo \mathbb{C} . Para provar, vamos raciocinar por contradição, admitindo que $P(z)$ não possui raiz em \mathbb{C} . Então a função complexa $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ é inteira e, portanto, limitada no disco compacto $\overline{D}_R : |z| \leq R$, de modo que existe uma constante $M_1 > 0$, tal que:

$$|f(z)| \leq M_1, \quad \forall z \in \overline{D}_R. \quad (4.33)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} |P(z)| &= \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left(|z|^n \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right| \right) \\ &\geq \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left[|z|^n \left(|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} \right| - \cdots - \left| \frac{a_1}{z^{n-1}} \right| - \left| \frac{a_0}{z^n} \right| \right) \right] = \infty, \end{aligned}$$

de onde resulta que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = 0$ e, portanto, existe uma constante positiva M_2 , tal que:

$$|f(z)| \leq M_2, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{ com } |z| \geq R. \quad (4.34)$$

Combinando (4.33) e (4.34) deduzimos que $f(z)$ é limitada em \mathbb{C} e pelo Teorema de Liouville, concluímos que $f(z)$ e, conseqüentemente $P(z)$, é constante. Isto não é possível, a menos que $n = 0$, o que não é o caso.

6. DESIGUALDADE DE CAUCHY Suponhamos que $f(z)$ seja analítica em $D : |z - z_0| < R$ e contínua no compacto $\bar{D} : |z - z_0| \leq R$ e seja M o valor máximo de $|f(z)|$ no compacto \bar{D} . Então

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{R^n}. \quad (4.35)$$

A desigualdade (4.35), que leva o nome de *Desigualdade de Cauchy*, é consequência direta da Fórmula Integral de Cauchy. De fato, temos:

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z) dz}{(z-z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!M}{2\pi R^{n+1}} \int_{|z-z_0|=R} |dz| = \frac{n!M}{R^n}.$$

EXEMPLO 4.3.13 (Aplicando a Desigualdade de Cauchy) Uma função inteira $f(z)$ que satisfaz à desigualdade $|f(z)| \leq C|z|$, para alguma constante real C e para todo número complexo z , ou é identicamente nula ou existe uma constante complexa λ , tal que $f(z) = \lambda z$, $\forall z$. Para comprovar, suponhamos que f não seja identicamente nula e fixemos um ponto z no plano \mathbb{C} . Se M é o valor máximo de $|f(\xi)|$, no disco $|\xi - z| \leq R$, então:

$$M = \max_{|\xi-z|=R} |f(\xi)| \leq \max_{|\xi-z|=R} (C|\xi|) \leq \max_{|\xi-z|=R} C(|\xi - z| + |z|) = C(R + |z|)$$

e da Desigualdade de Cauchy, resulta:

$$|f''(z)| \leq \frac{2!M}{R^2} \leq \frac{2!C(R + |z|)}{R^2}. \quad (4.36)$$

Fazendo em (4.36) $R \rightarrow \infty$, deduzimos que $f''(z) = 0$ de onde resulta que $f(z) = \lambda z + k$ e para concluir, notamos que $k = f(0) = 0$.

7. PRINCÍPIO DO MÓDULO MÁXIMO Seja $f(z)$ uma função analítica e não constante no disco $D_R : |z - z_0| < R$. Se γ é a circunferência $|z - z_0| = r$, $0 < r < R$, segue da Fórmula Integral de Cauchy que:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \tag{4.37}$$

e, como consequência de (4.37), temos:

- (i) O valor de $f(z)$ no ponto z_0 , centro do disco D_R , é a média dos valores de f na circunferência.
- (ii) No disco D_R , existe ao menos um ponto z , tal que $|f(z_0)| < |f(z)|$. De fato, de (4.37) resulta:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta$$

e, se fosse $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, para todo z em D_R , teríamos:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)|,$$

e isto acarretaria

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})|) d\theta = 0. \tag{4.38}$$

Sendo a função real $\theta \mapsto |f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})|$ contínua e não negativa em $[0, 2\pi]$, segue de (4.38) que $|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta})| = 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 < r < R$, e a função seria constante em D_R , contradizendo hipótese.

Princípio do Módulo Máximo: "se $f(z)$ é analítica no disco $D_R : |z - z_0| < R$, o valor máximo de $|f(z)|$, caso exista, não ocorre no interior do disco".

TEOREMA 4.3.14 (Teorema do Módulo Máximo) Se $f(z)$ é analítica e não constante em uma região compacta K , então o valor máximo de $|f(z)|$ não ocorre no interior do compacto K . ■

EXEMPLO 4.3.15 Para ilustrar o Teorema do Módulo Máximo, consideremos a função $f(z) = (z + 1)^2$, na região compacta K , delimitada pelo triângulo de vértices $z = 0$, $z = 1$ e $z = i$. Se $z = x + iy$, então

$$|f(z)| = (x + 1)^2 + y^2$$

e na região K o valor máximo da função real $z \mapsto |f(z)|$ é $M = 4$, atingido no ponto de fronteira $z = 1$.

OBSERVAÇÃO 4.3.16 (Sobre o Princípio do Módulo Mínimo) A função $f(z) = z$ é analítica no disco $\bar{D} : |z| \leq 1$ e a função real $z \mapsto |f(z)|$ atinge seu valor mínimo na origem $z = 0$, o qual é um ponto interior ao disco \bar{D} . No caso em que a função $f(z)$ é analítica e não constante em um domínio limitado D e contínua na região compacta \bar{D} , com $f(z) \neq 0$ em D , então o valor mínimo de $|f(z)|$ ocorrerá em um ponto z_0 da fronteira ∂D . De fato, neste caso, z_0 será um ponto de máximo da função $g(z) = 1/f(z)$, o qual, pelo Teorema do Módulo Máximo, estará na fronteira do domínio D .

EXEMPLO 4.3.17 Vamos ilustrar o Princípio do Módulo Mínimo, considerando $f(z) = (z+1)^2$ na região delimitada pelo triângulo de vértices $z = 0, z = i$ e $z = 2$. A função $f(z)$ não se anula na região e a real $|f(z)|$ atinge seu valor mínimo $m = 1$ no ponto de fronteira $z = 0$.

EXEMPLO 4.3.18 (Princípio do Min-Max para Funções Harmônicas) Dada uma função $u(x, y)$, harmônica e não constante no domínio limitado D , seja $v(x, y)$ uma harmônica conjugada de u . Se a função analítica $f(z) = u + iv$ é contínua na região compacta $\bar{D} = D \cup \partial D$, então o valor máximo (e também o valor mínimo) de $u(x, y)$ ocorre em um ponto da fronteira de D . Para comprovar, seja z_0 o ponto de máximo da função real $z \mapsto |\exp(f(z))|$, o qual jaz na fronteira ∂D e é, também, o ponto de máximo da função $u(x, y)$, tendo em vista que:

$$\exp(u(z_0)) = |\exp(f(z_0))| \geq |\exp(f(z))| = \exp(u(z)), \quad \forall z \in \bar{D},$$

e daí resulta que $u(z_0) \geq u(z)$, $\forall z \in \bar{D}$.

1. Determine onde a função $w = f(z)$ é analítica e usando o Teorema de Cauchy-Goursat deduza

que $\int_{|z|=1} f(z) dz = 0$:

(a) $w = \frac{z^2}{z-3}$ (b) $w = \frac{1}{z^2+2z+2}$ (c) $w = \frac{z}{\exp z}$ (d) $w = z \operatorname{Log}(z+2i)$ (e) $w = \tan z$.

2. Seja \mathcal{R} a região compreendida entre o círculo $|z| = 4$ e o quadrado de vértices $z = \pm 1$ e $z = \pm i$, com a fronteira $\partial \mathcal{R}$ orientada no sentido positivo. Em cada caso, explique por quê $\int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz = 0$.

(a) $f(z) = \frac{1}{3z^2+1}$ (b) $f(z) = \frac{z+2}{\operatorname{sen}(z/2)}$ (c) $f(z) = \frac{z}{1-\exp z}$.

3. Calcule $\int_{|z|=1} f(z) dz$, sendo $w = f(z)$ dada por:

(a) $\frac{1}{z}$ (b) $\frac{1}{4+iz}$ (c) $\frac{\exp(2z)}{z+2i}$ (d) $\frac{\cos z}{z}$ (e) $\frac{e^z-1}{2z-1}$ (f) $\frac{\cosh(3z)}{z}$.

4. Calcule $\int_{\gamma} \frac{z^2}{z^4-1} dz$, sendo γ o círculo $|z-i|=1/2$.

5. Seja γ o contorno $|z|=3$, com orientação positiva, e defina a função

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{2\xi^2 - \xi - 2}{\xi - z} d\xi, \quad |z| \neq 3.$$

Calcule os valores de $g(2)$ e $g(4i)$. Qual o valor de $g(z)$, para $|z| > 3$?

6. Seja γ um contorno simples, fechado e suave, e defina a função

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{(\xi^2 + 2\xi) d\xi}{\xi - z}.$$

Quais os possíveis valores para $g(z)$? Note que g não está definida nos pontos do contorno γ .

7. Seja \mathcal{R} a região delimitada pelo quadrado de vértices $z = \pm 2$ e $z = \pm 2i$ e considere a fronteira $\partial\mathcal{R}$ com orientação positiva. Calcule $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz$, nos seguintes casos:

(a) $f(z) = \frac{\exp(-z)}{2z - \pi i}$ (b) $f(z) = \frac{z}{2z + 1}$ (c) $f(z) = \frac{\tan(z/2)}{(z - z_0)^2}$, $|z_0| < 1/2$.

8. Seja $w = f(z)$ uma função analítica na região delimitada por um contorno simples fechado γ e seja z_0 um ponto fora de γ . Mostre que:

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}.$$

9. Seja γ o círculo unitário $z = e^{i\theta}$, orientado de $\theta = -\pi$ a $\theta = \pi$. Se λ é uma constante real, mostre que $\int_{\gamma} \frac{e^{\lambda z} dz}{z} = 2\pi i$ e usando o resultado conclua que $\int_0^{\pi} e^{\lambda \cos \theta} \cos(\lambda \sin \theta) d\theta = \pi$.

10. Ilustre o Princípio do Min-Max para funções harmônicas, apresentado no Exemplo 4.3.18, com os dados: $f(z) = \exp z$ e $\mathcal{R} : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \pi$.

11. Dado um polinômio $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, de grau $n \geq 1$, mostre que existe uma constante $R > 0$, tal que:

$$|P(z)| > \frac{|a_n| |z|^n}{2}, \quad \text{sempre que } |z| > R. \tag{4.39}$$

12. Calcule as seguintes integrais:

$$(a) \oint_{|z|=3} \frac{\cos(z^2 + 3z - 1) dz}{(2z + 3)^2} \quad (b) \oint_{|z|=1} \frac{\text{Log}(z^2 + 2) dz}{(3z - 2)^2} \quad (c) \oint_{|z|=1} \frac{(z^2 + z + i) dz}{(4z - i)^3}.$$

13. Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função inteira e suponha que $u(x, y)$ seja limitada em \mathbb{R}^2 . Mostre que $u(x, y)$ é constante.

14. Suponha que a função $f(z) = \sqrt{z^2 + 4}$ seja determinada pela condição $f(0) = -2$. Se γ é o quadrado de vértices $z = \pm 1 \pm i$, com orientação positiva, calcule:

$$(a) \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{4z^2 + 4z - 3} \quad (b) \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{4z^2 - 4iz - 1} \quad (c) \int_{\gamma} \frac{z dz}{(2z^2 + 1) f(z)}.$$

15. Se γ é o contorno $|z - i| = 2$, com orientação positiva, calcule o valor de $\int_{\gamma} g(z) dz$, sendo:

$$(a) g(z) = \frac{1}{z^2 + 4} \quad (b) g(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}.$$

16. Seja $w = f(z)$ uma função analítica no disco $|z| < 1$, no qual se tem $|f(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|}$. Usando a Fórmula Integral de Cauchy no contorno $\gamma_n : |z| = \frac{n}{n+1}$, deduza que:

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq (n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.40)$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.1

1. Usando primitivas, obtemos:

(a) $-\sqrt{2}/2 + (1 - \sqrt{2}/2)i$.

(b) $1/w$.

(c) A integral é igual a 2π , se $m = n$, e igual a 0, caso contrário.

2. (a) i (b) $2 + 2i$ (c) $\frac{1}{2}(e^{-\pi} - e^{\pi})$.

3. $I = 2 + 3i$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.2

1. Usando a parametrização canônica.

(a) $z(t) = t + 2it, \quad 0 \leq t \leq 1.$

(b) $z(t) = -2 + it, \quad 1 \leq t \leq 4.$

(c) $z(t) = 4 \cos t + (2 + 4 \operatorname{sen} t) i, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

(d) $z(t) = 5 \cos t + 5i \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

(e) $z(t) = t + it^2, \quad 0 \leq t \leq 3.$

(f) $z(t) = 3 \cos t + i \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

2. (a) Circunferência de centro $z_0 = 3i$ e raio $R = 3$.

(b) Arco da parábola $y = 3x^2$, de $z_1 = 1 + 3i$ até $z_2 = 2 + 12i$.

(c) O segmento de reta de $z = 1$ até $z = 3 - i$.

(d) O arco de circunferência $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$, de $z = (1, 0)$ até $z = (-1, 0)$.

(e) A semi-reta $[x = 1; -\infty < y \leq 0]$.

(f) O arco da circunferência $|z| = 1, \operatorname{Re}(z) \geq 0$, de $z = -i$ até $z = i$.

3. Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [F(z(t))] &= \frac{d}{dt} [u(x(t), y(t))] + i \frac{d}{dt} [v(x(t), y(t))] \\ &= u_x x' + u_y y' + i (v_x x' + v_y y') \\ &= (u_x + iv_x) x' + i (v_y - iu_y) y' \\ &= F'(z(t)) (x' + iy') = F'(z(t)) z'(t). \end{aligned}$$

4. (a) $-2i$ (b) $-2i$ (c) $27(1+i)^3$.

5. Ao longo do arco $|z| = 1, \operatorname{Re} z \leq 0$, a integral é $-2i$; ao longo do segmento de $-i$ até i é igual a i .

6. (a) $2\sqrt{2}i/3$ (b) $-4/3$ (c) $4i/3$.

7. Em alguns casos, o uso de primitivas torna os cálculos mais simples.

(a) $\frac{5}{3}(1 + 5i)$.

(b) $-\frac{2}{3} + \frac{i}{2}$.

(c) 0.

(d) $2 - 2i$.

(e) $4 - 2\pi i$

(f) A integral vale $2\pi i$, se $m = n - 1$, e zero, caso contrário.

(g) $1 + e$.

(h) 0.

(i) $-\frac{1}{2} \operatorname{sen}(\pi^2)$.

8. $I = 2 + 3i$.

9. (a) No arco γ , temos que $|1/z| \leq 1$ e, portanto:

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \right| \leq \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|} \leq \int_{\gamma} |dz| = 1.$$

(b) No arco γ , temos $|1 + z^2| \geq |z|^2 - 1 = 3$ e, assim:

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{1 + z^2} \right| \leq \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|1 + z^2|} \leq \frac{1}{3} \int_{\gamma} |dz| = \frac{1}{3} L(\gamma) = \frac{\pi}{3}.$$

10. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta > 0$, tal que $|f(re^{i\theta}) - f(0)| < \varepsilon$, $\forall \theta$ e $0 < r < \delta$. Assim,

$$\left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta - 2\pi f(0) \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(0)| d\theta < 2\pi\varepsilon.$$

11. No triângulo γ , temos $x = \operatorname{Re}(z) \leq 0$, de modo que $e^x \leq 1$ e $|\bar{z}| = |z| \leq 4$. Assim:

$$\left| \int_{\gamma} (e^z - \bar{z}) dz \right| \leq \int_{\gamma} (e^x + |\bar{z}|) |dz| \leq \int_{\gamma} (1 + 4) |dz| = 5 \cdot L(\gamma) = 60.$$

12. (a) No contorno $\gamma_R: z = R \exp(i\theta)$, $-\pi < \theta \leq \pi$, temos:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \left(\frac{\operatorname{Log} z}{z^2} \right) dz \right| &\leq \int_{\gamma_R} \frac{|\operatorname{Log} z| |dz|}{R^2} = \frac{1}{R^2} \int_{\gamma_R} |\ln R + i\theta| |dz| \leq \frac{1}{R^2} \int_{\gamma_R} (\ln R + |\theta|) |dz| \\ &= \frac{1}{R^2} (\ln R + \pi) \int_{\gamma_R} |dz| = \frac{2\pi (\ln R + \pi)}{R}. \end{aligned}$$

(b) Segue de (a), com $R \rightarrow \infty$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.3

1. Se uma função $w = f(z)$ é analítica em uma região delimitada por um contorno γ , simples, fechado e suave (curva de Jordan), então $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Em cada caso, representamos por \mathcal{R} a região onde $f(z)$ é analítica.

(a) $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 3\}$.

(b) $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -1 \pm i\sqrt{2}\}$.

(c) $\mathcal{R} = \mathbb{C}$.

(a função $f(z)$ é inteira.)

(d) $\mathcal{R} = \mathbb{C} \setminus E$.

(a função $f(z)$ é analítica fora do semi-eixo $E = [x \leq 0 \text{ e } y = -2]$.)

(e) $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq k\pi + \pi/2\}$.

2. As singularidades da função estão fora da região $\mathcal{R} \cup \partial\mathcal{R}$.

3. Nos casos (a), (d), (e) e (f) o resultado segue da Fórmula Integral de Cauchy. Em (b) e (c) a integral é 0, pelo Teorema de Cauchy-Goursat.

(a) $2\pi i$ (d) $2\pi i$ (e) $\pi i(\sqrt{e} - 1)$ (f) $2\pi i$.

4. Fatorando o polinômio $z^4 - 1$ e considerando $f(z) = \frac{z^2}{z^3 + iz^2 - z - i}$ encontramos:

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 dz}{z^4 - 1} = \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - i} = 2\pi i f(i) = \pi/2.$$

5. Temos que $g(2) = 8\pi i$ e se $|z| > 3$, então $g(z) = 0$.

6. Se o contorno γ envolve o ponto z , temos $g(z) = \pm 2\pi i (z^2 + 2z)$, de acordo com a orientação escolhida para γ . Se o ponto z não está nem é envolvido pelo contorno γ , então $g(z) = 0$.

7. (a) π (b) $-\pi i/2$ (c) $\pi i \sec^2(z_0/2)$.

8. Resolva por etapas, observando a posição do ponto z_0 em relação à região \mathcal{R} delimitada por γ .

(i) Se o ponto z_0 for exterior à região \mathcal{R} , os integrandos são analíticos e as integrais são nulas.

(ii) Se o ponto z_0 é interior à região, segue da Fórmula integral de Cauchy que as duas integrais valem $2\pi i f'(z_0)$.

9. Da Fórmula Integral de Cauchy, com $f(z) = \exp(\lambda z)$, temos:

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\lambda z}}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{e^{\lambda z}}{z - 0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \int_{\gamma} \frac{e^{\lambda z}}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(\lambda e^{i\theta})}{e^{i\theta}} (ie^{i\theta}) d\theta = i \int_{-\pi}^{\pi} \exp(\lambda \cos \theta + i\lambda \sin \theta) d\theta \\ &= i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda \cos \theta} [\cos(\lambda \sin \theta)] d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda \cos \theta} [\sin(\lambda \sin \theta)] d\theta. \end{aligned}$$

Logo, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda \cos \theta} [\sin(\lambda \sin \theta)] d\theta = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda \cos \theta} [\cos(\lambda \sin \theta)] d\theta = \pi$.

10. Dado que $f(z) = \exp z$, então $u(x, y) = e^x \cos y$ e $v(x, y) = e^x \sin y$. Considerando que a função $u(x, y) = e^x \cos y$ não tem ponto crítico, concluímos que os valores máximo e mínimo de $u(x, y)$ ocorrem na fronteira da região. Raciocínio similar se aplica à função $v(x, y)$.

11. Considerando que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| = 0$, existe $R > 0$, tal que:

$$\left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| < \frac{|a_n|}{2}, \quad \text{sempre que } |z| > R. \quad (4.41)$$

Agora, usando (4.41), temos:

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |z|^n \left| a_n + \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| \geq |z|^n \left(|a_n| - \left| \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \right| \right) \\ &> |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_n|}{2} \right) = \frac{|z|^n |a_n|}{2}, \quad \text{se } |z| > R. \end{aligned}$$

12. (a) 0 (b) $4\pi i/33$ (c) $\pi i/32$.

13. Sendo $u(x, y)$ limitada, a função $g(z) = \exp[f(z)]$ é inteira e limitada, já que $|g(z)| = e^{u(x, y)}$, e do Teorema de Liouville segue que $g(z)$, e, portanto, $u(x, y)$, é constante.

14. É fundamental a escolha do ramo de Log z , para podermos aplicar a Fórmula Integral de Cauchy.

Após a fatoração do denominador, encontramos:

$$(a) \int_{\gamma} \frac{\sqrt{z^2 + 4} dz}{4(z + 3/2)(z - 1/2)} = 2\pi i \left[\frac{\sqrt{z^2 + 4}}{4(z + 3/2)} \right]_{z=1/2} = \frac{\sqrt{17}}{8} \pi i \quad (b) -\pi/2\sqrt{15} \quad (c) \pi i \sqrt{2/7}.$$

15. (a) $\pi/2$ (b) $\pi/16$.

16. Sobre o contorno γ_n temos $\frac{1}{1-|z|} = n+1$ e da Fórmula Integral de Cauchy, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi |f^{(n)}(0)|}{n!} &= \left| \int_{\gamma_n} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \int_{\gamma_n} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| \leq \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} \int_{\gamma_n} \frac{|dz|}{1-|z|} \\ &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+1} (n+1) L(\gamma_n) = 2\pi (n+1) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n. \end{aligned}$$

5. Séries, Resíduos & Pólos



No Capítulo 1, quando tratamos com seqüências complexas $z_k = x_k + iy_k$, $k \in \mathbb{N}$, ressaltamos a importância das seqüências reais $x_k = \operatorname{Re}(z_k)$ e $y_k = \operatorname{Im}(z_k)$. Os conceitos e regras sobre séries numéricas reais serão o ponto de partida para estabelecermos os resultados básicos sobre séries complexas.

5.1 Séries Complexas. Convergência Uniforme

Dada uma seqüência (z_k) , de números complexos, deixe-nos representar por Z_n , $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima soma parcial

$$Z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sum_{k=1}^n z_k. \quad (5.16)$$

Se considerarmos $z_k = x_k + iy_k$, teremos $Z_n = X_n + iY_n$, sendo

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad \text{e} \quad Y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

e a seqüência de somas parciais (Z_n) converge para $Z = X + iY$ se, e somente se, $\lim X_n = X$ e $\lim Y_n = Y$.

DEFINIÇÃO 5.1.1 A soma infinita $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$, também denominada **Série**, é Convergente quando a seqüência (Z_n) de somas parciais convergir. Neste caso, anotamos

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \lim Z_n = \lim X_n + i \lim Y_n.$$

Quando a seqüência (Z_n) divergir, diremos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é Divergente.

5.1.1 Propriedades Básicas

Algumas propriedades estabelecidas para séries reais continuam válidas para séries complexas. No que se segue, x_k e y_k representam, respectivamente, as partes real e imaginária do número complexo z_k .

1. A série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente se, e somente se, as séries reais $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_k)$ e $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_k)$ são convergentes. Neste caso, temos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}(z_k) + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}(z_k). \quad (5.17)$$

PROVA Se $Z_n = X_n + iY_n$ é a n -ésima soma parcial da série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$, então:

$$X_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(z_k) \quad \text{e} \quad Y_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k)$$

e o resultado segue do Exercício 8 da Seção 1.4. ■

2. Se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente, então $\lim |z_k| = 0$.

PROVA Se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente, então as séries reais $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ são convergentes e, portanto:

$$\lim x_k = 0 \quad \text{e} \quad \lim y_k = 0.$$

Logo, $\lim z_k = 0$. ■

3. Se a série real $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ é convergente, então a série complexa $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ também converge.

PROVA Considerando que $|x_k| \leq |z_k|$ e $|y_k| \leq |z_k|$, $\forall k$, deduzimos por comparação que as séries reais $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ são absolutamente convergentes e, portanto, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge. ■

4. Como ocorre no caso real, se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ são convergentes e λ é uma constante complexa, então

$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \lambda \cdot w_k)$ é convergente, com soma dada por:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \lambda \cdot w_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} w_k.$$

PROVA Decorre diretamente das propriedades do limite para seqüências. ■

EXEMPLO 5.1.2 A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-i)^k + 1}{ik^2}$ converge absolutamente⁹. De fato, basta observar que os termos desta série são, em valor absoluto, dominados pelos termos de uma p -série real convergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-i)^k + 1}{ik^2} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}.$$

EXEMPLO 5.1.3 A série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{ik}$ converge condicionalmente¹⁰. De fato, se $z_k = \frac{(-1)^k}{ik}$, temos $x_k = 0$ e $\text{Im}(z_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, de modo que as séries $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ são convergentes. Assim, $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ também converge. Por outro lado, $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ é a série harmônica divergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

EXEMPLO 5.1.4 (A Série Geométrica) Por **Série Geométrica** de razão ξ e coeficiente λ , entendemos uma série do tipo $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot \xi^{k-1}$. Para uma tal série, temos:

(a) Se $|\xi| < 1$ a série converge para $\frac{\lambda}{1-\xi}$. De fato, sendo $|\xi| < 1$, temos pelo Exercício 11 da Seção 1.4 que $\lim(\xi^n) = 0$ e como a n -ésima soma parcial Z_n vem dada por

$$Z_n = \lambda \cdot (1 + \xi + \xi^2 + \dots + \xi^{n-1}) = \lambda \cdot \left(\frac{1 - \xi^n}{1 - \xi} \right),$$

temos que $\lim Z_n = \lambda \cdot \lim \left(\frac{1 - \xi^n}{1 - \xi} \right) = \frac{\lambda}{1 - \xi}$.

(b) Se $|\xi| \geq 1$ e $\lambda \neq 0$, então o termo geral $\lambda \cdot \xi^{k-1}$ não converge para zero e a série é divergente.

EXEMPLO 5.1.5 Para encontrar o **Disco** de convergência da série geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(3i)^k}$, observamos que a razão da série é $\xi = \frac{z-i}{3i}$ e ela será convergente se, e somente se:

$$\left| \frac{z-i}{3i} \right| < 1 \Leftrightarrow |z-i| < 3.$$

Portanto, o disco de convergência é $D : |z-i| < 3$, de centro no ponto $z_0 = i$ e raio $R = 3$. Por exemplo, no ponto $z = 1+i$ a razão é $\xi = \frac{1}{3i}$ e, neste caso, a soma da série é igual a:

$$\frac{1}{1-\xi} = \frac{9-3i}{10}.$$

⁹ A série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge absolutamente quando a série real $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ for convergente.

¹⁰ A série $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge condicionalmente quando for convergente e a série real $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ for divergente.

Consideremos uma sequência $\{f_n : D \rightarrow \mathbb{C}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funções complexas, definidas em um domínio D do plano \mathbb{C} .

DEFINIÇÃO 5.1.6 A sequência $\{f_n\}$ converge **Converge Pontualmente** para a função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ quando, para cada z no domínio D , a sequência numérica $\{f_n(z)\}$ convergir em \mathbb{C} para o número complexo $f(z)$. Em outras palavras, fixado z em D e dado $\varepsilon > 0$ existe um índice N , que, em princípio, depende de z e ε , tal que:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

DEFINIÇÃO 5.1.7 A sequência $\{f_n\}$ converge **Converge Uniformemente** para a função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ quando a cada $\varepsilon > 0$ corresponder um índice $N = N(\varepsilon)$, tal que:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall z \in D.$$

LEMA 5.1.8 O limite uniforme de uma sequência $\{f_n : D \rightarrow \mathbb{C}\}$, de funções contínuas, é uma função contínua.

PROVA Deixe f ser o limite uniforme da sequência $\{f_n\}$ e fixemos z_0 no domínio D . Para mostrar que f é contínua em z_0 , seja $\varepsilon > 0$ dado e escolhamos $\delta > 0$ e um índice N tais que:

$$\begin{aligned} |f_N(z) - f(z)| < \varepsilon/3, \quad \forall z \in D & \quad \text{(convergência uniforme)} \\ |f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3, \quad |z - z_0| < \delta & \quad \text{(continuidade de } f_N \text{ em } z_0) \end{aligned}$$

A partir da Desigualdade Triangular, obtemos:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f_N(z) - f(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,$$

para todo z em D , tal que $|z - z_0| < \delta$. ■

LEMA 5.1.9 Seja $\{f_n : D \rightarrow \mathbb{C}\}$ uma sequência de funções contínuas, convergindo uniformemente para a função $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Se γ é um contorno admissível contido no domínio D , então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (5.18)$$

PROVA Seja $\varepsilon > 0$ dado e fixemos um índice N , tal que:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall z \in D.$$

Então:

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| dz \leq \varepsilon \int_{\gamma} |dz| = \varepsilon L(\gamma) \quad (5.19)$$

e de (5.19) temos o resultado. ■

DEFINIÇÃO 5.1.10 Diremos que a série de funções complexas $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente em D quando a sequência de reduzidas $S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$ convergir uniformemente em D .

TEOREMA 5.1.11 Se a sequência de funções analíticas $\{f_k : D \rightarrow \mathbb{C}\}$ é uniformemente convergente no domínio D , então a série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ define em D uma função analítica $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO A sequência (g_n) de funções analíticas $g_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, definidas por:

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z)$$

converge uniformemente em D para uma certa função f , cujo valor em z é a soma da série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ e se γ é um contorno admissível em D , então:

$$\oint_{\gamma} g_n(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma} f_k(z) dz = 0, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Pelo Lema 5.1.9 deduzimos que:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\gamma} g_n(z) dz = 0$$

e o Teorema de Morera assegura a analiticidade de f . ■

Encerramos esta seção com um teste de convergência uniforme, devido a Weierstrass, muito utilizado em análise.

TEOREMA 5.1.12 (Teste M de Weierstrass) Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções complexas, definidas em um domínio D do plano \mathbb{C} , e suponhamos que exista uma sequência $\{M_n\}$ de números reais, tal que:

(i) A série real $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ é convergente.

(ii) $|f_n(z)| \leq M_n, \quad \forall z \in D, \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Nestas condições, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniforme e absolutamente em D .

DEMONSTRAÇÃO Basta observar que:

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} M_k \rightarrow 0, \quad \text{com } n \rightarrow \infty,$$

independente do z no domínio D . ■

EXEMPLO 5.1.13 Fixado qualquer número complexo λ , a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{k!}$ converge uniformemente no disco $D : |z| < R$. De fato, se $|z| < R$, então:

$$\left| \frac{\lambda^k z^k}{k!} \right| \leq \frac{(|\lambda|R)^k}{k!}, \quad \forall z \in D, \quad \forall k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

e para concluir basta observar que a série real $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|\lambda|R)^k}{k!}$ é convergente, pelo Teste da Razão.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.1

1. A série $\sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^k$ é convergente ou divergente? Porquê?
2. Calcule a soma da série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+i)^k}{(2+i)^{k-1}}$ no ponto $z = 2 - i$.
3. Se $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ é convergente e $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ é divergente, mostre que a série $\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + w_k)$ é divergente.
4. Mostre que a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+2)^k}{(k+1)^3 4^k}$ converge absolutamente no disco compacto $D : |z+2| \leq 4$.
5. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(nz) - \exp(-nz)}{2^n}$ converge absolutamente na faixa $|\operatorname{Im}(z)| < \ln 2$.
6. Usando o **Teste M de Weierstrass**, estabeleça a convergência uniforme das séries, no domínio indicado.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n z^n}{n!}; z < R$	(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k z^n}{R^n}; z \leq r < R$	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{z/n}}{n^2 + z^2}; z < R, z \neq in.$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + z^2}; 1 < z < 2.$	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{z/n} \cos n}{n^3 + 1}; z < R$	(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 - \cos n) z^{2n}}{n^2 + 1}; z \leq \frac{1}{2}$

7. Use o Teorema 5.1.11 para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nz)}{2^n}$ define, na faixa $|\text{Im}(z)| < \ln 2$, uma função analítica.
8. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nz)}{n^2}$ converge uniformemente no eixo real e que a convergência não é uniforme em região alguma do plano \mathbb{C} .

5.2 Séries de Potências

Casos particulares interessantes de séries de funções, são as séries em que o termo geral é do tipo $a_k (z - z_0)^k$. Tais séries são conhecidas por *Séries de Potências* e se apresentam sob a forma:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \tag{5.20}$$

onde os coeficientes a_k e o centro z_0 são números complexos. As funções analíticas no ponto z_0 podem ser representadas por séries de potências do tipo (5.20) e, reciprocamente, qualquer série de potências (5.20) representa, no disco de convergência, uma função analítica.

EXEMPLO 5.2.1 A função analítica $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$, pode ser vista como a soma de uma série geométrica convergente de razão z . De fato, no disco $|z| < 1$, temos

$$\frac{1}{1-z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k. \tag{5.21}$$

Se em (5.21) trocarmos z por $-z$, encontramos:

$$\frac{1}{1+z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k. \tag{5.22}$$

TEOREMA 5.2.2 (Teorema de Abel) Se a série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ é convergente no ponto $z_1 \neq z_0$, então ela converge absolutamente no disco $D : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

DEMONSTRAÇÃO Como a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$ é convergente, segue que

$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k (z_1 - z_0)^k| = 0$ e, assim, existe $M > 0$, tal que $|a_k (z_1 - z_0)^k| \leq M, \forall k$.

Ora:

$$|a_k (z - z_0)^k| = |a_k (z_1 - z_0)^k| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^k \leq M \left(\frac{r}{R} \right)^k, \quad \forall k,$$

e segue por comparação que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_1 - z_0)^k$ converge absolutamente em D . ■

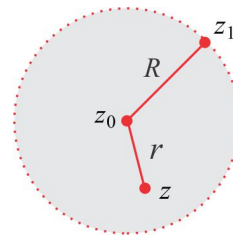


Figura 5.1:

CONSEQUÊNCIAS

1. DIVERGÊNCIA FORA DE UM DISCO

Se a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ é divergente no ponto $z = z_2$, então ela será divergente em qualquer z , tal que $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$. De fato, se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ convergisse em algum z^* , com $|z^* - z_0| = r > R$, ela seria convergente em qualquer z , tal que $|z - z_0| < r$ e, em particular, convergiria em $z = z_2$, contradizendo a hipótese.

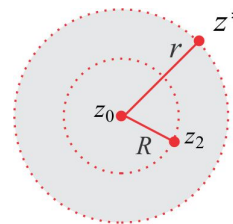


Figura 5.2:

2. EXPOENTES NEGATIVOS

Se a série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}$ convergir absolutamente no ponto $z_1 \neq z_0$, então ela convergirá absolutamente no disco $D : |z - z_0| < |z_1 - z_0|$. De fato, se ela fosse divergente em algum z^* do disco D , então:

$$\left| \frac{b_k}{(z^* - z_0)^k} \right| \leq \left| \frac{b_k}{(z_1 - z_0)^k} \right|$$

e, por comparação, a série $\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| |z - z_0|^{-k}$ seria divergente.

3. RAIOS DE CONVERGÊNCIA

Assim como ocorre com as séries de potências reais, toda série de potências complexas $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ tem um raio de convergência R , o qual pode ser 0 , $+\infty$ ou $0 < R < +\infty$. No último caso, a série converge absolutamente no disco $D_R : |z - z_0| < R$ e diverge se $|z - z_0| > R$. O número real R é definido por:

$$R = \sup \left\{ |z - z_0| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ converge} \right\}.$$

LEMA 5.2.3 Com respeito à série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ apenas uma das condições abaixo ocorre:

- (i) A série converge apenas em $z = z_0$. Neste caso, o raio de convergência é $R = 0$.
- (ii) A série converge em todo ponto z . Neste caso, o raio de convergência é $R = \infty$.
- (iii) Se $0 < R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| < \infty$, então a série converge absolutamente no disco $|z - z_0| < R$ e diverge se $|z - z_0| > R$.

PROVA Aplicando o Teste da Razão à série numérica real $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z - z_0|^k$, calculamos:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1} (z - z_0)^{k+1}}{a_k (z - z_0)^k} \right| = \frac{|z - z_0|}{R}$$

e deduzimos que a série converge absolutamente se $L < 1$ e diverge se $L > 1$, isto é, converge absolutamente, se $|z - z_0| < R$, e diverge, se $|z - z_0| > R$. É oportuno ressaltar que a divergência da série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |z - z_0|^k$ não implica na divergência de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Para concluir que a série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ diverge, no caso em que $|z - z_0| > R$, raciocinamos por absurdo, admitindo que ela convirja em z_1 , com $|z_1 - z_0| > R$. Pelo Teorema de Abel, a série convergiria absolutamente no anel $R < |z - z_0| < |z_1 - z_0|$, contradizendo o Teste de Razão. ■

5.2.1 Convergência Uniforme das Séries de Potências

A convergência uniforme para as séries de potências, estabelecida a seguir, é o ponto de partida para os processos de integração e derivação termo a termo.

TEOREMA 5.2.4 (Convergência Uniforme) A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge absoluta e uniformemente no disco $\bar{D}_r : |z - z_0| \leq r < R$, sendo R o raio de convergência da série.

DEMONSTRAÇÃO Sejam

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k \quad \text{e} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k .$$

No disco de convergência $D_R : |z - z_0| < R$ a sequência $\{f_n\}$ converge pontualmente para f e desejamos provar que a convergência é uniforme em $\bar{D}_r : |z - z_0| \leq r$, com $r < R$. Fixemos ξ no anel $D : r < |\xi - z_0| < R$, como ilustrado na Figura 5.3, e seja z qualquer ponto do disco \bar{D}_r . Temos:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |z - z_0|^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| |\xi - z_0|^k \longrightarrow 0, \quad \text{com } n \rightarrow \infty,$$

independente de z no disco $|z - z_0| < r$.

Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice N , tal que:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall z \in \bar{D}_r \quad \blacksquare$$

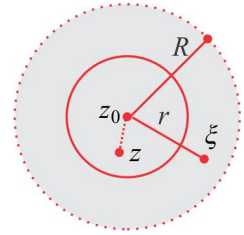


Figura 5.3:

COROLÁRIO 5.2.5 (Integração Termo a Termo) Se γ é um contorno admissível contido no disco de convergência D_R da série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ e $g(z)$ é uma função contínua em D_R , então:

$$\int_{\gamma} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k g(z) \right] dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} a_k (z - z_0)^k g(z) dz.$$

PROVA Segue do Teorema 5.2.4 que:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k g(z) \longrightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k g(z),$$

uniformemente em $\bar{D} : |z - z_0| \leq r < R$ e como $f_n g \rightarrow f g$, uniformemente em D_R , resulta do Lema 5.1.9 que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) g(z) dz &= \int_{\gamma} f(z) g(z) dz \Leftrightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \left[\sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k g(z) \right] dz &= \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right) g(z) dz \Leftrightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_{\gamma} a_k (z - z_0)^k g(z) dz &= \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right) g(z) dz \Leftrightarrow \\ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma} a_k (z - z_0)^k g(z) dz &= \int_{\gamma} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \right) g(z) dz. \end{aligned}$$

COROLÁRIO 5.2.6 (Derivação Termo a Termo) A série de potências $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ define no seu disco de convergência uma função analítica $f(z)$ e a derivada $f'(z)$ é dada por:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}. \tag{5.23}$$

O raio de convergência da série obtida por derivação termo a termo é igual ao raio de convergência da série original.

PROVA As somas parciais $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k$ são analíticas no domínio de convergência D_R , de modo que:

$$\oint_{\gamma} f_n(z) dz = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

sobre qualquer contorno admissível γ , contido no disco de convergência. Assim:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma} f_n(z) dz = 0$$

e, sendo $f(z)$ contínua em D_R , segue do Teorema de Morera que $f(z)$ é analítica em D_R .

Comprovemos, agora, a relação (5.23). Dado ξ em D_R , temos:

$$f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k (\xi - z_0)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi)$$

e daí resulta que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f_n(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2}$$

e da Fórmula Integral de Cauchy, deduzimos que:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n k a_k (z - z_0)^{k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k a_k (z - z_0)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}. \end{aligned}$$

Se R^* é o raio de convergência da série do lado direito de (5.23), então:

$$R^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R. \quad \blacksquare$$

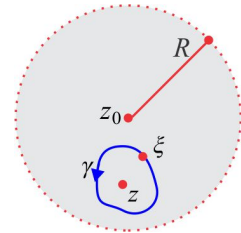


Figura 5.4:

TEOREMA 5.2.7 (Representação de Taylor) *Seja $w = f(z)$ uma função analítica em uma região contendo o disco $D_R: |z - z_0| < R$. Dado z no disco D_R , então:*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + E_n,$$

sendo

$$E_n = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0|=r} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad 0 < r < R,$$

com $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Dado z , com $|z - z_0| = r_1 < r$, seja $w = \frac{z - z_0}{\xi - z_0}$. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \left(\frac{1}{1 - w} \right) \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \left(1 + w + w^2 + \cdots + w^n + \frac{w^{n+1}}{1 - w} \right) \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \left[1 + w + w^2 + \cdots + w^n + \frac{(z - z_0)^{n+1}}{(\xi - z)(\xi - z_0)^n} \right]. \end{aligned}$$

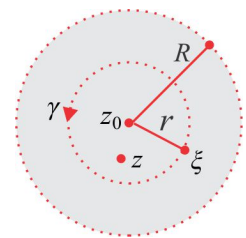


Figura 5.5:

Se γ é o arco $|z - z_0| = r$, obtemos da Fórmula integral de Cauchy:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} + \frac{f(\xi)(z - z_0)}{(\xi - z_0)^2} + \cdots + \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right] d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{f(\xi)(z - z_0)^{n+1}}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n+1}} \right] d\xi \\ &= f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + E_n, \end{aligned}$$

$$\text{onde } E_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{f(\xi)(z - z_0)^{n+1}}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n+1}} \right] d\xi.$$

Para concluir, resta-nos provar que $\lim E_n = 0$, com $n \rightarrow \infty$. De fato, se $M = \max_{|\xi - z_0|=r} |f(\xi)|$, temos:

$$|E_n| \leq \frac{|z - z_0|^{n+1}}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{M |d\xi|}{|\xi - z|^{n+1}}$$

e, considerando que $|\xi - z| = |\xi - z_0 + z_0 - z| \geq |\xi - z_0| - |z - z_0| = r - r_1$, encontramos:

$$|E_n| \leq \frac{r_1^{n+1} M}{2\pi} \frac{L(\gamma)}{(r - r_1)^{n+1}} = \frac{r_1 M}{r - r_1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^n \rightarrow 0, \quad \text{com } n \rightarrow \infty. \quad \blacksquare$$

COROLÁRIO 5.2.8 Nas condições do Teorema 5.2.7 temos a seguinte representação em série de Taylor para a função f :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R. \quad \blacksquare \quad (5.24)$$

EXEMPLO 5.2.9 (Série Geométrica) No disco $|z| < 1$, é válida a representação:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

EXEMPLO 5.2.10 (Função Exponencial) Em qualquer $z \in \mathbb{C}$, temos que:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

EXEMPLO 5.2.11 (Função Seno) Podemos usar a representação de $\exp(z)$ para obter a série de $f(z) = \text{sen } z$. Para isto, recordemos que $i^{2k+1} = (-1)^k i$, de modo que:

$$\text{sen}(z) = \frac{1}{2i} [e^{iz} - e^{-iz}] = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{i^n - (-i)^n}{n!} \right] z^n = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2i(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Assim,

$$\text{sen } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

EXEMPLO 5.2.12 (Função Cosseno) Considerando, agora, que $\cos z = \frac{1}{2} [e^{iz} + e^{-iz}]$ e procedendo como no Exemplo 5.2.11, encontramos:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

EXEMPLO 5.2.13 Usando a série do Exemplo 5.2.12, obtemos:

(i) $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos z}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2!} z - \frac{1}{4!} z^3 + \frac{1}{6!} z^5 - \frac{1}{8!} z^7 + \dots \right) = 0.$

(ii) $\cosh z = -i \cos(iz) = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (iz)^{2n}}{(2n)!} = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (i)^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = -i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$

TEOREMA 5.2.14 (Representação de Laurent) *Suponhamos que a função $w = f(z)$ seja analítica no anel $D : r < |z - z_0| < R$ e nos contornos orientados $\gamma_R : |z - z_0| = R$ e $\gamma_r : |z - z_0| = r$. Dado z no anel D , então:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}, \quad (5.25)$$

onde os coeficientes a_n e b_n são dados por:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad e \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (5.26)$$

Antes de procedermos com a demonstração do Teorema de Laurent, vejamos alguns comentários e exemplos. A representação (5.25) é a Série de Laurent da função f em torno da singularidade $z = z_0$ e nela destacamos:

- (i) **Parte Analítica ou Regular de f :** a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, de termos com expoentes positivos.
- (ii) **Parte Principal ou Singular de f :** a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$, de termos com expoentes negativos.
- (iii) Se $f(z)$ é analítica no disco $D_R : |z - z_0| < R$, então $b_n = 0$, $\forall n$, e a série de Laurent de f se reduz à série de Taylor (5.24). De fato, $b_n = \frac{1}{2\pi i} \int f(z) (z - z_0)^{n-1} dz = 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$
- (iv) Se $f(z)$ é analítica no anel $0 < |z - z_0| < R$, então o raio r pode ser considerado suficientemente pequeno e a representação (5.25) será válida em $0 < |z - z_0| < R$.
- (v) O coeficiente b_1 da Parte Principal é o **Resíduo** de $f(z)$ em z_0 e anota-se: $b_1 = \text{Res}(f; z_0)$. O que é o Resíduo de fato? Quando uma função $f(z)$ é analítica num domínio D , exceto na singularidade isolada z_0 , interior ao domínio D , a integral de $f(z)$ ao longo do contorno $\gamma : |z - z_0| = \delta$, contido em D , pode não ser zero. Se fizermos $\mathcal{R} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$, teremos:

$$\oint_{\gamma} \left[f(z) - \frac{\mathcal{R}}{z - z_0} \right] dz = \oint_{\gamma} f(z) dz - \mathcal{R} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{\gamma} f(z) dz - 2\pi i \mathcal{R} = 0.$$

Esta é a razão de \mathcal{R} ser denominado resíduo de $f(z)$ no ponto z_0 . Se integrarmos a equação (5.25) sobre o contorno γ , considerando que:

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^m dz = 0, \quad m \in \mathbb{Z}, m \neq -1 \quad e \quad \int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i, \quad (5.27)$$

chegaremos a:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz + \oint_{\gamma} \frac{b_1}{z - z_0} dz + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \oint_{\gamma} (z - z_0)^{-n} dz = 2\pi i b_1$$

de onde resulta que $b_1 = \mathcal{R}$.

O Resíduo de $f(z)$ corresponde à parcela que deve ser retirada da parte principal de f para que:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

(vi) Os integrandos que figuram nas expressões (5.26) são analíticos em qualquer contorno γ simples, fechado e regular por partes, contido no anel D e envolvendo o ponto z_0 , e pode ser usado no cálculo dos coeficientes a_n e b_n .

(vii) A série de Laurent (5.25) pode ser expressa sob a forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n, \quad \text{sendo} \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

(viii) A representação (5.25) de $f(z)$ em série de Laurent no anel D é única. De fato, se fosse

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \quad \text{e} \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R,$$

então, dado $\gamma : |z - z_0| = \delta$, $r < \delta < R$, teríamos:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{\gamma} (z - z_0)^{n-k-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \int_{\gamma} (z - z_0)^{n-k-1} dz, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

e usando (5.27), encontramos $2\pi i A_k = 2\pi i B_k$, isto é, $A_k = B_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, comprovando a unicidade da representação (5.25).

EXEMPLO 5.2.15 A função $f(z) = \frac{1}{(z - 2)^2}$ já está desenvolvida em série de Laurent em torno de $z = 2$. Neste caso, temos:

(i) $a_n = 0$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

(ii) $b_2 = 1$ e $b_n = 0$, $n = 1, 3, 4, 5, \dots$

Além disso, $\text{Res}(f; 2) = b_1 = 0$.

EXEMPLO 5.2.16 No anel $0 < |z| < \infty$, a série de Laurent, em torno de $z = 0$, de $f(z) = e^z/z^3$ é:

$$\frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots$$

onde vemos que $\text{Res}(f; 0) = 1/2$.

EXEMPLO 5.2.17 Vamos calcular $\text{Res}(f; 0)$ e $\text{Res}(f; i)$ para a função $f(z) = \frac{1}{z(z-i)}$.

(i) Para identificar o valor de $\text{Res}(f; 0)$ olhamos a série de Laurent de f em torno de $z = 0$, no anel $0 < |z| < 1$. A partir do Exemplo 5.2.9, obtemos:

$$f(z) = \frac{1}{z} \left[\frac{1}{-i(1-z/i)} \right] = -\frac{1}{iz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^n} = -\left(\frac{1}{iz} + \frac{1}{i^2} + \frac{z}{i^3} + \dots \right)$$

e daí resulta $\text{Res}(f; 0) = b_1 = -1/i = i$.

(ii) O valor de $\text{Res}(f; i)$ aparece no desenvolvimento em torno de $z = i$, no anel $0 < |z-i| < 1$.

Usando mais uma vez a série geométrica, encontramos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-i} \left[\frac{1}{i+(z-i)} \right] = \left(\frac{1}{z-i} \right) \frac{1}{i \left[1 + \left(\frac{z-i}{i} \right) \right]} = \left(\frac{-i}{z-i} \right) \frac{1}{1 + \left(\frac{z-i}{i} \right)} \\ &= \frac{-i}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-i)^n}{i^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (z-i)^{n-1}}{i^{n-1}}. \end{aligned}$$

O coeficiente b_1 aparece na parcela correspondente a $n = 0$, isto é, $\text{Res}(f; i) = b_1 = -i$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEROREMA DE LAURENT

A partir da relação (1.5), com $w = \frac{z-z_0}{\xi-z_0}$, obtemos:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z} = \frac{f(\xi)}{\xi-z_0-(z-z_0)} = \frac{f(\xi)}{\xi-z_0} \left(\frac{1}{1-w} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{f(\xi)(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}} + \frac{f(\xi)(z-z_0)^{n+1}}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{n+1}} \quad (5.28)$$

e procedendo de forma similar, agora com $w = \frac{\lambda-z_0}{z-z_0}$, encontramos:

$$-\frac{f(\lambda)}{\lambda-z} = \frac{f(\lambda)}{z-z_0} \left(\frac{1}{1-w} \right) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(\lambda)(\lambda-z_0)^{k-1}}{(z-z_0)^k} + \frac{f(\lambda)(\lambda-z_0)^{n+1}}{(z-\lambda)(z-z_0)^{n+1}}. \quad (5.29)$$

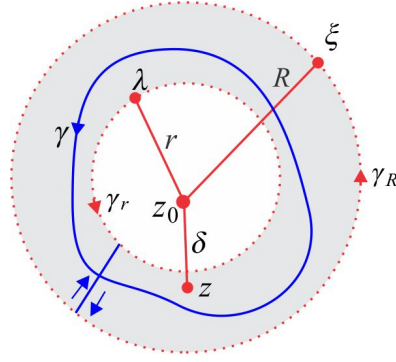


Figura 5.6:

Considerando os arcos $\gamma_R : |z - z_0| = R$ e $\gamma_r : |z - z_0| = r$, ilustrados na Figura 5.6 segue da Fórmula Integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\lambda) d\lambda}{\lambda - z}$$

e usando as relações (5.28) e (5.29), deduzimos que:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^n \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi) (z - z_0)^k d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}} + E_n + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n+1} \int_{\gamma_r} \frac{f(\lambda) (\lambda - z_0)^{k-1} d\lambda}{(z - z_0)^k} + F_n$$

isto é:

$$f(z) = \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{n+1} b_k (z - z_0)^{-k} + E_n + F_n \tag{5.30}$$

onde $E_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{(z - z_0)^{n+1} f(\xi) d\xi}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n+1}}$ e $F_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\lambda) (\lambda - z_0)^{n+1} d\lambda}{(z - \lambda)(z - z_0)^{n+1}}$ e os coeficientes a_k e b_k

estão definidos em (5.26).

Para mostrar que E_n e F_n aproximam-se de zero, com $n \rightarrow \infty$, representemos por M o máximo de $|f(z)|$ no compacto $\bar{D} : r \leq |z - z_0| \leq R$, e notemos que:

(i) Como $|\xi - z| \geq |\xi - z_0| - |z - z_0| = R - \delta$, deduzimos que:

$$|E_n| \leq \frac{M\delta^{n+1}}{2\pi R^{n+1}} \int_{\gamma_R} \frac{|d\xi|}{|\xi - z|} \leq \frac{M}{2\pi} \left(\frac{\delta}{R}\right)^{n+1} \frac{2\pi R}{R - \delta} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(ii) Agora, usando a relação $|\lambda - z| \geq |z - z_0| - |\lambda - z_0| = \delta - r$, deduzimos que:

$$|F_n| \leq \frac{Mr^{n+1}}{2\pi\delta^{n+1}} \int_{\gamma_r} \frac{|d\lambda|}{|\lambda - z|} \leq \frac{M}{2\pi} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{n+1} \frac{2\pi r}{\delta - r} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Para chegarmos à relação (5.25) fazemos em (5.30), $n \rightarrow \infty$. ■

EXEMPLO 5.2.18 No domínio $D : |z - 1| > 0$, deixe-nos considerar um contorno γ , simples, fechado e regular, envolvendo o ponto $z_0 = 1$, e seja $f(z) = e^{-z}(z-1)^{-2}$. Vamos mostrar que:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1).$$

De fato, da Fórmula Integral de Cauchy, resulta que:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \frac{d}{dz} [e^{-z}]_{z=1} = 2\pi i (-1/e)$$

e, por outro lado:

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{(z-1)^2} e^{-(z-1)} = \frac{e^{-1}}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n!}. \quad (5.31)$$

Segue de (5.31) que $\operatorname{Res}(f; 1) = b_1 = -1/e$ e, sendo assim, $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1) = -2\pi i/e$.

EXEMPLO 5.2.19 A partir da série de Laurent, vamos calcular $\operatorname{Res}(f; 0)$, sendo $f(z) = \exp(1/z^2)$.

Ora:

$$\exp(1/z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} + \cdots + \frac{1}{n! z^{2n}} + \cdots$$

de onde resulta que $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$. Como veremos adiante, se γ é qualquer contorno admissível, envolvendo a origem, então:

$$\int_{\gamma} \exp(1/z^2) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0) = 0.$$

EXEMPLO 5.2.20 Dois desenvolvimentos de Laurent em potências de z para $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$.

(i) No anel $D : 0 < |z| < 1$, temos:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k-2}. \quad (5.32)$$

Observando a série (5.32) vemos que $\operatorname{Res}(f; 0) = b_1 = 1$.

(ii) No domínio $|z| > 1$, temos:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{-1}{z(1-1/z)} = -\frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} (1/z)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-3} \quad (5.33)$$

Note que na série (5.33) o coeficiente $b_1 = 0$, mas este não é o valor do resíduo de f em $z_0 = 0$.

OBSERVAÇÃO 5.2.21 Se $w = \frac{1}{z - z_0}$, a parte principal da série de Laurent de $f(z)$ pode ser olhada como uma série de Taylor (de potências de w) e se esta série tem raio de convergência $R^* > 0$, então ela convergirá em todo ponto z , tal que $|w| < R^*$, isto é, no domínio $|z - z_0| > \frac{1}{R^*}$. Como consequência do Corolário 5.2.6 deduzimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ define uma função analítica no domínio $|z - z_0| > 1/R^*$.

EXEMPLO 5.2.22 Vamos desenvolver a função $f(z) = \frac{z - 1}{z^2}$ em série de Taylor no disco $|z - 1| < 1$ e em Série de Laurent no domínio $|z - 1| > 1$, como ilustrado na Figura 5.7

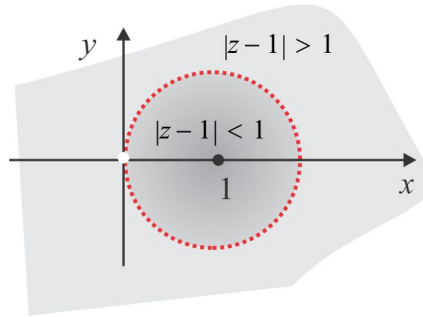


Figura 5.7:

(i) A Série de Taylor no disco $|z - 1| < 1$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z - 1}{z^2} = (z - 1) \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{z} \right) = -(z - 1) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1 + (z - 1)} \right] \\ &= -(z - 1) \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - 1)^k \right] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k (z - 1)^k. \end{aligned}$$

(ii) A Série de Laurent no domínio $|z - 1| > 1$.

$$\begin{aligned} f(z) &= -(z - 1) \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \right) = -(z - 1) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1 + (z - 1)} \right] \\ &= -(z - 1) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z - 1} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{z - 1}\right)} \right] = -(z - 1) \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z - 1)^{-k-1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k + 1) (z - 1)^{-k-1}. \end{aligned}$$

EXEMPLO 5.2.23 Vamos desenvolver a função $f(z) = 1/z^3$ em série de potências de $z + 2$, identificando o disco de convergência. Temos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^3} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{z} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{1}{2 - (z + 2)} \right] = -\frac{1}{4} \frac{d^2}{dz^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z + 2)^k}{2^k} \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)(z+2)^{k-2}}{2^k} = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)(z+2)^{k-2}}{2^{k+2}}. \end{aligned}$$

O disco de convergência é $D : |z + 2| < 2$.

5.2.2 Produto & Quociente de Séries de Potências

Consideremos as funções $f : D_{R_1} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : D_{R_2} \rightarrow \mathbb{C}$, definidas por:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{e} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k. \quad (5.34)$$

O **Produto de Cauchy** das séries (5.34) é, por definição, a série $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, onde:

$$c_0 = a_0 b_0, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \quad \dots \quad (5.35)$$

e, de forma genérica, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. No disco $D_R = D_{R_1} \cap D_{R_2}$, a série produto

converge absoluta e uniformemente para $f(z)g(z)$ e se $g(z) \neq 0$ em D_{R_2} , a função analítica $q(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ pode ser desenvolvida em série de Taylor do modo seguinte:

$$\begin{aligned} q(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \\ \Leftrightarrow d_0 b_0 = a_0, \quad d_0 b_1 + d_1 b_0 = a_1, \quad d_0 b_2 + d_1 b_1 + d_2 b_0 = a_2, \quad \dots \end{aligned}$$

Logo, $q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$, sendo $|z - z_0| < R_2$ e $d_0 = a_0/b_0$, $d_1 = a_1/b_0 - a_0 b_1/b_0^2$, \dots .

EXEMPLO 5.2.24 Vamos representar a função $q(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}$ em série de potências de z , no anel $0 < |z| < \pi$. Temos

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] z^k}{k!} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2z}{1!} + \frac{2z^3}{3!} + \frac{2z^5}{5!} + \dots \right) = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

e, assim, obtemos:

$$q(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1/z^2}{z(1 + z^2/3! + z^4/5! + z^6/7! + \dots)} = \frac{1}{z^3} \left[\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + z^6/7! + \dots} \right]. \quad (5.36)$$

Designando

$$\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + z^6/7! + \dots} = A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots \quad (5.37)$$

segue de (5.36) que $\text{Res}(q; 0) = A_2$, tendo em vista que:

$$q(z) = \frac{A_0}{z^3} + \frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{z} + A_3 + A_4z + \dots$$

e para calcular o coeficiente A_2 usamos o produto de Cauchy das séries em (5.37) e obtemos:

$$(A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots) \left(1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots \right) = 1,$$

isto é:

$$A_0 + A_1z + \left(\frac{A_0}{3!} + A_2 \right) z^2 + \left(\frac{A_1}{3!} + A_3 \right) z^3 + \dots = 1$$

e daí resulta $A_0 = 1$ e $A_2 = -1/6$. Em particular, temos $\text{Res}(q; 0) = -1/6$ e como veremos adiante:

$$\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 \sinh z} = 2\pi i \text{Res}(q; 0) = -\pi i/3.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.2

1. Em cada caso, determine o raio de convergência da série.

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(z+i)^k}{(2i)^{k-1}} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\text{Log}(ik)} \quad (c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{2i}(z-\pi)^k}{2^k} \quad (d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k z^k}{2^{ik}} \quad (e) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^k}{\sqrt{3ik}}.$$

2. Calcule o valor da soma infinita $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi i)^k}{k!}$.

3. Represente a função $f(z) = (1+z)^{-1}$ em série de potências de z . Indique o domínio de convergência.

4. A partir do desenvolvimento de Maclaurin

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k, \quad |z| < 1,$$

obtenha a representação:

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, \quad |z-1| < 1.$$

5. Mostre que:

$$(a) \frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(z+1)^n, \quad \text{no disco } |z+1| < 1.$$

$$(b) \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(z-2)^n}{2^n}, \quad \text{no disco } |z-2| < 2.$$

6. Desenvolva $\cos z$ em série de Taylor em torno de $z_0 = \pi/2$ e $\sinh z$ em torno de $z_0 = \pi i$. Com o resultado, deduza que:

$$(a) \lim_{z \rightarrow \pi/2} \frac{\cos z}{z - \pi/2} = -1 \quad \text{e} \quad (b) \lim_{z \rightarrow \pi i} \frac{\sinh z}{z - \pi i} = -1.$$

7. No disco $0 < |z| < 4$, mostre que

$$\frac{1}{4z - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}.$$

8. No disco $0 < |z-1| < 2$, represente a função $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ em série de potências de $z-1$. Idem para a função $g(z) = \frac{1}{1-z}$ em série de potências de $z-i$.

9. Represente a função $\text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ em série de potências de z .

10. Em cada caso, desenvolva a função $w = f(z)$ em série de Laurent na região $0 < |z| < r$.

$$(a) w = \frac{e^{-z}}{z^3} \quad (b) w = \frac{e^{1/z^2}}{z^6} \quad (c) w = \frac{\cos(2z)}{z^2} \quad (d) w = \frac{1}{z^2(z-3)}.$$

11. Usando derivação termo a termo, prove que:

$$(a) \frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{n-1} \quad (b) \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n-1) z^{n-2}.$$

12. Use a série de Taylor de $\sin z$ e mostre que a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z \neq 0$ e $f(0) = 1$, é inteira.

13. Dê dois desenvolvimentos em série de Laurent, em potências de z , para a função $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$ e especifique onde os desenvolvimentos são válidos. A unicidade de representação em série de Laurent é violada?

14. Considere a função $f(z) = \frac{z-1}{z^2}$.

- (a) Obtenha o desenvolvimento de $f(z)$ em série de Taylor em torno de $z_0 = 1$.
- (b) Represente $f(z)$ em série de Laurent, no domínio $|z - 1| > 1$.
- (c) Qual o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$, no disco $|z| > 0$?

15. Suponha que $f(z)$ e $g(z)$ sejam funções analíticas em z_0 e que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$.

Prove a **REGRA DE L'HÔPITAL**:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Se ocorrer $f'(z_0) = g'(z_0) = 0$ e $g''(z_0) \neq 0$, então:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f''(z_0)}{g''(z_0)}.$$

16. Se $f(z)$ é analítica em z_0 e $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k)}(z_0) = 0$, mostre que a função $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$g(z) = \begin{cases} f(z)(z - z_0)^{-k-1}, & \text{se } z \neq z_0 \\ f^{(k+1)}(z_0) [(k+1)!]^{-1}, & \text{se } z = z_0 \end{cases}$$

é analítica em z_0 .

17. Sabendo que $g(z) = \text{sen}(z^2)$, use a série de Maclaurin de $g(z)$ e mostre que:

$$(2 + i)g^{(31)}(0) + (4 - 3i)g^{(40)}(0) = 0.$$

18. Calcule o valor de $f''(0)$, sabendo que a função analítica $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ assume, nos pontos do contorno $\gamma : |z| = 2$, os valores $f(z) = (4z)^{-1} \text{sen}(2z)$.

19. **OS ZEROS DE UMA FUNÇÃO ANALÍTICA** Recorde-se que um ponto z_0 denomina-se um zero de ordem m de uma função analítica $f(z)$ quando:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

(a) Mostre que z_0 é um zero de ordem m de $f(z)$ se, e somente se, $(z - z_0)^{-m} f(z)$ tem limite finito e diferente de zero, com $z \rightarrow z_0$.

(b) Suponha que z_0 seja o único zero de uma função analítica $f : D \rightarrow \mathbb{C}$. Se γ é um contorno em D , simples, fechado e regular, envolvendo o ponto z_0 , com orientação positiva, mostre que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \tag{5.38}$$

coincide com a ordem do zero em questão. O número complexo em (5.38) é o *Resíduo Logarítmico* de f em relação a γ . Esta denominação deve-se ao fato do integrando ser a derivada de $\text{Log}(f(z))$.

5.3 Singularidades & Pólos

Antes de formalizar o conceito de **Singularidade**, deixe-nos considerar alguns casos como motivação.

- (i) No disco $D : |z| < R$ a função $f(z) = \exp(1/z)$ deixa de ser analítica apenas no ponto $z = 0$.
- (ii) A função $g(z) = |z + i|^2$ é derivável apenas no ponto $z = -i$.
- (iii) Dado um ponto z_0 no domínio $D : r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$, em qualquer anel $0 < |z - z_0| < R$ existem pontos onde a função $h(z) = \text{Log } z$ não é analítica.

DEFINIÇÃO 5.3.1 Diz-se que um ponto z_0 é uma **Singularidade do Tipo I**, ou **Singularidade Isolada**, de uma função $f(z)$ quando $f(z)$ for analítica em alguma vizinhança $V_\delta(z_0)$, exceto em z_0 .

EXEMPLO 5.3.2 O ponto $z_0 = 0$ é uma singularidade isolada da função $f(z) = \exp(1/z)$. Já a função $f(z) = \frac{1}{z-i}$ tem uma singularidade isolada no ponto $z = i$.

EXEMPLO 5.3.3 No domínio $D : r > 0, -\pi < \theta \leq \pi$, a função $f(z) = \text{Log } z$ não tem singularidade isolada.

DEFINIÇÃO 5.3.4 O ponto z_0 denomina-se **Singularidade do Tipo II**, ou simplesmente **Singularidade**, de uma função $f(z)$ quando:

- (i) f não é analítica em z_0 .
- (ii) Em qualquer vizinhança de z_0 existe ao menos um ponto z no qual f é analítica.

EXEMPLO 5.3.5 Os pontos do corte $L = \{(x, 0) : x \leq 0\}$ são singularidades da função $f(z) = \text{Log } z$.

EXEMPLO 5.3.6 A função $f(z) = |z - 2i|^2$ não tem singularidade e, muito menos, singularidade isolada. Ela é derivável apenas em $z = 2i$.

EXEMPLO 5.3.7 A função $f(z) = \frac{z^2 + \operatorname{sen} z}{z^3(z^2 + 4)}$ tem singularidades isoladas nos pontos $z = 0$ e $z = \pm 2i$.

EXEMPLO 5.3.8 A função $g(z) = [\operatorname{sen}(\pi/z)]^{-1}$ possui uma infinidade de singularidades isoladas nos pontos $z_k = 1/k$ $k = 1, 2, 3, \dots$. Além disso, $z = 0$ é uma singularidade (não isolada) de $g(z)$.

OBSERVAÇÃO 5.3.9 Se z_0 é uma singularidade isolada de $f(z)$, então:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

onde os coeficientes a_k e b_k são dados por (5.26) e há três casos a considerar:

(i) A parte principal $\sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}$ tem uma infinidade de parcelas não nulas. Neste caso, a singularidade isolada z_0 é dita **Essencial**.

(ii) Existe um índice m , tal que:

$$b_m \neq 0 \quad e \quad b_k = 0, \quad \forall k \geq m + 1.$$

Neste caso, a singularidade isolada z_0 é denominada um **Pólo de ordem m** .

(iii) A parte principal é nula, isto é, $b_1 = b_2 = \dots = 0$. Neste caso, temos:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

e a singularidade isolada z_0 é apenas aparente e pode ser removida, já que a série que representa $f(z)$ define uma função analítica em $|z - z_0| < R$. A singularidade diz-se **Removível**.

EXEMPLO 5.3.10 A função $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ tem um pólo de ordem $m = 3$ em $z_0 = 0$ e $\operatorname{Res}(f; 0) = -1/6$.

De fato:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

onde vemos que $b_1 = -1/3!$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$ e $b_k = 0$, $\forall k \geq 4$. Além disso, $\operatorname{Res}(f; 0) = b_1 = -1/6$.

EXEMPLO 5.3.11 A função $f(z) = \exp(1/z^2)$ tem uma singularidade essencial em $z_0 = 0$. De fato:

$$f(z) = \exp(1/z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^{2k}} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \dots$$

onde vemos que $b_{2k} \neq 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, e a parte principal tem uma infinidade de parcelas não nulas.

EXEMPLO 5.3.12 A origem $z_0 = 0$ é uma singularidade removível das seguintes funções:

$$g(z) = \frac{\cos z - 1}{z}, \quad h(z) = \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} \quad e \quad p(z) = \frac{1 - \exp(\lambda z)}{z}.$$

De fato, basta observar que as séries que representam essas funções:

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k-1}}{(2k)!}, \quad h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{k+1}, \quad p(z) = -\lambda - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k z^{k-1}}{k!},$$

têm parte principal nula e elas admitem continuação analítica ao ponto $z_0 = 0$, considerando:

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0, \quad h(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = 1 \quad e \quad p(0) = \frac{1 - \exp(\lambda z)}{z} = -\lambda.$$

LEMA 5.3.13 Uma singularidade isolada z_0 de $g(z)$ é removível se, e só se, $g(z)$ é limitada em alguma vizinhança de z_0 .

PROVA Se z_0 é uma singularidade removível de $g(z)$, então

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

de onde segue que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = a_0$ e, por conseguinte, existe $\delta > 0$, tal que $|g(z)| < 1 + |a_0|$, $z \in V_\delta(z_0)$.

Reciprocamente, se $|g(z)| \leq M$, $z \in V_\delta(z_0)$, então para cada $r < \delta < R$, temos:

$$|b_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|g(z)| dz}{|z - z_0|^{-k+1}} \leq \frac{M}{2\pi} r^{k-1} (2\pi r) = Mr^k. \quad (5.39)$$

Fazendo $r \rightarrow 0$ em (5.39), deduzimos que $b_k = 0$. ■

PROPOSIÇÃO 5.3.14 Para que uma singularidade isolada z_0 seja um pólo de ordem m da função $f(z)$ é necessário e suficiente que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ seja finito e diferente de zero.

DEMONSTRAÇÃO Se z_0 é um pólo de ordem m , então $b_m \neq 0$ e $b_k = 0$, $k \geq m + 1$, e, portanto:

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + b_{m-2}(z - z_0)^2 + \cdots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m}. \quad (5.40)$$

Tomando o limite em (5.40), com $z \rightarrow z_0$, obtemos $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = b_m \neq 0$. Reciprocamente, se

$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = w$, $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, então z_0 é uma singularidade removível da função complexa $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$, já que $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w$ existe e é finito. Assim:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^m} \left[w + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{w}{(z - z_0)^m} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{c_2}{(z - z_0)^{m-2}} + \dots + c_m + c_{m+1}(z - z_0) + \dots \end{aligned}$$

onde observamos que $b_m = w$ e $b_k = 0$, $k \geq m + 1$. ■

EXEMPLO 5.3.15 A função $f(z) = (\text{Log } z)^{-2}$ tem um pólo de ordem $m = 2$ na singularidade $z_0 = 1$. De fato, basta observar que:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)^2}{(\text{Log } z)^2} = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z - 1)}{\text{Log } z} = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z - 1}{1/z} = 1.$$

TEOREMA 5.3.16 (Cálculo do Resíduo em um Pólo) Seja z_0 uma singularidade isolada de $f(z)$.

(i) Se z_0 é removível, então $\text{Res}(f; z_0) = 0$.

(ii) Se z_0 é um pólo simples (de ordem $m = 1$), então $\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$.

(iii) Se z_0 é um pólo de ordem $m > 1$, então $\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$.

DEMONSTRAÇÃO Se z_0 é uma singularidade removível, segue da definição que $b_k = 0$, $\forall k$, e, em particular, $b_1 = 0$. Para provar a parte (ii), notamos que se z_0 é um pólo simples, então:

$$(z - z_0) f(z) = b_1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+1} \tag{5.41}$$

e, tomando o limite em (5.41) com $z \rightarrow z_0$, encontramos $b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$. Finalmente, se z_0 é um pólo de ordem $m > 1$, temos:

$$(z - z_0)^m f(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+m} \tag{5.42}$$

e derivando $(m - 1)$ -vêzes a equação (5.42) encontramos:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] = (m - 1)! b_1 + \sum_{k=0}^{\infty} (m + k)(m + k - 1) \dots (k + 1) k a_k (z - z_0)^{k+1}. \tag{5.43}$$

Se em (5.43) fizermos $z \rightarrow z_0$, teremos:

$$b_1 = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]. \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 5.3.17 Se $f(z) = (\operatorname{Log} z)^{-1}$, então:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{\operatorname{Log} z} = (\mathbf{L'H\acute{o}pital}) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1/z} = 1.$$

Daí segue que $z_0 = 1$ é um pólo simples de $f(z)$ e do Teorema 5.3.16 resulta $\operatorname{Res}(f; 1) = 1$.

EXEMPLO 5.3.18 Vimos no Exemplo 5.3.15 que a função $f(z) = (\operatorname{Log} z)^{-2}$ tem um pólo de ordem $m = 2$ no ponto $z_0 = 1$ e pelo Teorema 5.3.16, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; 1) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1)^2}{(\operatorname{Log} z)^2} \right] = 2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)\operatorname{Log} z - z + 2 - 1/z}{(\operatorname{Log} z)^3} \\ &= (\mathbf{L'H\acute{o}pital}) = 2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z\operatorname{Log} z - 1 + 1/z}{3(\operatorname{Log} z)^2} \\ &= (\mathbf{L'H\acute{o}pital}) = 2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z\operatorname{Log} z + z - 1/z}{6\operatorname{Log} z} \\ &= (\mathbf{L'H\acute{o}pital}) = 2 \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Log} z + 2 + 1/z^2}{6/z} = 1. \end{aligned}$$

EXEMPLO 5.3.19 A origem é um pólo de ordem 2 da função $f(z) = (z \sinh z)^{-1}$ e $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$. De fato:

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{2z}{e^z - e^{-z}} \right] = (\mathbf{L'H\acute{o}pital}) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{2}{e^z + e^{-z}} \right] = 1$$

de onde segue que a origem é um pólo de ordem 2. O resíduo na origem é dado por:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} [z^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{\sinh z} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\sinh z - z \cosh z}{(\sinh z)^2} \right] = (\mathbf{L'H\acute{o}pital}) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{-z}{2 \cosh z} \right] = 0. \end{aligned}$$

EXEMPLO 5.3.20 Para determinar o valor de $\operatorname{Res}(f; 0)$, sendo $f(z) = z^2 \exp(1/z^3)$, inicialmente devemos investigar a natureza da singularidade $z_0 = 0$. Temos:

$$z^2 \exp(1/z^3) = z^2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^7} + \frac{1}{4!z^{10}} + \dots$$

onde vemos que $z_0 = 0$ é uma singularidade essencial de $f(z)$ e o Teorema 5.3.16 não se aplica. Segue diretamente da série que $\operatorname{Res}(f; 0) = 1$.

EXEMPLO 5.3.21 A função $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)^2}$ tem dois pólos simples nos pontos $z = \pm 3i$ e

dois pólos de ordem 2 nos pontos $z = \pm 2i$. De acordo com o Teorema 5.3.16, temos:

$$(i) \operatorname{Res}(f; 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} [(z - 3i) f(z)] = \lim_{z \rightarrow 3i} \left[\frac{z^2}{(z + 3i)(z^2 + 4)^2} \right] = \frac{-9}{6i(-5)^2} = \frac{3i}{50}.$$

$$(ii) \operatorname{Res}(f; 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} [(z - 2i)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z^2 + 9)(z + 2i)^2} \right]$$

$$= \lim_{z \rightarrow 2i} \left[\frac{2z(z^2 + 9)(z + 2i) - z^2(4z^2 + 4iz + 18)}{(z^2 + 9)^2(z + 2i)^3} \right] = -\frac{13i}{200}.$$

5.3.1 Quociente de Funções Analíticas

Dada uma função $g(z)$, analítica no disco $D_R : |z - z_0| < R$, o ponto z_0 denominar-se-á um **Zero de Ordem k** da função g , quando:

$$g(z_0) = g'(z_0) = g''(z_0) = \dots = g^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{e} \quad g^{(k)}(z_0) \neq 0$$

Se $g^{(k)}(z_0) = 0, \forall k = 0, 1, 2, \dots$, segue, do Teorema de Taylor, que g é identicamente nula no disco D_R .

LEMA 5.3.22 *Os zeros de uma função analítica são pontos isolados.*

PROVA Se z_0 é um zero de ordem k de certa função $g(z)$, analítica no disco $D_R : |z - z_0| < R$, então em cada ponto z de D_R , temos:

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k f(z),$$

onde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!} (z - z_0)^n$ é analítica¹¹ no disco D_R . Temos que $f(z_0) = g^{(k)}(z_0) \neq 0$ e, por continuidade, existe $\delta > 0$, tal que $f(z) \neq 0$, em todo ponto z da vizinhança $V_\delta(z_0)$. Logo:

$$g(z) = (z - z_0)^k f(z) \neq 0, \quad \forall z \in V_\delta(z_0), \quad z \neq z_0,$$

isto é, na vizinhança $V_\delta(z_0)$ o único zero da função g é precisamente z_0 . ■

DOIS ATALHOS PARA O CÁLCULO DO RESÍDUO

¹¹Uma série de potências representa uma função analítica no seu disco de convergência.

Sejam $p(z)$ e $q(z)$ funções analíticas no domínio D e consideremos a função f , definida por:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad z \in D, \quad q(z) \neq 0.$$

Os zeros da função $q(z)$, que são isolados, são precisamente as singularidades isoladas da função $f(z)$.

ATALHO 1: Se $q(z_0) = 0$, $p(z_0) \neq 0$ e $q'(z_0) \neq 0$, então o ponto z_0 é um pólo simples de $f(z)$ e:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad (5.44)$$

PROVA Basta observar que:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0) \frac{p(z)}{q(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[p(z) \cdot \frac{(z - z_0)}{q(z)} \right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

EXEMPLO 5.3.23 Os pontos $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ são pólos simples da função $f(z) = \cotg z$. Considerando $p(z) = \cos z$ e $q(z) = \sen z$, temos:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}, \quad q(z_k) = 0, \quad p(z_k) = q'(z_k) = (-1)^k \neq 0.$$

Assim, z_k é pólo simples de $f(z)$ e, além disso, $\operatorname{Res}(f; z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLO 5.3.24 A função $f(z) = \cos z (e^z - 1)^{-1}$ tem um pólo simples no ponto $z_0 = 0$. Neste caso, $p(z) = \cos z$ e $q(z) = e^z - 1$ e temos:

$$p(0) = q'(0) = 1, \quad q(0) = 0 \quad e \quad \operatorname{Res}(f; 0) = \frac{p(0)}{q'(0)} = 1.$$

ATALHO 2: Suponhamos que $q(z_0) = q'(z_0) = 0$ e que $p(z_0) \neq 0$ e $q''(z_0) \neq 0$. Então, z_0 é um pólo de ordem $m = 2$ e o resíduo de f em z_0 é dado por:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{2p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2p(z_0)q'''(z_0)}{[q''(z_0)]^2}. \quad (5.45)$$

PROVA Considerando que $q(z_0) = q'(z_0) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} p(z) &= p(z_0) + p'(z_0)(z - z_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \\ q(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \end{aligned}$$

e, portanto:

$$(z - z_0)^2 f(z) = \frac{p(z_0) + \frac{1}{1!}p'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!}p''(z_0)(z - z_0)^2 + \dots}{\frac{1}{2!}q''(z_0) + \frac{1}{3!}q'''(z_0)(z - z_0) + \dots}. \quad (5.46)$$

Assim:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^2 f(z) = \frac{p(z_0)}{\frac{1}{2!}q''(z_0)} \neq 0,$$

o que indica ser z_0 um pólo de ordem 2. Se representarmos o lado direito de (5.46) pela série

$$(z - z_0)^2 f(z) = A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \dots$$

teremos que $A_1 = \text{Res}(f; z_0)$ e, também:

$$\begin{cases} p(z_0) = \frac{1}{2!}q''(z_0)A_0 \\ p'(z_0) = \frac{1}{2!}q''(z_0)A_1 + \frac{1}{3!}q'''(z_0)A_0. \end{cases} \quad (5.47)$$

Resolvendo o sistema (5.47) encontramos (5.45).

EXEMPLO 5.3.25 Vamos usar o Atalho 2 para calcular o resíduo da função $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ no pólo $z_0 = 2$. Considerando $p(z) = 1$ e $q(z) = z(e^z - 1)$, temos:

$$p(z) \equiv 1 \Rightarrow p(0) = 1 \text{ e } p'(0) = 0.$$

$$q(z) = z(e^z - 1) \Rightarrow q(0) = 0.$$

$$q'(z) = e^z - 1 + ze^z \Rightarrow q'(0) = 0.$$

$$q''(z) = 2e^z + ze^z \Rightarrow q''(0) = 2.$$

$$q'''(z) = 3e^z + ze^z \Rightarrow q'''(0) = 3.$$

e, portanto, $z_0 = 0$ é um pólo de segunda ordem e:

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{2p'(z_0)}{q''(z_0)} - \frac{2p(z_0)q'''(z_0)}{[q''(z_0)]^2} = -\frac{1}{2}.$$

5.3.2 Comportamento Local

A título de ilustração, deixe-nos investigar o comportamento da função

$$f(z) = \exp(1/z), \quad z \neq 0,$$

sob dois aspectos:

(i) No domínio $\Omega_R : |z| > R$, com $R \rightarrow \infty$. Este será o *Comportamento no Infinito* da função f .

(ii) Nas proximidades da singularidade essencial $z_0 = 0$. Tal comportamento terá uma resposta no Teorema 5.3.29 de *Casorati-Weierstrass*.

COMPORTEAMENTO NO INFINITO

A imagem do domínio $\Omega_R : |z| > R$ pela transformação $z \mapsto 1/z$ é o anel $D_R : 0 < |w| < 1/R$, no qual a função $g(w) = f(1/w)$ é analítica e o comportamento de f , quando $R \rightarrow \infty$, isto é, quando $|z| \rightarrow \infty$, é estabelecido a partir do comportamento de g nas proximidades de $w = 0$, isto é, quando $w \rightarrow 0$. Temos:

$$g(w) = f(1/w) = \exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \dots, \quad a_n = \frac{1}{n!}$$

$$f(z) = g(1/z) = \exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots, \quad z \neq 0$$

e daí segue que $w_0 = 0$ é uma singularidade removível de $g(w)$ e $z_0 = \infty$ uma singularidade removível de $f(z)$. Isto motiva a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 5.3.26 Diz-se que $z_0 = \infty$ é uma singularidade isolada (removível, pólo ou essencial) de $f(z)$ se $w_0 = 0$ for uma singularidade de mesma natureza da função $g(w) = f(1/w)$.

No caso de $w_0 = 0$ ser um pólo de ordem k da função g , temos:

$$g(w) = b_k w^{-k} + b_{k-1} w^{-k-1} + \dots + b_1 w^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \quad b_k \neq 0$$

e com $z = 1/w$, encontramos:

$$f(z) = b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_1 z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$$

e $z_0 = \infty$ é um pólo de ordem k da função f . Uma análise semelhante é feita no caso em que $w_0 = 0$ é uma singularidade essencial de $g(w)$.

EXEMPLO 5.3.27 A função $f(z) = z^4 (1 + z^2)^{-1}$ tem uma singularidade essencial no infinito, porque $g(w) = f(1/w)$ tem uma singularidade essencial em $w_0 = 0$. Isto decorre da representação

$$g(w) = f(1/w) = \left(\frac{1}{w^4}\right) \frac{1}{1 + (1/w)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{-2n-4}$$

possuir uma infinidade de potências não nulas, com expoentes negativos.

COMPORTAMENTO EM UMA SINGULARIDADE ESSENCIAL

Ainda com a função $f(z) = \exp(1/z)$, fixado um número complexo w_0 (w_0 pode ser ∞), vamos construir uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \neq 0$, tal que:

$$z_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad f(z_n) \rightarrow w_0. \tag{5.48}$$

(i) Se $w_0 = \infty$, consideramos $z_n = 1/n$, e obtemos:

$$z_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad f(z_n) = e^n \rightarrow \infty = w_0.$$

(ii) Se $w_0 = 0$, consideramos $z_n = -1/n$, e encontramos:

$$z_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad f(z_n) = e^{-n} \rightarrow 0 = w_0.$$

(iii) Finalmente, se $w_0 = |w_0|e^{i\theta}$, com $0 < |w_0| < \infty$, considerando $z_n = [\ln |w_0| + i(\theta + 2n\pi)]^{-1}$, teremos:

$$z_n \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad f(z_n) = \exp[\log w_0] \rightarrow w_0.$$

LEMA 5.3.28 *Os pólos de $g(z)$ são precisamente os zeros da extensão holomorfa de $1/g(z)$ a algum disco $D_\delta : |z - z_0| < \delta$.*

PROVA Seja z_0 um pólo da função $g(z)$, que, por simplicidade, é suposto de ordem 1, isto é:

$$g(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots, \quad b_1 \neq 0.$$

No disco D_δ , a extensão holomorfa h de $1/g$ é definida por:

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{g(z)}, & z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)}, & z = z_0 \end{cases}$$

de modo que:

$$h(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{z - z_0}{b_1 + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + \dots} \right] = 0$$

o que mostra ser o ponto z_0 um zero de $h(z)$. Reciprocamente, se z_0 é um zero simples da extensão holomorfa e não nula $h(z)$, isto é, $h(z_0) = 0$ e $h'(z_0) \neq 0$, existe, pelo Lema 5.3.22, um $\delta > 0$, tal que:

$$h(z) \neq 0, \quad \text{no anel} \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

e, portanto:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{h(z)} = \frac{1}{h'(z_0)} \neq 0,$$

caracterizando, de acordo com o Proposição 5.3.14, z_0 como um pólo simples de $g(z)$. ■

TEOREMA 5.3.29 (Casorati-Weierstrass) *Seja f uma função analítica em um domínio D do plano \mathbb{C} , exceto na singularidade essencial z_0 . Dado um número complexo w_0 , podendo ser $w_0 = \infty$, existe uma sequência (z_n) em D , que satisfaz (5.48).*

DEMONSTRAÇÃO No caso $w_0 = \infty$, dado $M > 0$, considerando que a função f não é limitada no disco $D_{1/n} : |z - z_0| < 1/n$, podemos escolher, para cada n , um ponto z_n em $D_{1/n}$, tal que $|f(z_n)| > M$. Assim, $z_n \rightarrow z_0$ e $\lim |f(z_n)| = \infty$. Fixemos w_0 em \mathbb{C} e suponhamos que não exista uma tal sequência (z_n) satisfazendo (5.48). Sendo assim, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, tem-se:

$$|f(z) - w_0| > \varepsilon_0, \quad \forall z \in V_\delta(z_0), z \neq z_0.$$

Consequentemente, a função g definida no anel $0 < |z - z_0| < \delta$ por:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

é analítica e localmente limitada, já que $|g(z)| < 1/\varepsilon_0$. Do Lema (5.3.13) resulta que z_0 é uma singularidade removível de $g(z)$ e a extensão analítica $\tilde{g}(z)$ é definida em z_0 por:

$$\tilde{g}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - w_0} = 0,$$

já que $f(z)$ não é limitada nas proximidades de z_0 . Sendo z_0 um zero de \tilde{g} , segue do Lema 5.3.28 que o ponto z_0 é um pólo de $1/\tilde{g}$ e, portanto, um pólo de f , já que $f = 1/\tilde{g} + w_0$. Isto contradiz a hipótese de ser z_0 uma singularidade essencial de f . ■

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.3

1. Mostre que z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$ se, e somente se, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe e é finito.
2. Mostre que as singularidades da função $f(z)$ são pólos e calcule o resíduo de f em cada pólo.

$$\text{(a)} \quad f(z) = \frac{z+1}{z^2-2z} \quad \text{(b)} \quad f(z) = \tanh z \quad \text{(c)} \quad f(z) = \frac{1-\exp(2z)}{z^4} \quad \text{(d)} \quad f(z) = \frac{z}{\cos z}.$$

3. Se $f(z) = \frac{z+1}{(z-2)^2(z-i)}$, mostre que $\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; 2) = 0$.
4. Se $h(z)$ é analítica em z_0 e $h(z_0) \neq 0$, mostre que a função $g(z) = \frac{h(z)}{z-z_0}$, tem um pólo simples em z_0 e que $\text{Res}(g, z_0) = h(z_0)$. Comprove esse resultado com a função $g(z) = (e^z - 2z + 2)/z$.
5. Determine e classifique os pólos da função $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$.
6. Em cada caso, determine e classifique as singularidades da função $w = f(z)$.
 - (a) $w = z + \frac{1}{z}$ (b) $w = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ (c) $w = \text{sen}(1/z^2)$ (d) $w = e^z + e^{1/z}$ (e) $w = \frac{1}{(\text{Log } z)^2}$.
7. Se $f(z)$ é analítica no anel $0 < |z - z_0| < R$ e z_0 é um pólo de $f(z)$, mostre que $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$. Comprove esse resultado com a função $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$.
8. Calcule $\text{Res}(f; 0)$, em cada um dos seguintes casos:
 - (a) $f(z) = \text{cosec}^2 z$ (b) $f(z) = z^{-3} \text{cosec}(z^2)$ (c) $f(z) = z \cos(1/z)$.
9. Use o quociente de séries e encontre os primeiros termos das séries de potências de z de $f(z)$.
 - (a) $f(z) = \frac{e^z}{\cos z}$ (b) $f(z) = \frac{z}{\text{sen } z}$ (c) $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ (d) $\frac{1}{z^2 \text{senh } z}$.
10. Se $f(z)$ é analítica em $|z - z_0| < R$ e z_0 é um zero de ordem m de f , mostre que a função $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tem um pólo de ordem m em z_0 .
11. Estude o comportamento no infinito da função $f(z)$.
 - (a) $f(z) = \tan z$ (b) $f(z) = (e^z - 1)^{-1} - 1/z$ (c) $f(z) = (z^2 - 1)(z^2 + 1)^{-1} - 1/z$.

5.4 Teorema dos Resíduos & Aplicações

Dada uma função $f(z)$, analítica no anel $r < |z - z_0| < R$, vimos no Teorema (5.2.14) que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}, \quad r < |z - z_0| < R,$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_r} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}}.$$

Em particular, $2\pi i b_1 = \oint_{\gamma_r} f(z) dz$ e se γ é qualquer contorno admissível contido no anel, como ilustrado na Figura 5.6, temos:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i \operatorname{Res}(f; z_0).$$

TEOREMA 5.4.1 (Dos Resíduos) *Seja \bar{D} uma região compacta do plano \mathbb{C} , delimitada por um contorno γ admissível (simples, fechado e regular por partes) e deixe $f(z)$ ser uma função complexa, analítica em \bar{D} , exceto nas singularidades isoladas z_1, z_2, \dots, z_k . Então:*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f; z_j).$$

DEMONSTRAÇÃO Como ilustrado na Figura 5.8, sejam r_1, r_2, \dots, r_k números reais positivos, tais que os discos $D_j : |z - z_j| \leq r_j$ estão contidos em \bar{D} e isolam as singularidades z_1, z_2, \dots, z_k , isto é, $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$.

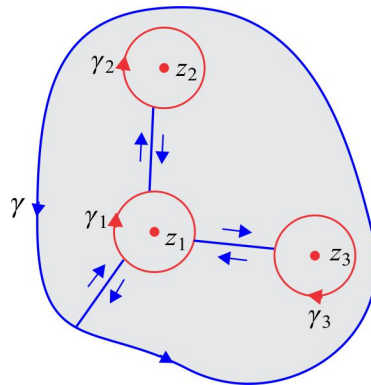


Figura 5.8:

Se γ_j é a fronteira de D_j , segue do Teorema de Cauchy-Goursat que:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz - \sum_{j=1}^k \oint_{\gamma_j} f(z) dz = 0 \Leftrightarrow \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{Res}(f; z_j). \quad \blacksquare$$

EXEMPLO 5.4.2 A função $f(z) = \frac{5z - 2}{z(z - 1)}$ tem singularidades isoladas, do tipo pólo simples, nos pontos $z_1 = 0$ e $z_2 = 1$. Temos:

$$\frac{5z - 2}{z(z - 1)} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z - 1}$$

de onde resulta que $\text{Res}(f; 0) = 2$ e $\text{Res}(f; 1) = 3$, e pelo Teorema dos Resíduos segue que:

$$\oint_{|z|=2} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz = 2\pi i [\text{Res}(f; 0) + \text{Res}(f; 1)] = 10\pi i.$$

EXEMPLO 5.4.3 A função $f(z) = \frac{1}{z^3(z + 4)}$ tem um pólo de ordem 3 em $z_1 = 0$ e um pólo simples em $z_2 = -4$, ambos internos ao contorno $\gamma : |z + 2| = 3$. Assim:

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z + 4)} = 2\pi i [\text{Res}(f; 0) + \text{Res}(f; -4)] = 0,$$

tendo em vista que:

(i) $\text{Res}(f; 0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} [(z + 4)^{-1}] = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} 2(z + 4)^{-3} = 1/64.$

(ii) $\text{Res}(f; -4) = \lim_{z \rightarrow -4} (z + 4) f(z) = \lim_{z \rightarrow -4} (1/z^3) = -1/64.$

EXEMPLO 5.4.4 A função $f(z) = \frac{\cos z}{z(e^z - 1)}$ tem um pólo de ordem 2 na origem. De fato:

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{z \cos z}{e^z - 1} \right] = (\text{L'Hôpital}) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - z \sin z}{e^z} = 1$$

e da Proposição 5.3.14 resulta que $z_0 = 0$ é um pólo de ordem 2. Agora, deixe-nos mostrar que $\text{Res}(f; 0) = -1/2$ e, usando o Teorema dos Resíduos, obtermos:

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f; 0) = -\pi i.$$

(i) USANDO O ATALHO Considerando $p(z) = \cos z$ e $q(z) = z(e^z - 1)$, encontramos:

$$p(0) = 1, p'(0) = 0, q(0) = q'(0) = 0, q''(0) = 2 \quad e \quad q'''(0) = 3$$

e, assim:

$$\text{Res}(f; 0) = \frac{2p'(0)}{q''(0)} - \frac{2p(0)q'''(0)}{3[q''(0)]^2} = -1/2.$$

(ii) USANDO A SÉRIE DE LAURENT A função $z^2 f(z)$ é o quociente

$$z^2 f(z) = \frac{1 - z^2/2! + z^4/4! - z^6/6! + \dots}{1 + z/2! + z^2/3! + z^3/4! + \dots} = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots \tag{5.49}$$

e usando o Produto de Cauchy (5.35), encontramos:

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 + \frac{1}{2}A_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_1 = -1/2$$

e de (5.49), vemos que:

$$f(z) = \frac{A_0}{z^2} + \frac{A_1}{z} + A_2 + A_3 z \dots$$

é a série de Laurent de $f(z)$, de modo que $\text{Res}(f; 0) = A_1 = -1/2$.

5.4.1 Cálculo de Integrais Reais

Nesta seção, veremos como usar o Teorema dos Resíduos (5.4.1) no cálculo de integrais impróprias de funções reais. No cálculo em uma variável real, aprendemos que a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \tag{5.50}$$

de uma função real contínua $y = f(x)$, $-\infty < x < \infty$, é convergente quando os limites

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) dx \quad \text{e} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx$$

existirem e, neste caso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx. \tag{5.51}$$

Por outro lado, o *Valor Principal* da integral imprópria (5.50) é definido por:

$$\text{(VP)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx, \tag{5.52}$$

caso o limite exista. É oportuno ressaltar que os conceitos (5.51) e (5.52) não são equivalentes, como é fácil ver considerando $f(x) = x$. De fato, temos:

$$\text{(VP)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = 0$$

e, contudo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 x dx = -\infty \quad \text{e} \quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x dx = +\infty.$$

Naturalmente, se f é uma função par, então:

$$\int_{-R}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_0^R f(x) dx$$

e, portanto:

$$\text{(VP)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

No que se segue, $f(x)$ representa uma função racional $f(x) = p(x)/q(x)$, e para a integral imprópria (5.50) convergir, vamos admitir que os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ sejam primos entre si e que satisfaçam as condições seguintes:

- (i) O polinômio $q(x)$ não possui zeros reais, isto é, a equação $q(x) = 0$ não tem solução real.
- (ii) $\text{Grau}(q) \geq 2 + \text{Grau}(p)$.

1. INTEGRAIS DO TIPO: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Para mostrar que o valor principal da integral imprópria pode ser calculado com auxílio do Teorema dos Resíduos, inicialmente, deixe-nos considerar a função racional $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ definida no domínio $D = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$, e sejam γ_R e γ^* os arcos:

$$\begin{aligned} \gamma_R &= \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, |z| = R\} \\ \gamma^* &= \{(x, 0) : -R \leq x \leq R\} \end{aligned}$$

ilustrados na Figura (5.9).

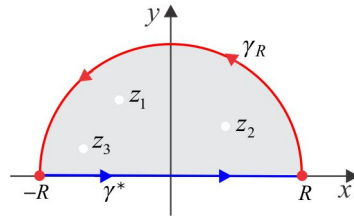


Figura 5.9:

Consideremos $R > 0$, de tal forma que as singularidades z_1, z_2, \dots, z_k de $f(z)$ sejam interiores ao contorno $\gamma_R + \gamma^*$ e, assim, poderemos usar o Teorema dos Resíduos 5.4.1. Temos

$$\oint_{\gamma_R} f(z) dz + \oint_{\gamma^*} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f; z_j) \tag{5.53}$$

e notando que γ^* é o intervalo $[-R, R]$ sobre o eixo x , decorre de (5.53) a seguinte relação:

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f; z_j) - \oint_{\gamma_R} f(z) dz. \tag{5.54}$$

Da condição (ii), a respeito do grau dos polinômios $p(z)$ e $q(z)$, resulta que existe $M > 0$, tal que $|z^2 f(z)| \leq M$, com $|z| = R$, e, portanto:

$$\left| \oint_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq \oint_{\gamma_R} |z^2 f(z)| \left| \frac{dz}{z^2} \right| \leq M \oint_{\gamma_R} \left| \frac{dz}{z^2} \right| = \frac{2\pi M}{R} \rightarrow 0, \quad \text{com } R \rightarrow \infty.$$

Assim, tomando o limite em (5.54), com $R \rightarrow \infty$, encontramos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f; z_j).$$

EXEMPLO 5.4.5 No semiplano $[\text{Im } z > 0]$ a função complexa $f(z) = (1 + z^2)^{-1}$ possui singularidade no ponto $z_1 = i$, de modo que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= 2\pi i \text{Res}(f; i) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} (z-i) f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{z^2+1} \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \pi. \end{aligned}$$

EXEMPLO 5.4.6 As singularidades isoladas da função $f(z) = (1 + z^4)^{-1}$ ocorrem nos pólos simples $z = e^{\pm\pi i/4}$ e $z = e^{\pm 3\pi i/4}$. No semiplano $[\text{Im } z > 0]$ estão os pólos $z_1 = e^{i\pi/4}$ e $z_2 = e^{i3\pi/4}$, de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i [\text{Res}(f; z_1) + \text{Res}(f; z_2)].$$

Um cálculo direto nos dá:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f; z_1) &= \left. \frac{p(z)}{q'(z)} \right|_{z=z_1} = \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=e^{i\pi/4}} = \frac{1}{4} \exp(-3\pi i/4) \quad e \\ \text{Res}(f; z_2) &= \left. \frac{p(z)}{q'(z)} \right|_{z=z_2} = \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=e^{3\pi i/4}} = \frac{1}{4} \exp(-9\pi i/4). \end{aligned}$$

e, conseqüentemente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Obtém-se o mesmo resultado, se considerarmos os pólos $z_3 = \exp(-i\pi/4)$ e $z_4 = \exp(-i3\pi/4)$, situados no semiplano $[\text{Im } z < 0]$. Comprove!

EXEMPLO 5.4.7 Para calcular a integral imprópria $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$ usando o Método dos Resíduos, consideramos a função complexa $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$, a qual tem pólos simples em $z = \pm 3i$

e pólos de segunda ordem em $z = \pm 2i$. No semiplano $[\text{Im } z > 0]$ estão os pólos $z_1 = 2i$ e $z_2 = 3i$ e, assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2} = 2\pi i [\text{Res}(f; 2i) + \text{Res}(f; 3i)].$$

No Exemplo 5.3.21 encontramos $\text{Res}(f; 2i) = -\frac{13i}{200}$ e $\text{Res}(f; 3i) = \frac{3i}{50}$ e com isso, obtemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2} = 2\pi i \left[\frac{3i}{50} - \frac{13i}{200} \right] = \pi/100.$$

EXEMPLO 5.4.8 Usando o contorno $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, ilustrado na Figura 5.10, e a função auxiliar $f(z) = \frac{1}{z^3 + 1}$ vamos calcular a integral imprópria

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

Este exemplo difere dos anteriores porque o denominador de $f(z)$ tem uma raiz real em $z = -1$.

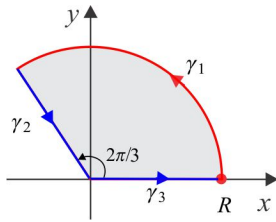


Figura 5.10:

A única singularidade de $f(z)$ interna ao contorno γ é o pólo simples $z_1 = \frac{1}{2} - i\sqrt{3}/2$, de modo que:

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^3 + 1} = 2\pi i \text{Res}(f; z_1).$$

(i) **Sobre o Arco γ_1** : Sobre o arco $\gamma_1 : z = R e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi/3$, temos:

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3 + 1} \right| \leq \int_{\gamma_1} \frac{|dz|}{|z^3 + 1|} \leq \frac{\pi R}{R^3 - 1} \rightarrow 0, \text{ com } R \rightarrow \infty.$$

(ii) **Sobre o Arco γ_2** : Sobre o arco $\gamma_2 : z = r \exp(i2\pi/3)$, $0 \leq r \leq R$, temos:

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^3 + 1} = - \int_0^R \frac{\exp(i2\pi/3) dr}{1 + (re^{i2\pi/3})^3} = - \exp(i2\pi/3) \int_0^R \frac{dr}{1 + r^3}$$

Do teorema dos Resíduos, obtemos:

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3 + 1} - \exp(i2\pi/3) \int_0^R \frac{dr}{1 + r^3} + \int_0^R \frac{dx}{1 + x^3} = 2\pi i \text{Res}(f; z_1),$$

e notando que $\text{Res}(f; z_1) = 2(-3 + i\sqrt{3})^{-1}$ chegamos a:

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^3 + 1} + [1 - \exp(i2\pi/3)] \int_0^R \frac{dx}{1 + x^3} = \frac{4\pi i}{-3 + i\sqrt{3}}. \quad (5.55)$$

Em (5.55) fazemos $R \rightarrow \infty$ e encontramos:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = 2\pi\sqrt{3}/9.$$

2. INTEGRAIS DO TIPO: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos x \, dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \text{sen } x \, dx$

Aqui não é adequado considerar a função complexa $f(z) \cos z$ ou $f(z) \text{sen } z$, por que as funções $|\cos z|$ e $|\text{sen } z|$ não são limitadas no semiplano $[\text{Im } z > 0]$. Observamos, entretanto, que os integrandos são a parte real e a parte imaginária da função $f(z) \exp(ix)$ e $|e^z| = e^{-y}$ é limitada no semiplano $[\text{Im } z > 0]$.

$$f(x) \exp(ix) = f(x) \cos x + i f(x) \text{sen } x.$$

EXEMPLO 5.4.9 Neste exemplo vamos mostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen } x \, dx}{x} = \pi/2.$$

Seja $f(z) = \frac{e^z}{z}$ e consideremos o contorno $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ da Figura 5.11. Temos:

(i) **Sobre o Arco γ_1 :** Existe, pelo Teorema do Valor Médio, θ_0 , com $0 < \theta_0 < \pi$, tal que:

$$\int_0^\pi e^{-R \text{sen } \theta} d\theta = \pi e^{-R \text{sen } \theta_0},$$

de modo que:

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \text{sen } \theta} d\theta = \pi e^{-R \text{sen } \theta_0} \rightarrow 0, \quad \text{com } R \rightarrow \infty.$$

(ii) **Sobre o Arco γ_3 :** Sobre o arco $\gamma_3 : z = \delta e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < 0$, temos:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz = -i \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\pi \exp(-\delta \text{sen } \theta + i\delta \cos \theta) d\theta = -\pi i$$

e considerando que a função $z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ é analítica no semiplano $[\text{Im } z > 0]$, segue que

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f; z_j) = 0$$

e, portanto:

$$\int_{-R}^{-\delta} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\delta}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{\gamma_3} \frac{e^{iz}}{z} dz = \pi i \Leftrightarrow \tag{5.56}$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$ e $\delta \rightarrow 0$ em (5.56), resulta:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x} dx = \pi i \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \pi i \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

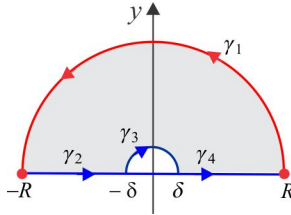


Figura 5.11:

EXEMPLO 5.4.10 Agora, vamos calcular a integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}(e^{ix})}{(x^2 + 1)^2} dx$$

considerando a função complexa $f(z) = \frac{\exp(iz)}{(z^2 + 1)^2}$ e o contorno $\gamma = \gamma_R + \gamma^*$ da Figura 5.9. No semiplano $[\text{Im } z > 0]$ a função $f(z)$ tem um pólo de ordem 2 na singularidade $z_1 = i$, de modo que:

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i \text{Res}(f; i) - \int_{\gamma_R} \frac{\exp(iz)}{(z^2 + 1)^2} dz$$

e calculando o resíduo de f no ponto $z = i$ temos:

$$\text{Res}(f; i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{\exp(iz)}{(z^2 + 1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{i(z+i)e^{iz} - 2e^{iz}}{(z+i)^3} = -i/2e.$$

Sobre o contorno $\gamma_R : |z| = R$, temos $|(z^2 + 1)^2| \geq (|z|^2 - 1)^2 = (R^2 - 1)^2 e$, assim:

$$\left| \frac{\exp(iz)}{(z^2 + 1)^2} \right| \leq \frac{|e^{iz}|}{(R^2 - 1)^2} = \frac{e^{-y}}{(R^2 - 1)^2} \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2}.$$

Logo:

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{\exp(iz)}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \leq \int_{\gamma_R} \frac{|dz|}{(R^2 - 1)^2} = \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2} \rightarrow 0, \text{ com } R \rightarrow \infty$$

e, conseqüentemente:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi i (-i/2e) = \pi/e. \tag{5.57}$$

O lado direito de (5.57) sendo um número real, temos que:

$$\text{(VP)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 1)^2} = \pi/e$$

e como a função $x \mapsto \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2}$ é par, resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 1)^2} = \pi/e.$$

3. INTEGRAIS DO TIPO: $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) \, d\theta$

Considerando $z = e^{i\theta}$, obtemos:

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

e quando θ varia de 0 a 2π a variável z descreve uma vez a circunferência $\gamma : |z| = 1$. Assim, temos:

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) \, d\theta = \oint_{\gamma} f\left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right) (-i/z) \, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(g; z_j),$$

onde $g(z) = f\left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right] (-i/z)$ e z_j são as singularidades isoladas de g , internas ao contorno γ .

EXEMPLO 5.4.11 Como ilustração, deixe-nos mostrar que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

De fato, neste caso temos:

$$g(z) = \frac{-i/z}{2 + \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

com singularidades nos pontos $z_1 = (-2 + \sqrt{3})i$ e $z_2 = (-2 - \sqrt{3})i$ e apenas a singularidade z_1 é interna ao contorno γ . Temos:

$$\text{Res}(g; z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) g(z) = \frac{2}{z_1 + (2 + \sqrt{3})i} = \frac{2}{i\sqrt{3}}$$

e, assim:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta} = 2\pi i \text{Res}(g; z_1) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

1. Com auxílio do Teorema dos Resíduos, calcule a integral $\int_{|z|=1} f(z) dz$, em cada caso.

$$(a) f(z) = \frac{e^{-z}}{z^2} \quad (b) f(z) = \frac{\operatorname{cosec} z}{z^2} \quad (c) f(z) = ze^{1/z} \quad (d) f(z) = \frac{e^z}{\cos z}.$$

2. Repita o exercício precedente com as funções:

$$(a) f(z) = \frac{z+1}{4z^3-z} \quad (b) f(z) = \frac{z}{1+9z^2} \quad (c) f(z) = \frac{1}{z^2-2z} \quad (d) f(z) = \frac{\sinh(\pi z)}{2z-i}.$$

3. Calcule a integral $\int_{\gamma} \frac{(3z^3+2) dz}{(z-1)(z^2+9)}$, nos seguintes casos:

$$(a) \gamma \text{ é o círculo } |z-2| = 2 \quad (b) \gamma \text{ é o círculo } |z| = 4$$

4. Repita o exercício precedente para a integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^3(z+4)}$, sendo γ os arcos:

$$(a) |z+2| = 3 \quad (b) |z| = 2.$$

5. Seja $f(z) = \frac{5z-2}{z^2-z}$ e designe γ a circunferência de $|z| = 2$. Calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$, utilizando os seguintes argumentos:

(a) O Teorema dos Resíduos, considerando os pólos simples $z = 0$ e $z = 1$.

(b) A representação de Laurent de $f(z)$ no domínio $|z| > 1$. Nesta representação, o coeficiente b_1 **não** é o resíduo da função na singularidade $z_0 = 0$. Recorde-se que o resíduo é o coeficiente b_1 gerado na representação de Laurent, no anel $0 < |z - z_0| < R$.

6. Seja γ o círculo $|z| = 2$, percorrido no sentido positivo. Em cada caso, calcule $\int_{\gamma} f(z) dz$.

$$(a) f(z) = \tan z \quad (b) f(z) = \frac{1}{\sinh(2z)} \quad (c) f(z) = \frac{\cosh(\pi z)}{z(z^2+1)} \quad (d) f(z) = \frac{1}{z^2 \sinh z}.$$

7. Use o Teorema dos Resíduos para calcular as integrais reais.

$$(a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6} \quad (b) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad (d) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}.$$

8. Ainda com auxílio de resíduos, calcule as integrais:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 2x + 2} \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x dx}{x^2 + 4x + 5}.$$

9. Calcule as integrais impróprias, envolvendo as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{3 + \operatorname{sen} \theta} \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} \quad (c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + 2x^2 + x^4} \quad (d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$$

$$(e) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{16 + x^4} \quad (f) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^3} \quad (g) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(4 + x^2)^2} \quad (h) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(9 + x^2)}$$

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x) dx}{(x^2 + 4)^2} \quad (j) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} 2x dx}{x^2 + 4} \quad (k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(3x) dx}{x^2 + 4} \quad (l) \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos bx dx$$

10. Calcule as integrais definidas.

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \operatorname{sen} \theta} \quad (b) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} \quad (c) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

11. Mostre que:

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi e^{-kR}}{a} \quad (b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx dx}{a^2 + x^2} = 0 \quad (c) \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\pi/8}.$$

12. Integre $\exp(-z^2)$ sobre o retângulo de vértices $\pm a$ e $\pm a + ib$ e, em seguida, faça $a \rightarrow \infty$ para encontrar o valor de:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(bx) dx.$$

13. Use o contorno indicado na Figura 5.12 abaixo e calcule $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{(x+1)(x^2+2)}$.

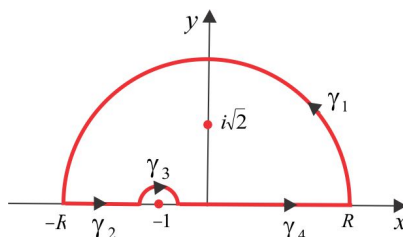


Figura 5.12:

1. Trata-se de uma série geométrica divergente, já que a razão $w = 1 + i$ é tal que $|w| = \sqrt{2} > 1$.
2. Com $z = 2 - i$, a série se reduz a $\sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{2}{2+i} \right)^{k-1}$ de soma $S = 2 - 4i$.
3. Se a série $\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + w_k)$ fosse convergente, então $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ também seria, já que $w_k = -z_k + (z_k + w_k)$.
4. Basta o Critério da Comparação para séries reais, notando que se $|z + 2| < 4$, então:

$$\left| \frac{(z + 2)^k}{(k + 1)^3 4^k} \right| \leq \frac{1}{(k + 1)^3}.$$

5. Em cada ponto z da faixa $|\operatorname{Im}(z)| < \ln 2$ a série real $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(\pm ny)}{2^n}$, $y = \operatorname{Im}(z)$, converge absolutamente, pelo Teste da Razão, e, por comparação, obtemos a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\exp(nz) - \exp(-nz)|}{2^n}.$$

6. (a) Se $|z| < R$, então

$$\left| \frac{\lambda^n z^n}{n!} \right| < \frac{(|\lambda| R)^n}{n!}$$

e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|\lambda| R)^n}{n!}$ é convergente.

- (b) Use a série de prova $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(\frac{r}{R} \right)^n$, a qual é convergente, pelo Teste da Razão.

7. Para estabelecer a convergência uniforme da série, notamos que:

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n} \right| = \frac{1}{2^{n+1}} |\exp(nz) - \exp(-nz)| = M_n$$

e pelo Exercício 5 deduzimos que a série numérica real $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente. Logo, a série complexa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$ converge uniformemente e define uma função analítica.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.2

1. (a) $R = 2$ (b) $R = 1$ (c) $R = 1$ (d) $R = 1$ (e) $R = 1$.
2. A série representa o número complexo $\exp(i\pi)$ e a soma da série é $S = \exp(i\pi) = -1$.

3. No disco $|z| < 1$, temos:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$$

4. Expresse $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)}$ e use a série geométrica para chegar ao resultado.

5. Use a série geométrica, notando que:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{z^2} = -\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{-1+(z+1)} \right] \quad \text{e} \quad \text{(b)} \quad \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1-(z-2)/2} \right].$$

6. Considerando que $\cos z = -\sin(z - \pi/2)$, obtemos:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (z - \pi/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Por outro lado, $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ e daí resulta:

$$\sinh z = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - \pi i)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

7. Basta notar que:

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} \frac{1}{1 - (z/2)}.$$

8. No disco $0 < |z - 1| < 2$, temos:

$$f(z) = \frac{-1}{2(z-1)} - 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^{k-1}}{2^{k-1}}.$$

No disco $|z - i| < \sqrt{2}$, temos

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(1-i)^k}.$$

9. Por integração de uma série geométrica, encontramos:

$$\text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(-1)^k - 1] z^{k+1}}{k+1}, \quad |z| < 1.$$

10. (a) $\frac{e^{-z}}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{k-3}}{k!}, \quad 0 < |z| < \infty.$

(b) $\frac{e^{1/z^2}}{z^6} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k! z^{2k+6}}, \quad 0 < |z| < \infty.$

(c) $\frac{\cos(2z)}{z^2} = \frac{1}{z^2} - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 4^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad 0 < |z| < \infty.$

(d) $\frac{1}{z^2(z-3)} = -\sum_{k=3}^{\infty} \frac{z^{k-2}}{3^{k+1}}, \quad 0 < |z| < 3.$

11. Use os seguintes fatos:

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1+z} \right) \quad \text{e} \quad \frac{2}{(1-z)^3} = \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(1-z)^2} \right]$$

12. A função $\frac{\text{sen } z}{z}$ é representada pela série

$$\frac{\text{sen } z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}, \quad 0 < |z| < \infty, \tag{5.58}$$

e, considerando que $f(0) = 1$, a série em (5.58) representa a função $f(z)$ em todo plano \mathbb{C} . Ocorre que uma série de potências representa, no seu disco de convergência, uma função analítica.

13. Notamos que:

(i) $f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k-2}, \quad 0 < |z| < 1.$

(ii) $f(z) = -\frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-1/z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-3}, \quad |z| > 1.$

A representação de Laurent é única num determinado anel. O que vemos acima são duas representações da mesma função, em domínios diferentes. Portanto, não há violação da unicidade.

14. (a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} k (z-1)^k, \quad |z-1| < 1$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1)}{(z-1)^{k+2}}, \quad |z-1| > 1$ (c) $-\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}, \quad |z| > 0.$

15. Usando as representações de Taylor:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots, & a_k &= \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \\ g(z) &= b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots, & b_k &= \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \end{aligned}$$

encontramos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{a_1 + a_2(z-z_0) + \dots}{b_1 + b_2(z-z_0) + \dots} \right] = \frac{a_1}{b_1}.$$

16. No disco de convergência da série de Taylor de $f(z)$, temos:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

onde $a_n = \frac{f^{(n+k+1)}(z_0)}{(n+k+1)!}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Como $g(z)$ é representada por uma série de Taylor, em torno de z_0 , segue que $g(z)$ é analítica em z_0 . (compare com o Exercício 12)

17. A série de Maclaurin de $g(z)$, obtida a partir da série de $\sin z$, vem dada por:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

onde vemos que as derivadas $g^{(2k-1)}(0)$ e $g^{(4k)}(0)$ são nulas, para $k = 1, 2, 3, \dots$

18. $f''(0) = -2/3$.

19. (a) Note que z_0 é um zero de ordem m da função analítica $f(z)$ se, e somente se $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ e $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ e, assim:

$$(z - z_0)^{-m} f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!} (z - z_0)^2 + \dots$$

Portanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{-m} f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$.

(b) Suponha que z_0 seja um zero de ordem m de $f(z)$. Então $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, sendo $g(z)$ uma função analítica e não nula em γ e no seu interior. Então:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)}{(z - z_0)^m g(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

e integrando sobre o contorno γ , encontramos:

$$\oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = m \underbrace{\oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}}_{=2\pi i} + \underbrace{\oint_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz}_{=0} = 2\pi i m.$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.3

1. Recorde-se que uma singularidade removível é apenas aparente e que z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$ se, e só se, $f(z)$ é limitada em alguma vizinhança de z_0 . Veja o Lema 5.3.13.

2. As singularidades são os pontos que anulam o denominador de $f(z)$.

(a) $z = 0$ e $z = 2$ são pólos simples ($m = 1$) de $f(z)$, com $\text{Res}(f; 0) = 1/2$ e $\text{Res}(f; 2) = 3/2$.

(b) $f(z)$ tem pólos simples nos pontos $z_k = (k + 1/2)\pi i$, com $\text{Res}(f; z_k) = 1$.

(c) $z = 0$ é um pólo de ordem $m = 3$, com $\text{Res}(f; 0) = -4/3$.

(d) $z_k = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, são os pólos simples de $f(z)$; $\text{Res}(f; z_k) = (-1)^k (k\pi + \pi/2)$.

3. A singularidade $z = i$ é um pólo simples, com $\text{Res}(f; i) = \frac{-1 + 7i}{25}$. A singularidade $z = 2$ é um pólo duplo, com $\text{Res}(f; 2) = \frac{1 - 7i}{25}$. Logo, $\text{Res}(f; i) + \text{Res}(f; 2) = 0$.

4. Que z_0 é um pólo simples de $g(z)$ decorre de

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)g(z)] = h(z_0) \neq 0.$$

Se $h(z) = e^z - 2z + 2$, então:

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z \cdot g(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} (e^z - 2z + 2) = 3.$$

5. $z_1 = 0$ é um pólo simples e $z_2 = 2$ é um pólo de ordem 5.

6. Nos casos (c) e (d), a função tem uma singularidade essencial em $z = 0$.

(a) $f(z)$ tem um pólo simples em $z = 0$.

(b) $f(z)$ tem um pólo de ordem $m = 2$ em $z = 0$ e tem pólos simples nos pontos $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{k}$.

(e) $f(z)$ tem um pólo de ordem $m = 2$ em $z = 1$.

7. Admita que z_0 seja um pólo de ordem m e use a série de Laurent de $f(z)$, sob a forma:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \left[b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \dots + b_2(z - z_0)^2 + b_1(z - z_0)^{m-1} \right] + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Agora, use a desigualdade $|z + w| \geq |z| - |w|$.

8. (a) 0 (b) 1/6 (c) -1/2.

9. Usando as séries já estabelecidas, encontramos:

$$(a) \frac{e^z}{\cos z} = 1 + z + z^2 + \frac{2}{3}z^3 + \dots$$

$$(b) \frac{z}{\operatorname{sen} z} = 1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{34}{6!}z^4 + \dots$$

$$(c) \frac{1}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{z} + \frac{1}{12}z + \dots \quad (|z| > 0)$$

$$(d) \frac{1}{z^2 \operatorname{senh} z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \frac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \dots \quad (|z| > 0)$$

10. Veja o Exercício 19 da Seção 5.2.

ESCREVENDO PARA APRENDER 5.4

1. (a) $\int_{|z|=1} e^{-z}/z^2 dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} (-e^{-z}) = -2\pi i.$

(b) $\pi i/3$ (c) πi (d)

2. (a) $3\pi i/2$ (b) $2\pi i/9$ (c) $-\pi i$ (d) $\pi i.$

3. (a) 0 (b) $\pi i/32.$

4. (a) $2\pi/3$ (b) $8\pi/\sqrt{3}$ (c) $\pi\sqrt{2}.$

5. $10\pi i.$

6. (a) $-4\pi i$ (b) $-\pi i$ (c) $4\pi i$ (d) $-\pi i/3$

7. (a) $\pi/6$ (b) $\pi/6$ (c) $\pi\sqrt{2}/4$ (d) $\pi/4.$

8. (a) $\pi/5$ (b)

9. (a) $\pi e^{-k/a}$ (b) 0 (c) $\pi/2$ (d) $\sqrt{\pi/8}$ (e) $\pi/2e$ (f) $\frac{\pi}{2}e^{-a} \operatorname{sen} a$ (g) $-(\pi/e) \operatorname{sen} 2.$

(l) Integre $\exp(-z^2)$ sobre o retângulo de vértices a , $-a$, $a + ib$ e $-a + ib$ e faça $a \rightarrow \infty$.

10. (a) $2\pi/3$ (b) $8\pi/\sqrt{3}$ (c) $\pi\sqrt{2}.$

11. Fazer o item (a) como ilustração

Referências Bibliográficas

- [1] Ávila, G. S. S. *Variáveis Complexas e Aplicações*, LTC, Rio de Janeiro, 2000.
- [2] Bartle, R. G. *The Elements of Real Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1964.
- [3] Churchill, R. V., Brown, J. W. & Verhey, R. F. *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill, Kogakusha Ltda, Tokyo, 1974.
- [4] Courant, R. & John, F. *Introduction to Calculus and Analysis*, vol.1, Springer, New York, 1965.
- [5] Finney, R. L., Weir, M. D. & Giordano, F. R. *Cálculo de George B. Thomas Jr*, vol. 2, Addison-Wesley, São Paulo, 2003.
- [6] Kaplan, W. *Advanced Calculus*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1970.
- [7] Medeiros, L. A. *Funções Complexas*, Ed. McGraw-Hill do Brasil, 1972.
- [8] Protter, M. H. & Morrey, C. B. Jr. *Modern Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1964.
- [9] Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática*, Ed. Universidade de Brasília, Brasília, 1971.
- [10] Soares, M. G. *Cálculo em uma Variável Complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
- [11] Stewart, J. *Cálculo*, vol. 2, CENGAGE, Learning, São Paulo, 2008.
- [12] Tolstov, G. P. *Fourier Series*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.