2.1 Fundamentos Básicos

1. Classifique as afirmações em verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando cada resposta.

   (a) ( ) Um ponto $A(x, y, z)$ pertence ao eixo z se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$.

   (b) ( ) Um ponto $A(x, y, z)$ pertence ao plano xz se, e somente se, $y = 0$.

   (c) ( ) Dados dois pontos A e B, existe um único plano que os contém.

   (d) ( ) Se um plano α é paralelo aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então α é ortogonal aos vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.

   (e) ( ) Se os pontos A, B e C não estão alinhados, então existe um único plano que os contém.

   (f) ( ) Dados um ponto A e um vetor $\vec{v}$, existe uma única reta passando por A, ortogonal a $\vec{v}$.

   (g) ( ) Paralelo ao plano xy, existe um único plano que contem o ponto $A(1, 1, 1)$.

   (h) ( ) Se os planos α, β e γ se interceptam dois a dois segundo uma reta, então os três planos têm uma reta em comum.

   (i) ( ) Duas retas não paralelas sempre têm um ponto em comum.

   (j) ( ) Se l e r são duas retas concorrentes, existe um único plano que as contém.

2. Enumere a coluna da direita, observando se o ponto pertence ao lugar geométrico.

(1)	$A(0, 0, 1)$	( )	plano $\alpha : x + y + z - 6 = 0$
(2)	$B(0, 1, 0)$	( )	plano xy
(3)	$C(1, 0, 0)$	( )	reta $l : x = t, \ y = t, \ z = t$
(4)	$D(x, y, 0)$	( )	eixo x
(5)	$E(0, y, z)$	( )	interseção de $l : x = t, \ y = -t, \ z = t$ com $\alpha : 3x - 2y + z = 6$
(6)	$F(x, 0, z)$	( )	plano $y = 0$
(7)	$G(1, 2, 3)$	( )	eixo z
(8)	$H(1, 1, 1)$	( )	reta $r : x - 1 = y - 2 = z - 1$
(9)	$I(1, 2, 1)$	( )	interseção dos planos $z = 0$ e $x = 0$
(10)	$J(1, -1, 1)$	( )	plano $x = 0$

3. Seja π o plano de equações paramétricas: $x = 4 - \lambda + 2\mu$, $y = 2 + \lambda$ e $z = 3\lambda - \mu$.

(a) Verifique que o ponto $A(4,2,0)$ jaz no plano π;

(b) Determine dois outros pontos B e C do plano π;

(c) Encontre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ paralelos ao plano π;

(d) Determine a equação cartesiana do plano π.

4. O plano π passa nos pontos $A(3,1,2)$, $B(4,-1,-1)$ e $C(2,0,2)$. Descreva o plano π nas formas cartesiana e paramétrica.

5. Determine o plano α que contém o ponto $A(2,1,-1)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{v}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$. Os pontos $B(0,-1,0)$ e $C(2,1,-1)$ jazem nesse plano? Justifique.

6. Determine quatro vetores LD e não colineares, de normas 1, 2, 3 e 4, respectivamente, paralelos ao plano $\alpha : 3x+2y-z=4$.

7. Determine o plano que contém o eixo Oz e passa pelo ponto $A(4,3,1)$.

8. A equação $x=1$ representa: um ponto (em $\mathbb{R}$); uma reta (em $\mathbb{R}^2$); um plano (em $\mathbb{R}^3$). Se α representa o plano de equação $x=1$, determine:

(a) Dois pontos do plano α (b) um vetor $\vec{n}$, normal ao plano α, de comprimento 3.

9. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $A(1,2,2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ e $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$.

10. Determine a equação cartesiana do plano que contém os pontos $A(2,-1,3)$ e $B(3,1,2)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$.

11. Qual valor de m faz com que o ponto $A(m,m+2,2)$ pertença ao plano $\pi : 2x-y-3z+5=0$? O plano π passa pela origem? De forma genérica, como deve ser a equação de um plano que passa pela origem?

12. Descreva, de forma genérica, como se determina um vetor de norma λ ortogonal a um plano dado. Imagine o plano dado na forma cartesiana ou na forma paramétrica.

13. Com base no exercício precedente, determine um vetor de comprimento 15, normal ao plano de equações paramétricas $x=3-2\lambda-\mu,\ y=1+\lambda-2\mu,\ z=-\lambda-\mu$.

14. O ponto $A(2,-1,-1)$ é o pé da perpendicular baixada da origem a um plano π. Determine a equação cartesiana do plano π.

15. Seja π o plano de equação $2x-5y+4z=3$. Construa uma base ortonormal negativa $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$, de modo que $\vec{u}$ seja normal e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam paralelos ao plano π.

16. Determine a equação cartesiana do plano que contém os pontos $A(7,2,-3)$ e $B(5,6,-4)$ e é paralelo ao eixo x.

17. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $5x+2y-3z+6=0$.

18. Um plano α contém o eixo oz e é paralelo ao vetor na direção da bissetriz do ângulo entre $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Determine a equação e dê uma idéia geométrica da posição do plano α.

19. Considere os pontos $A(7,2,-3)$ e $B(5,6,-4)$. Determine a equação do plano que passa pelo ponto médio e é ortogonal ao segmento AB.

20. Verifique se o pares de planos são paralelos ou perpendiculares.

    (a) $\begin{cases} x=1-\lambda+2\mu,\ y=3\lambda-\mu,\ z=2+2\lambda-2\mu \\ x=2\lambda+3\mu,\ y=1+\mu,\ z=2+\lambda \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 4x+2y-4z=0 \\ 12x+6y-12z=4 \end{cases}$

21. Determine m e n para que os seguintes pares de equações representem planos perpendiculares.

    (a) $\begin{cases} 3x-5y+mz=3 \\ x+3y+2z=5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+my+3z=1 \\ nx+y-3z=6 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} -2x+7y-3z=0 \\ x+my+nz=1 \end{cases}$

22. Determine m e n para que os seguintes pares de equações representem planos paralelos.

    (a) $\begin{cases} nx-6y-6z=0 \\ 2x+my+3z=5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+my+2z=0 \\ 3x-y+nz=2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} mx+3y-2z=1 \\ 2x-5y-nz=0 \end{cases}$

23. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x,y,z)$ eqüidistantes de $A(-2,1,-2)$ e $B(2,-2,3)$.

24. Em cada caso, determine a equação do plano que atende às condiçoes especificadas.

    (a) Contém o ponto $A(1,-2,4)$ e é paralelo ao plano xz.

    (b) Contém o ponto $B(2,2,-1)$ e é paralelo ao eixo y e ao eixo z.

(c) Contém os pontos $A(1,-1,-2)$ e $B(3,1,1)$ e é perpendicular ao plano $x-y+3z=5$.

(d) Contém o ponto $A(1,2,3)$ e é perpendicular aos planos $2x-y+3z=0$ e $x+2y+z=1$.

2.2 Equações da Reta

1. Determine as equações dos eixos coordenados na forma paramétrica e como interseção de dois planos.

2. A reta l passa no ponto $A(1,2,2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v}=3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. Determine as equações da reta l nas formas:

   (a) vetorial (b) paramétrica (c) simétrica.

3. Determine as equações paramétricas da reta que passa nos pontos $A(0,2,3)$ e $B(5,0,6)$.

4. Considere a reta de equação vetorial $\overrightarrow{OP}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}+t(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}),\ t\in\mathbb{R}$. Escreva as equações da reta na forma (i) simétrica e (ii) paramétrica.

5. Determine a equação vetorial do segmento de reta que une os pontos A e B.

6. Descreva a reta $x=2-s,\ y=4,\ z=3s$ como interseção de dois planos.

7. Obtenha as equações paramétricas e vetorial da reta
$$l: x-1=\frac{5y+4}{2}=-6z+9.$$

8. Em cada caso, obtenha um vetor unitário paralelo à reta r.

   (a) $r: x=1-2t,\ y=-5+t,\ z=2+4t$ (b) $r: x-1=-z/7;\ y=3$.

9. Determine as equações da reta que passa pela origem e é perpendicular às retas:
$$r_1: x=2+t,\ y=3+5t,\ z=5+6t \quad r_2: x=1+3s,\ y=s,\ z=-7+2s.$$

10. Seja r a reta interseção dos planos $\pi_1: x+y+z=0$ e $\pi_2: 2x+3y-z=4$. Descreva a reta r na forma paramétrica.

11. Determine as equações paramétricas da reta r paralela aos planos $3x+3y+z=-1$ e $x+y-z=0$ e que passa no ponto $A(-1,1,0)$.

12. Decomponha o vetor $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ nas direções $\vec{a}$ e $\vec{b}$, sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$, respectivamente, paralelo e perpendicular à reta
$$r:\frac{x-2}{2}=\frac{1-y}{3}=z+1.$$

13. Determine o plano que contém as retas r_1 e r_2, sendo
$$r_1:\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2: x=1+8t,\ y=5-6t,\ z=-1-2t.$$

14. Determine as equações paramétricas da reta r que passa no ponto $A(1,2,-1)$, é paralela ao plano $x+y=5$ e perpendicular ao vetor $\vec{v}=\vec{j}+\vec{k}$.

15. Encontre, na forma paramétrica, a reta bissetriz do ângulo agudo entre as retas
$$r_1:\begin{cases} 4x-3y-65=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2:\begin{cases} 7x-24y+55=0 \\ z=0. \end{cases}$$

2.3 Posições Relativas: interseções, ângulos e distâncias

1. Descreva, de forma breve, como você decide quando duas retas são:

   (a) coincidentes (b) paralelas (c) concorrentes (d) reversas.

2. Em cada caso, verifique se as retas r_1 e r_2 são paralelas, coincidentes, concorrentes ou reversas. Determine o ângulo e, caso exista, a interseção entre elas.

   (a) $r_1: x=1,\ y=t,\ z=1$ $\quad$ $r_2: x=s,\ y=0,\ z=1$

   (b) $r_1: x-3=\dfrac{z-2}{7};\ \ y=4$ $\quad$ $r_2:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{z-4}{14};\ \ y=8$

   (c) $r_1: x=1+3t,\ y=2+5t,\ z=2+7t$ $\quad$ $r_2: x=7+6s,\ y=12+10s,\ z=6+14s$

   (d) $r_1: x+1=\dfrac{y-1}{2};\ \ z=5$ $\quad$ $r_2: x=1+4s,\ y=5+2s,\ z=2+3s$

   (e) $r_1: x=1,\ y=3-s,\ z=5+2s$ $\quad$ $r_2: x=-4+5t,\ y=3+2t,\ z=-2+3t$

3. Em cada caso, estude a posição da reta r em relação ao plano π. Determine o ângulo entre r e π e, caso exista, o ponto onde a reta *fura* o plano.

(a) $r : x = -8 + 15t,\ y = 5 - 9t,\ z = 0 \quad \pi : 3x + 5y = 1$

(b) $r : x - 3 = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-2}{4} \quad \pi : x = 5 - 2\lambda,\ y = 1 - \lambda + 4\mu,\ z = 2 + \lambda - 2\mu$

(c) $r : x = 2 - s,\ y = 1 + 2s,\ z = 1 + s \quad \pi : x = 1 - \lambda - 4\mu,\ y = -2 + 2\lambda - 8\mu,\ z = 1 + \lambda - \mu$

(d) $r : \overrightarrow{OP} = (1,2,3) + t\,(2,-1,1) \quad \pi : x - 2y - 4z + 5 = 0.$

4. Em cada caso, determine a posição relativa e o ângulo entre os planos π_1 e π_2.

(a) $\pi_1 : 2x + y - z = 1 \quad \pi_2 : 3x - 5y + z = 4$

(b) $\pi_1 : x + 2y + 3z = 1 \quad \pi_2 : 2x + 4y + 6z = 2$

(c) $\pi_1 : 2x - 2y + 6z = 6 \quad \pi_2 : x = -3\lambda - \mu,\ y = -\mu\ \ z = \lambda$

(d) $\pi_1 : 3x + 6y + 3z = 27 \quad \pi_2 : 2x + 4y + 2z = 14$

2.4 Interseção de 3 Planos

Representemos por $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ e $\vec{n}_\gamma$ os vetores normais aos aos planos $\alpha,\ \beta$ e γ, respectivamente.

(1) Se $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] \neq 0$, então os planos $\alpha,\ \beta$ e γ se interceptam em um único ponto, cujas coordenadas podem ser encontradas pela Regra de Cramer, por Escalonamento ou qualquer outro método. **(Fig. 2.2)**

(2) No caso em que $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0$ e os três planos $\alpha,\ \beta$ e γ não são paralelos (nem coincidem) então ou eles se interceptam segundo uma reta ou eles não têm ponto em comum. Neste caso, para decidir sobre a interseção dos planos proceda do modo seguinte: primeiro encontre, caso exista, a reta r interseção entre dois deles, por exemplo, entre α e β e, depois, verifique se essa reta está contida no plano γ. Caso afirmativo a reta r será a interseção dos 3 planos. **(Fig. 2.1, Fig. 2.3 e Fig.2.4)**

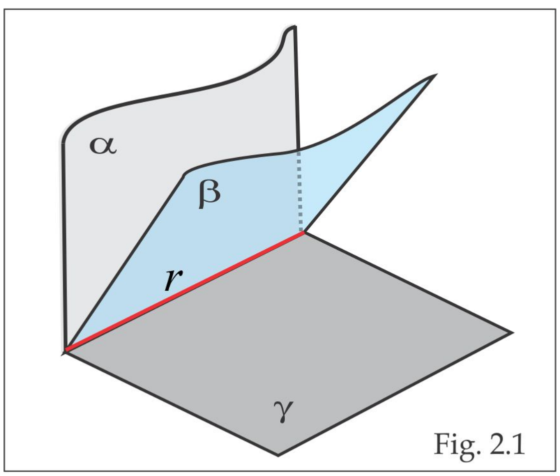

Fig. 2.1

$[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0$ e $\vec{n}_\alpha \cap \vec{n}_\beta \cap \vec{n} = r$

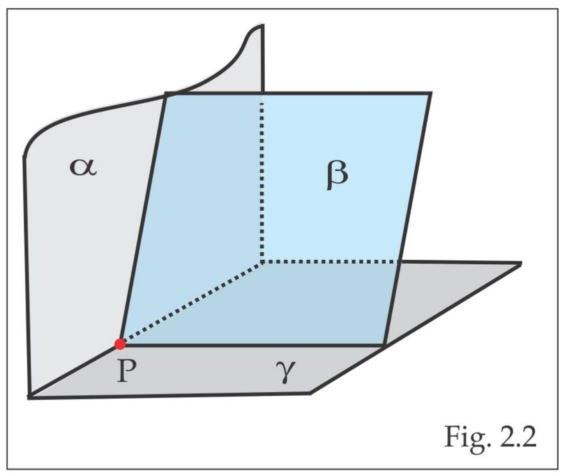

Fig. 2.2

$[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] \neq 0$ e $\vec{n}_\alpha \cap \vec{n}_\beta \cap \vec{n} = \{P\}$

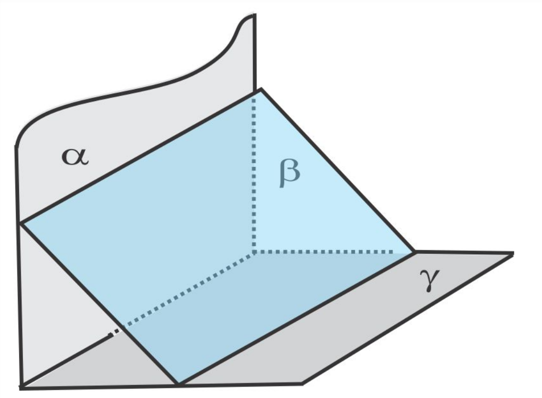

Fig. 2.3

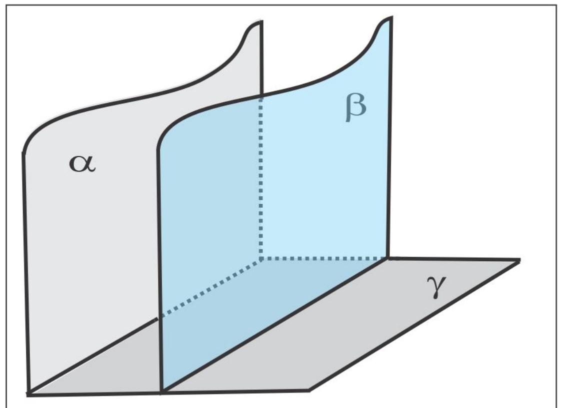

Fig. 2.4

$[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0$ e $\vec{n}_\alpha \cap \vec{n}_\beta \cap \vec{n} = \Phi$

$[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0$ e $\vec{n}_\alpha \cap \vec{n}_\beta \cap \vec{n} = \Phi$

As Figuras 2.1 e 2.2 correspondem ao caso em que os três planos se interceptam, enquanto as Figuras 2.3 e 2.4 ilustram situações onde não há ponto comum aos três planos, embora exista uma reta comum a dois deles.

1. Discuta e determine, caso exista, a interseção entre os planos π_1, π_2 e π_3.

(a)	$\pi_1 : x + y + z = 0$	$\pi_2 : x + 2y + z = 1$	$\pi_3 : x + y + 3z = 2$
(b)	$\pi_1 : x + y - 4z = 0$	$\pi_2 : x - y = 0$	$\pi_3 : x + 2y - 6z = 0$
(c)	$\pi_1 : x + 2y - z = 0$	$\pi_2 : 2x + 4y - 2z = 2$	$\pi_3 : 3x - y + z = 0$
(d)	$\pi_1 : x + 2y + z = 0$	$\pi_2 : 2x + 4y - z = -1$	$\pi_3 : x + 2y = 0$
(e)	$\pi_1 : x + y + z = 0$	$\pi_2 : -x + 2y - z = -4$	$\pi_3 : 3x + y + 3z = 0$
(f)	$\pi_1 : 2x - y + z = -1$	$\pi_2 : 3x + y + z = 1$	$\pi_3 : 6x + 2y + 2z = 0$

2.5 Questões de Revisão

1. Estude as interseções da reta $r : x = 3 + 2t,\ y = -1 + 5t,\ z = 2 - t$ com os planos e eixos coordenados.

2. Determine as interseções do plano $\pi : 3x + 2y - z = 5$ com os eixos e com os planos coordenados.

3. Mostre que as retas

$$r_1 : x = 2 + 3t,\ y = 1 + 2t,\ z = t \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = z + 1$$

são paralelas e determine o plano π que as contém.

4. Mostre que as retas

$$r_1 : \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = z \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x-3}{5} = y-1 = \frac{z}{3}$$

são concorrentes e determine o plano π que as contém.

5. Considere a reta $r : \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{m} = \dfrac{z+3}{2}$ e o plano $\pi : x - 3y + 6z + 7 = 0$. Determine, caso exista, o(s) valor(es) de m de modo que:

   (a) r seja paralela a π (b) r esteja contida em π (c) r intercepte π em um ponto.

6. Determine os valores de m e c para que a reta $r : \dfrac{x-2}{m} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{5-z}{2}$ e o plano $\pi : 3x - 2y + cz + 1 = 0$ sejam perpendiculares e encontre o ponto onde a reta intercepta o plano.

7. Considere a reta $r_1 : x = 2 + 3t,\ y = t,\ z = -t$. Determine duas retas r_2 e r_3, de modo que r_1 e r_2 sejam reversas e r_1 e r_3 concorrentes.

8. Calcule a distância do ponto $A(1,2,2)$ ao plano π que passa pelos pontos $B(-1,0,0)$, $C(1,0,1)$ e $D(-2,3,0)$.

9. Considere o ponto $A(1,2,-1)$ e determine o ponto B, simétrico de A, em relação:

   (a) à origem (b) à reta $r : x = 1 + t,\ y = t,\ z = 1t$

   (c) ao ponto $B(3,1,1)$ (d) ao plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$.

10. Seja r a reta determinada pela interseção dos planos $\pi_1 : x + 2y - z = 1$ e $\pi_2 : 2x - y + z = 0$. Encontre a reta que passa pelo ponto $A(1,0,1)$ e intercepta r ortogonalmente.

11. Uma reta r jaz no plano $\pi : x - y + z = 7$, passa no ponto $A(3,-3,1)$ e é ortogonal à reta $l : x = 1 + t,\ y = 1 + 2t,\ z = 1 + 3t$. Ache as equações da reta r e sua distância à origem.

12. Considere as retas reversas

$$r_1 : x = -1 + t,\ y = -3 + 2t,\ z = t \quad \text{e} \quad r_2 : x = -2 + s,\ y = 1 + s,\ z = s.$$

Determine um ponto A na reta r_1 e um ponto B na reta r_2, de modo que a reta que passa por A e B intercepta r_1 e r_2 ortogonalmente.

13. Encontre a reta que passa no ponto $A(1,-2,1)$ e intercepta as retas r_1 e r_2 do Exercício 12.

14. Determine o lugar geométrico dos pontos $P(x,y,0)$ que satisfazem à equação $x^2 - y^2 = 0$.

15. Encontre o ponto P_1 da reta $r : \begin{cases} 2x - y + z - 6 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ mais próximo de $P_0\,(1,2,1)$ e calcule $\operatorname{dist}(P_0; r)$.

16. Verifique que a reta $r : \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{4}$ está contida no plano $\pi : x - 2y + z = 6$.

17. Encontre dois planos ortogonais cuja interseção é a reta $r : x = -1 - 2t,\ y = -1 + 9t,\ z = 7t$.

18. Seja α o plano $z = 0$ e determine dois planos não paralelos β e γ tais que: (i) $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ e $\alpha \cap \gamma \neq \varnothing$ e (ii) $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \varnothing$.

19. Encontre a reta r que passa no ponto $P_0\,(3,6,4)$, intercepta o eixo z e é paralela ao plano $\pi : x - 3y + 5z = 6$.

20. Sejam $A,\ B$ e C as interseções do plano $\pi : 4x + 8y + z = 16$ com os eixos coordenados. Calcule a área do triângulo ABC.

21. Determine a equação do plano que passa nos pontos $A\,(1,2,1)$ e $B\,(1,3,3)$ e faz com o plano $\pi : x + y + 2z = 11$ um ângulo de $\pi/3$ rad

22. Calcule a altura do tetraedro de vértices $A\,(1,6,2)\,,\ B\,(2,3,0)\,,\ C\,(-2,-3,4)$ e $D\,(0,6,0)$, baixada do vértice A.

23. Dado um ponto P_0, a equação $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ representa o plano que passa por P_0 e é normal ao vetor $\vec{n}$. Identifique o lugar geométrico descrito pela desigualdade $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} > 0$.

24. Determine sob que condições os pontos $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$ estão do mesmo lado do plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.

25. Verifique que os planos $\pi_1 : x + 2y - z = 21$ e $\pi_2 : -2x - 4y + 2z = 10$ são paralelos e encontre o plano α eqüidistante de π_1 e π_2.

26. Determine o plano π que contém os pontos $A\,(1,2,3)$ e $B\,(-2,1,1)$, mas não intercepta o eixo x.

27. Considere a reta $r : x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct$. Interprete geometricamente as condições abaixo impostas à reta r.

    (a) $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (b) $a = 0$ (c) $a = 0$ e $b = 0$ (d) $5a - 3b + 7c = 0$.

28. Se α, β e γ são os ângulos diretores de um vetor unitário $\vec{u}$, mostre que a equação do plano que contém o ponto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ e é normal ao vetor $\vec{u}$ é:

$$(x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\cos\beta + (z - z_0)\cos\gamma = 0.$$

29. Interprete geometricamente as condições abaixo impostas ao plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.

    (a) $a = 0$ (b) $b = 0$ (c) $c = 0$ (d) $a = 0$ e $b = 0$ (e) $d = 0$.

30. Considere os pontos $A\,(2, -4, 6)$, $B\,(-4, 2, 2)$ e $C\,(1, -1, 0)$. Determine a mediatriz do segmento AB, que passa no ponto C.

31. Ache o lugar geométrico dos pontos $P\,(x, y, z)$ cuja distância ao plano $x - y = 0$ é igual a 9.

32. Determine o baricentro do triângulo de vértices $A\,(-1, -3, -4)$, $B\,(4, -2, 7)$ e $C\,(2, 3, -8)$.

33. Determine λ de modo que o ângulo entre as retas $r_1 : x = 1 + \lambda t,\ y = 1 + 3t,\ z = 5t$ e $r_2 : x = 1 + 2t,\ y = -3 - t,\ z = -1 + 2t$ seja $\pi/4$.

34. Determine, na forma paramétrica, as retas interseções do plano $\pi : x + y + z = 1$ com os planos coordenados. Esboce no 1º octante o plano π e destaque as interseseções.

35. Encontre o ponto do plano $\alpha : x + 3y - z + 6 = 0$ mais próximo do ponto $A\,(1, 1, 3)$.

36. Verifique que as retas $r_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+4}{-5} = \dfrac{z-2}{3}$ e $r_2 : x = 3 - 2t,\ y = -14 + 5t,\ z = 8 - 3t$ são coincidentes.

37. Determine condições para que a reta $r_1 : x = mz + p,\ y = nz + q$ esteja contida no plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.

38. Observe atentamente a Figura 2.5 abaixo, onde as retas r_1 e r_2 são descritas por:

$$r_1 : x = 1 - t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - 2t \quad \text{e} \quad r_2 : x = 2s,\ y = 1 + s,\ z = -2 - 3s.$$

    (a) Para a reta $r_i,\ i = 1, 2$, selecione um ponto P_i e um vetor paralelo (diretor) $\vec{v}_i$;

    (b) Verifique que: $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \neq \vec{0}$ e $r_1 \cap r_2 = \varnothing$. Deduza que as retas r_1 e r_2 são reversas;

    (c) Encontre o plano β que contém a reta r_2 e é paralelo à reta r_1;

    (d) Encontre o plano α que contém o ponto P_2 e é paralelo aos vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$;

(e) Determine o ponto A_1 de interseção da reta r_1 com o plano α;

(f) Encontre a reta l que passa pelo ponto A_1 e é paralela ao vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Deduza que l é ortogonal às retas r_1 e r_2;

(g) Determine o ponto A_2 de interseção da reta l com a reta r_2;

(h) Verifique que $\overrightarrow{A_1A_2} = \text{Proj}_{\vec{v}_1\times\vec{v}_2} \overrightarrow{P_1P_2}$, isto é, $\overrightarrow{A_1A_2}$ é a projeção ortogonal do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre o vetor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$;

(i) Considerando que a distância entre as retas r_1 e r_2 é o número real $\text{dist}\,(r_1, r_2) = ||\overrightarrow{A_1A_2}||$, deduza a seguinte fómula para a distância entre duas retas reversas:

$$\text{dist}\,(r_1, r_2) = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\right|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}. \tag{2.1}$$

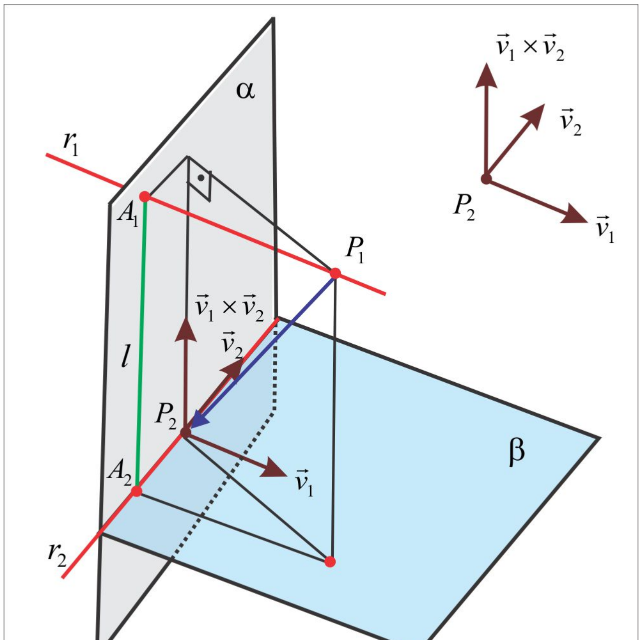

Fig. 2.5

Observação 2.1 *A fórmula da distância* (2.1) *se aplica, também, no caso em que as retas são concorrentes. Neste caso, é claro,* $\text{dist}\,(r_1, r_2) = 0$.

Observação 2.2 *Os pontos A_1 e A_2 referidos no Exercício 38 podem ser determinados diretamente a partir das relações:*

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{v}_1 = 0 \quad e \quad \overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{v}_2 = 0,$$

considerando $A_1\,(1-t, 1+t, 2-2t)$ *e* $A_2\,(2s, 1+s, 2-3s)$. *Comprove!*

RESPOSTAS & SUGESTÕES

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.1

1. V, V, F, V, V, F, V, F, F, V.

2. De cima para baixo, a seqüência é: 7, 4, 8, 3, 10, 6, 1, 9, 2 e 5.

3. (a) o ponto A é obtido com $\lambda = 0$ e $\mu = 0$; (b) com $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, obtemos $B(3,3,3)$ e com $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ obtemos $C(6,2,-1)$; (c) $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{k}$; (d) $\pi : x - 5y + 2z + 6 = 0$.

4. $x - y + z - 4 = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3 + \lambda - \mu,\ y = 1 - 2\lambda - \mu,\ z = 2 - 3\lambda$.

5. $\alpha : x - 2y + 3z + 3 = 0,\ B \notin \alpha$ e $C \in \alpha$.

6. Dados A, B, C, D e E em α, construímos : $\vec{v}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AB}||}$, $\vec{v}_2 = \dfrac{2\overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AC}||}$, $\vec{v}_3 = \dfrac{3\overrightarrow{AD}}{||\overrightarrow{AD}||}$ e $\vec{v}_4 = \dfrac{4\overrightarrow{AE}}{||\overrightarrow{AE}||}$.

7. $3x - 4y = 0$.

8. (a) qualquer ponto do tipo $(1, y, z)$ está no plano; (b) $\vec{n}_\alpha = 3\vec{i}$.

9. $x = 1 + 2\lambda + \mu,\ y = 2 + \lambda - \mu,\ z = 2 - \lambda - 2\mu$; ou $x - y + z = 1$.

10. $9x - y + 7z - 40 = 0$.

11. $m = 3$ e o plano não passa pela origem. Um plano que contém a origem é do tipo $ax + by + cz = 0$.

12. Dado $\pi : ax + by + cz + d = 0$, seja $\vec{v} = \dfrac{\lambda(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

13. $\vec{n} = \frac{15}{\sqrt{35}}(-3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$.

14. $2x - y - z = 6$.

15. $\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k})$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\vec{i} + \vec{k})$ e $\vec{w} = \frac{1}{3}(-\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k})$.

16. $y + 4z + 10 = 0$.

17. $x = \lambda + 2\mu,\ y = -\lambda - 5\mu,\ z = \lambda \quad \text{ou} \quad 5x + 2y - 3z = 0$.

18. $\alpha : x - y = 0$.

19. $2x - 4y + z + \frac{15}{2} = 0$.

20. (a) perpendiculares (b) paralelos.

21. (a) $m = 6$ (b) $m + 2n = 9$ (c) $7m - 3n = 2$.

22. (a) $m = 3,\ n = -4$ (b) $m = -2/3,\ n = 3$ (c) $m = -6/5,\ n = -10/3$.

23. o plano $4x - 3y + 5z = 4$ que passa no ponto médio e é ortogonal ao segmento AB.

24. (a) $y + 2 = 0$ (b) $x - 2 = 0$ (c) $9x - 3y - 4z - 20 = 0$ (d) $7x - y - 5z + 10 = 0$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.2

1. eixo $x : x = t,\ y = 0,\ z = 0$; eixo $y : x = 0,\ y = t,\ z = 0$; eixo $z : x = 0,\ y = 0,\ z = t$. O eixo x pode ser visto como interseção dos planos $y = 0$ e $z = 0$.

2. (a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$; (b) $x = 1 + 3t,\ y = 2 - t,\ z = 2 + t$ (c) $\dfrac{x-1}{3} = 2 - y = z - 2$.

3. $x = 4t,\ y = 2 - 2t,\ z = 3 + 3t$.

4. (a) $x - 1 = 2 - y = z - 3$ (b) $x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = 3 + t$.

5. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$, $0 \le t \le 1$ ou $P = (1 - t)\,A + tB,\ 0 \le t \le 1$.

6. $3x + z = 6;\ y = 4$.

7. $x = 1 + t,\ y = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}t,\ z = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}t$ ou $\overrightarrow{OP} = (1, -4/5, 3/2) + t(\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j} - \frac{1}{6}\vec{k})$.

8. (a) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})$ (b) $\vec{v} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(\vec{i} - 7\vec{k})$.

9. $x = 4t,\ y = 16t,\ z = -14t$.

10. $r : x = -4t,\ y = 1 + 3t,\ z = -1 + t$.

11. $r : x = -1 - 4t,\ y = 1 + 4t,\ z = 0$.

12. Além da condição $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{v}$ devem ser coplanares. Considerando $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \frac{20}{17}\vec{i} + \frac{19}{17}\vec{j} + \vec{k}$, encontramos $\vec{v} = -\frac{3}{14}\vec{a} + \frac{17}{14}\vec{b}$.

13. $8x + 5y + 17z - 16 = 0$.

14. $r : x = 1 - t,\ y = 2 + t,\ z = -1 - t$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.3

1. Usar os vetores diretores e a distância.

2. (a) concorrentes em $A\,(1,0,1)$ e $(r_1,r_2) = \pi/2$ (b) paralelas (c) paralelas (d) reversas e $\cos(r_1,r_2) = \frac{8}{\sqrt{145}}$; (e) concorrentes em $A\,(1,5,1)$ e $\cos(r_1,r_2) = \frac{4}{\sqrt{190}}$.

3. (a) $r \subset \pi$ (b) $r \perp \pi$; $A\,(3,2,2)$ (c) $r//\pi$ (d) $r//\pi$.

4. (a) ortogonais, com reta comum $r: x = \frac{9}{13} + \frac{4}{13}t,\ y = -\frac{5}{13} + \frac{5}{13}t,\ z = t$ (b) cooincidentes (c) paralelos (d) paralelos.

EXERCÍCIO COMPLEMENTAR 2.4

1. (a) $P\,(-2,1,1)$ (b) $x = 2t,\ y = 2t,\ z = t$ (c) não há interseção (d) não há interseção (e) não há interseção (f) não há interseção.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES 2.5

1. A reta intercepta os planos xy, xz e yz, respectivamente nos pontos $A\,(7,9,0)$, $B(\frac{17}{5},0,\frac{9}{5})$ e $C(0,-\frac{17}{2},\frac{7}{2})$. Não há interseção com os eixos coordenados.

2. O plano π intercepta os eixos x, y e z, respectivamente, nos pontos $A\,(5/3,0,0)$, $B(0,5/2,0)$ e $C(0,0,-5)$. A interseção com o plano xy é a reta $r_1 : x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t,\ y = t,\ z = 0$; com o plano xz a reta $r_2 : x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t,\ y = 0,\ z = t$; e com o plano yz a reta $r_3 : x = 0,\ y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t,\ z = t$.

3. $\pi : 2x - 4y + 2z = 0$.

4. $\pi : 5x - 4y - 7z = 11$.

5. (a) $m = 5$ (b) não existe um tal m (c) $m \neq 5$.

6. $m = -6,\ c = 1;\ A(-1,1,4)$.

7. $r_2 : x = t,\ y = 1 + t,\ z = t;\quad r_1 : x = 2,\ y = t,\ z = t$.

8. $\text{dist}\,(A;\pi) = 4/\sqrt{46}$.

9. (a) $B(-1,-2,1)$ (b) $B(5,0,3)$ (c) $B(5/3,-4/3,5/3)$ (d) $B(-3,0,1)$.

10. $x = 1 - 31t,\ y = 23t,\ z = 1 - 20t.$

11. $x = 3 - 5t,\ y = -3 - 2t,\ z = 1 + 3t;$ $\operatorname{dist}(O;r) = \sqrt{\frac{343}{19}}.$

12. $A(7/2, 6, 9/2)$ e $B(3,6,5)$.

13. A reta $x = 1,\ y = 1 + 3t, z = 2 + t.$

14. As retas $r_1 : x - y = 0,\ z = 0$ e $r_2 : x + y = 0,\ z = 0.$

15. $P_1\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\operatorname{dist}(P_0;r) = \sqrt{42}/3.$

16. Na forma paramétrica, temos: $r : x = 3 + 2t,\ y = -2 + 3t$ e $z = -1 + 4t$, de modo que:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= (3 + 2t) - 2(-2 + 3t) + (-1 + 4t) \\ &= 2t - 6t + 4t + 6 = 6. \end{aligned}$$

17. $\pi : 7x + 2z + 7 = 0,\ \alpha : 18x + 53y - 63z + 71 = 0.$

18. $\beta : y = 0$ e $\gamma : y + z = 1.$

19. $r : x = 3t,\ y = 6t,\ z = 1 - 4t.$

20. 36.

21. $5x - 2\sqrt{15}y + \sqrt{15}z = 5 - 3\sqrt{15}.$

22. 15/7.

23. O conjunto dos pontos do lado do plano para o qual $\vec{n}$ aponta.

24. As expressões $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ e $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$ devem ter o mesmo sinal.

25. $\alpha : x + 2y - z = 8.$

26. $2y - z = 1.$

27. (a) passa pela origem (b) perpendicular ao eixo x (c) paralela ao eixo z (d) perpendicular ao vetor $5\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$.

28. Basta observar que $\vec{u} = (\cos\alpha)\,\vec{i} + (\cos\beta)\,\vec{j} + (\cos\gamma)\,\vec{k}$ e que a equação do plano é: $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0.$

29. (a) paralelo ao eixo x (b) paralelo ao eixo y (c) paralelo ao eixo z (d) paralelo ao plano xy (e) passa pela origem.

30. $x = -1 + 2t,\ y = -1,\ z = 4 - 4t$

31. os planos $x - y = \pm 9\sqrt{2}$

32. $(5/3, -2/3, -19/3)$

33. $\lambda = 4$ ou $\lambda = 52$

34. Ilustração gráfica na Figura 2.6.

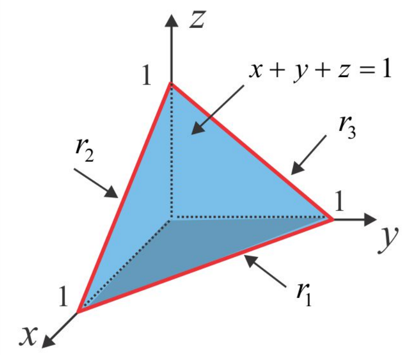

Fig. 2.6

(i) No plano xy a reta interseção é: $r_1 : x = t,\ y = 1 - t,\ z = 0.$

(ii) No plano xz a reta interseção é: $r_2 : x = t,\ y = 0,\ z = 1 - t.$

(iii) No plano yz a reta interseção é: $r_3 : x = 0,\ y = t,\ z = 1 - t.$

35. $(4/11, -10/11, 40/11)$

36. Um ponto genérico da reta r_2 é dado por $P\,(3 - 2t, -14 + 5t, 8 - 3t)$. Verifique que este ponto P pertence à reta r_1.

37. $ap + bq + d = 0$ e $am + bn + c = 0$.

38. **(a)** $P_1\,(1, 1, 2,),\ \vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k};\ P_2\,(0, 1, -2),\ \vec{v}_2 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$

(b) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{i} - 7\vec{j} - 3\vec{k}$. Se existisse um ponto comum às retas r_1 e r_2, chegaríamos ao seguinte sistema impossível:

$$\left| \begin{array}{l} 1 - t = 2s \\ 1 + t = 1 + s \\ 2 - t = -2 - 3s \end{array} \right.$$

(c) $\beta : x + 7y + 3z = 1$.

(d) $\alpha : 24x - 9y + 13z - +17 = 0$.

(e) $A_1(-\frac{17}{59}, \frac{135}{59}, -\frac{34}{59})$.

(f) $x = -\frac{17}{59} - t,\ y = \frac{135}{59} - 7t,\ z = -\frac{34}{59} - 3t$.

(g) $A_2(-\frac{30}{59}, \frac{44}{59}, -\frac{73}{59})$.

(h) Recorde-se que:

$$\text{Proj}_{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right) = \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}.$$

(i) Segue diretamente de (h).