2.1. FUNDAMENTOS GERAIS

1. Falso (**F**) ou Verdadeiro (**V**)? Justifique.

   (a) Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

   (b) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$.

   (c) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0, \forall n$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

   (d) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverge.

   (e) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergem, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

   (f) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge e $a_n \neq 0, \forall n$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge.

   (g) Se $\{a_n\}$ é uma sequência constante, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

   (h) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum\limits_{n=100}^{\infty} a_n$ converge.

2. Identifique cada série abaixo com uma série de encaixe ou uma série geométrica e calcule o valor da soma no caso de ela convergir.

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **(b)** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} 4\left(\frac{2}{5}\right)^n$ **(c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ **(e)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3}$ **(f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2+3n-2}$ **(h)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ **(i)** $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$

   (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]$ **(k)** $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{2}{(n-2)(n-1)n}$ **(l)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^n \operatorname{sen}(n\pi + \pi/2)}{3^{2n-2}}\right]$.

3. Encontre uma série, cuja n-ésima soma (S_n) vem dada por:

   (a) $S_n = \frac{2n}{3n+1}$ **(b)** $S_n = \frac{n^2}{n+1}$ **(c)** $S_n = \frac{1}{2^n}$

4. Por observação do limite do termo geral, verifique que as séries abaixo são divergentes:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+(-1)^n\right]$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^3+n^2+4}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\cos n}$ **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$.

5. Encontre os valores de x que tornam a série $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ convergente e calcule o valor da soma. Idem para a série $\frac{1}{2}+\frac{x-3}{4}+\frac{(x-3)^2}{8}+\cdots+\frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}+\cdots$.

6. Deixa-se cair uma bola de borracha de uma altura de 10 metros. A bola repica aproximadamente metade da distância após cada queda. Use uma série geométrica para aproximar o percurso total feito pela bola até o repouso completo.

7. A extremidade de um pêndulo oscila ao longo de um arco de 24 centímetros em sua primeira oscilação. Se cada oscilação é aproximadamente $5/6$ da oscilação precedente, use uma série geométrica para obter uma aproximação da distância total percorrida pelo pêndulo até entrar em repouso total.

8. Dois atletas disputam 10 provas de percurso em 10 etapas sucessivas. Os tempos de cada etapa são os mesmos e a tabela a seguir mostra as distâncias, em km, percorridas por cada um deles nas quatro etapas iniciais:

	etapa 1	etapa 2	etapa 3	etapa 4
atleta A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
atleta B	$\frac{1}{2}$	$\frac{2!}{2\times 3!}$	$\frac{3!}{3\times 4!}$	$\frac{4!}{4\times 5!}$

   Se a vitória é dada àquele que alcançou o maior percurso, qual foi o atleta vencedor?

2.2. SÉRIES DE TERMOS POSITIVOS

1. Use um Critério de Comparação para determinar a natureza das séries abaixo:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4+n^2+1}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n3^n}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+\cos n}{n^2}$ (e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)^2}$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n}$ (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^3}$ (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{n2^n}$ (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+1/2^n)$ (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/n^2)$ (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ (m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+n^2}{n^3+1}$ (n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{5n^2+1}}$ (o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^n}$

(p) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{4n^3-5n}}$ (q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+4}$ (r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2^n}{1+3^n}$ (s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/n)$ (t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2. Em cada caso, verifique que a função que estende o n-ésimo termo da série satisfaz às hipóteses do Critério da Integral e em seguida determine a natureza da série.

(a) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{3}{n(\ln n)^2}$ **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+3)^2}$ **(c)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(n-1)}$ **(d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2}{n^3+1}$ **(e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$.

3. Em cada caso, determine o menor número de termos que devem ser somados, para aproximar a soma da série com um erro menor do que E.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$; $E = 0.001$ **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$; $E = 0.01$ **(c)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$; $E = 0.01$.

4. Se $\{a_n\}$ é uma sequência de termos positivos e $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n = l > 0$, prove que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $p > 1$ e diverge se $0 < p \le 1$.

5. Falso (**F**) ou Verdadeiro (**V**)? Justifique cada resposta para melhor compreender a teoria.

(a) Se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ diverge.

(b) Se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ é convergente.

(c) Se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} a_n = 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(d) Se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ converge.

(e) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ são divergentes, com $a_n \ge 0$ e $b_n \ge 0$, $\forall n$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ diverge.

(f) Se $a_n > 0$, $\forall n$, e $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(g) Se $0 < a_n < 1$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

(h) Se $0 < a_n < 1$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1-a_n}$ converge.

(i) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, com $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, $\forall n$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

(j) A série de termo geral $a_n = \dfrac{1}{n^2+n} - \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ é convergente.

6. Mostre que $\dfrac{\pi}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$.

2.3. SÉRIES ALTERNADAS

1. Aproxime a soma da série pela soma parcial S_4 e estime o erro na aproximação.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n3^n}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

2. Use a Estimativa do Erro para aproximar a soma da série com quatro casas decimais e com erro menor do que $E = 5 \times 10^{-1}$. Diga quando a aproximação é por falta ou por excesso:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^n}$.

3. Verifique que as séries abaixo atendem às condições do Critério de Leibniz e conclua que elas são convergentes:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2+7}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{n^3+2}$ **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}(1/n)$.

4. Determine os valores inteiros de p que tornam a série convergente.

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+p}$ (c) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (\ln n)^p}{n}$

2.4. CONVERGÊNCIA ABSOLUTA, TESTE DA RAZÃO & TESTE DA RAIZ

1. Falso (**F**) ou Verdadeiro (**V**)? Justifique cada resposta para melhor assimilar a teoria.

   (a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

   (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2/\left(1+a_n^2\right)$ converge.

   (c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

   (d) Se $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

   (e) Se $\lim_{n\to\infty} (a_n/b_n) = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(f) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, $a_n \neq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|$ diverge.

(g) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são divergentes, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é divergente.

(h) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente.

(i) Para todo inteiro positivo k a série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[k]{n}}$ converge.

2. Usando o Critério da Raiz, verifique que as séries dadas abaixo convergem:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{-n}{3n+1} \right)^n$ **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ **(c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^5}{5^n}$ **(d)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-5)^{n+1}}{(\ln n)^n}$.

3. Suponha que a sequência $\{a_n\}$ seja convergente e tenha limite l. Considere as sequências $\{a_n^+\}$ e $\{a_n^-\}$ definidas por: $a_n^+ = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|)$ e $a_n^- = \frac{1}{2}(a_n - |a_n|)$

(a) Calcule os limites: $\lim a_n^+$ e $\lim a_n^-$.

(b) Se $\sum a_n$ converge absolutamente, mostre que $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ convergem.

(c) Se $\sum a_n$ converge condicionalmente, mostre que $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ divergem.

4. Dê exemplo de duas séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$, sendo a primeira divergente e a segunda convergente, tais que $\lim (a_n/b_n) = 0$. O Critério da Comparação no Limite foi violado?!

5. **ESTRATÉGIA PARA TESTAR A CONVERGÊNCIA** Na teoria estabelecemos vários critérios para testar a convergência de uma série numérica e a dificuldade é: qual o teste adequado a uma determinada série. Essa dificuldade também surge quando se integra funções. Não há regra que estabeleça qual critério se aplica a qual série. Apresentamos um roteiro que poderá ajudar na investigação.

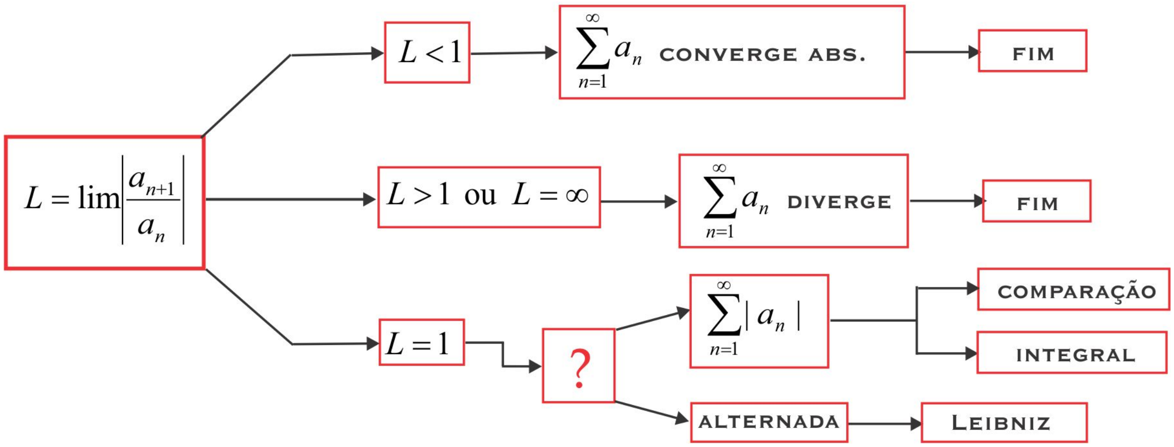
(i) Se $\lim a_n \neq 0$ ou a sequência $\{a_n\}$ é divergente o critério do n-ésimo termo deve ser usado para concluir que a série $\sum a_n$ diverge.

(ii) Se a série é da forma $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha r^{n-1}$ ela é uma série geométrica, que converge para $\alpha/(1-r)$ se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$.

(iii) Se a série é da forma $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ ela é uma série de encaixe, que converge para $b_1 - \lim b_n$, se $\{b_n\}$ convergir. Se $\{b_n\}$ divergir a série de encaixe também diverge.

(iv) Se a série é da forma $\sum 1/n^p$ ela é uma p-série e será convergente apenas quando $p > 1$.

(v) Nos outros casos tenta-se o Critério da Razão seguindo o esquema:



Agora, teste a convergência das seguintes séries:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}$ **(c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n!}$ **(d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2^n+3^n)^{1/n}}{n}$

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ **(f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n}{\sqrt{n^3+1}}$ **(g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n3^{2n}}{5^{n-1}}$ **(h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cos n}{n^2}$

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+2}$ **(j)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^n}$ **(k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! \left(\dfrac{2}{n}\right)^n$ **(l)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n+2)}$

6. Teste a convergência das séries:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!}$ **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!2^n}$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.1

1. Procure justificar as afirmações falsas com um contraexemplo. Para as afirmações verdadeiras, procure um critério de convergência adequado.

(a) **(F)** A série harmônica é um contraexemplo.

(b) **(F)** Veja o caso da série harmônica.

(c) **(F)** Considere $a_n = 1/n^2$. A série $\sum \sqrt{1/n^2}$ é a série harmônica divergente.

(d) **(F)** Veja as séries em (c).

(e) **(F)** Considere $a_n = 1/n$ e $b_n = -1/(n+1)$.

(f) **(F)** Considere $a_n = n$.

(g) **(F)** Se $\{a_n\}$ é uma sequência constante, a série $\sum a_n$ só convergirá quando $a_n \equiv 0$. Se esse não é o caso, então $\lim a_n \neq 0$ e a série correspondente diverge.

(h) **(V)** Consequência do Critério da Cauda!

2. Em cada caso, observe o termo geral a_n da série e comprove que: ou $\lim a_n \neq 0$ ou a sequência (a_n) não tem limite.

3. O termo geral a_n é calculado a partir da relação: $a_n = S_n - S_{n-1}$.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{2}{3}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-1}{n^2+n} = \infty$ **(c)** $\displaystyle 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

4. **(a)** 3 **(b)** $\frac{32}{75}$ **(c)** 1 **(d)** 1 **(e)** $\frac{8}{15}$ **(f)** $\frac{71}{18}$ **(g)** $\frac{1}{2}$ **(h)** $\frac{1}{6}$ **(i)** $\frac{1}{18}$ **(j)** $\ln 2$ (k) $\frac{1}{6}$ **(l)** $-\frac{18}{11}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2}$, se $|x| < 1$, e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{5-x}$, se $1 < x < 5$.

6. 30 metros.

7. 144 centímetros.

8. O venc*edo*r foi o atleta A, com percurso de $\frac{1023}{1024}\,km$ contra $\frac{10}{11}\,km$ do atleta B.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.2

1. Nos critérios de comparação, existem duas séries envolvidas: a série de prova $\sum b_n$, de natureza conhecida, e a série sob investigação $\sum a_n$.

   - São Convergentes: **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(d)**, **(e)**, **(g)**, **(h)**, **(i)**, **(k)**, **(l)**, **(m)**, **(o)**, **(p)**, e **(r)**.
   - São Divergentes: **(f)**, **(j)**, **(n)**, **(q)**, **(s)** e **(t)**.

   (a) Compare com a p-série convergente $\sum 1/n^4$:

   $$a_n = \frac{1}{n^4+n^2+1} \leq \frac{1}{n^4} = b_n.$$

   (b) Compare com a série geométrica convergente $\sum 1/3^n$.

   (c) Compare com a p-série convergente $\sum 1/n^{3/2}$:

   $$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} = b_n.$$

(d) Compare com a p-série convergente $\sum 3/n^2$.

(f) Compare com a série harmônica $\sum 1/n$:

$$a_n = \frac{\arctan n}{n} \geq \frac{1}{n} = b_n, \quad n \geq n_0.$$

(i) Use o fato $\ln(1+n) \leq n, \ \forall \ n$, e compare com uma série geométrica.

(k) Compare, no limite, com a série convergente $\sum 1/n^2$.

(s) Compare, no limite, com a série harmônica $\sum 1/n$. Veja:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = 1.$$

2. **(a)** **(C)** **(b)** **(C)** **(c)** **(C)** **(d)** **(D)** **(e)** **(C)**.

3. **(a)** $n = 1001$ **(b)** $n = 2$ **(c)** $n > e^{100}$.

4. Use comparação no limite, com a série de prova $\sum 1/n^p$.

5. **(a)** **(V)** **(b)** **(V)** **(c)** **(V)** **(d)** **(F)** **(e)** **(V)** (f) **(F)** (g) **(V)** (h) **(V)** (i) **(V)** (j) **(F)**.

6. Inicialmente recorde-se que

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{B\to\infty} [\arctan x]_{x=1}^{x=B} = \pi/4$$

e para concluir note que:

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{2} + \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx.$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.3

1. **(a)** $8,23 \times 10^{-4}$ **(b)** 4×10^{-2}.

2. **(a)** $S \simeq 0.8158$ (FALTA) **(b)** $S \simeq -0.7987$ (EXCESSO) **(c)** $S \simeq -0.7831$ (EXCESSO)

3. Em cada caso, vemos que a série é alternada e resta-nos verificar que a sequência (b_n) que figura na série de Leibniz não cresce e tem limite zero.

   (a) É claro que $b_n = \dfrac{1}{n^2+7}$ decresce e tem limite zero.

(b) Neste caso, $b_n = n/2^n$ é não crescente, porque

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq 1, \quad \forall\ n,$$

e, além disso, $\lim b_n = 0$, como pode ser facilmente comprovado usando a Regra de L´Hôpital ou o Critério da Razão para sequências.

(c) Temos $b_n = \dfrac{n^2}{n^3+2}$, que decresce e tem limite zero.

(d) A sequência $b_n = \operatorname{sen}(1/n)$ tem limite zero e para comprovar que ela decresce, notamos que a função extensão $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ tem derivada $f'(x) = -\dfrac{\cos(1/x)}{x^2} < 0$, para $x \geq 1$.

4. Em **(a)** e **(b)** a série converge se o inteiro p for positivo; em **(c)** a série converge seja qual for o inteiro p.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.4

1. **(a) F** **(b) V** **(c) F** **(d) F** **(e) F** **(f) V** **(g) F** **(h) F** **(i) V**.

2. Em cada caso, verifique que $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Por exemplo, em **(b)**, temos:

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \left(\left| \sqrt[n]{n} - 1 \right|^n \right)^{1/n} = \lim \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right) = 0.$$

3. Considerando que $l = \lim a_n$, temos:

(a) $\lim a_n^+ = \frac{1}{2}(l + |l|)$ e $\lim a_n^- = \frac{1}{2}(l - |l|)$.

(b) Se $\sum a_n$ converge absolutamente, então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são convergentes, por serem somas de séries convergentes.

(c) Se $\sum a_n$ converge condicionalmente, então $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ são divergentes, por serem somas de uma série convergente $(\sum a_n)$ com outra divergente $(\sum |a_n|)$.

4. Recorde-se que os Critérios de Comparação se aplicam às séries de termos positivos.

5. ▶ Convergem Absolutamente: **(a)**, **(b)**, **(c)**, **(e)**, **(h)**, **(i)**, **(j)**, **(k)** e **(l)**.

   ▶ São Divergentes: **(d)**, **(f)** e **(g)**.

6. A série (a) é divergente, porque $\lim a_n = \infty$. A série (b) é convergente, porque $\lim \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2/3$. Na série (c) temos $\lim \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ e o Teste da Razão não se aplica. Ela pode ser comparada com a série divergente $\sum (1/2n)$ e deduzimos que ela é divergente.