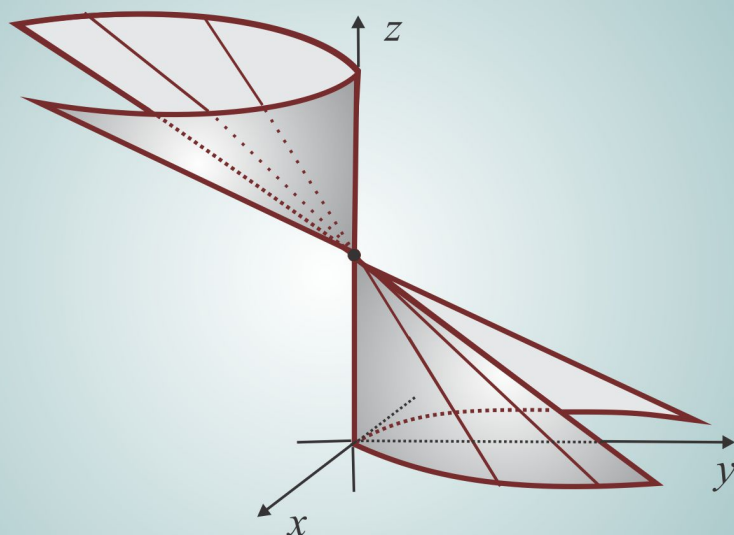


Vetores e Álgebra Linear

Marivaldo P Matos



VETORES & ÁLGEBRA LINEAR

Marivaldo P Matos

Sumário

1. Vetores Geométricos	1
1.1 Coordenadas Cartesianas	2
1.1.1 Distância entre dois Pontos	6
1.2 Vetores Geométricos: conceito e operações	8
1.2.1 Equipolência & Conceito de Vetor	9
1.2.2 Soma & Produto por Escalar	11
1.2.3 Dependência Linear	15
Escrevendo para Aprender 1.1	21
1.3 Vetores em Coordenadas	24
Escrevendo para Aprender 1.2	27
1.4 Produto Interno	29
1.4.1 Propriedades & Consequências do Produto Interno	31
1.5 Produto Vetorial	32
1.5.1 Propriedades & Consequências do Produto Vetorial	35
1.6 Produto Misto	36
1.6.1 Propriedades & Consequências do Produto Misto	37
Escrevendo para Aprender 1.3	38
1.7 Regra de Cramer	41
Questões de Revisão	43
Respostas & Sugestões	46
Escrevendo para Aprender 1.1	46
Escrevendo para Aprender 1.2	50
Escrevendo para Aprender 1.3	51
Questões de Revisão	54

2.	Retas & Planos	59
2.1	O plano no Espaço \mathbb{R}^3	61
2.1.1	Equação Normal do Plano	61
2.1.2	Plano determinado por 3 Pontos	63
2.1.3	Posição Relativa entre dois Planos	65
	Escrevendo para Aprender 2.1	68
2.2	A Reta no Espaço \mathbb{R}^3	71
2.2.1	Posição Relativa Reta \times Plano	73
	Escrevendo para Aprender 2.2	74
2.3	Distâncias	77
2.3.1	Distância de Ponto a Plano	77
2.3.2	Distância de Ponto a Reta	79
2.3.3	Distância entre duas Retas	81
	Escrevendo para Aprender 2.3	84
2.4	Interseção de três planos	86
	Escrevendo para Aprender 2.4	86
	Respostas & Sugestões	88
	Escrevendo para Aprender 2.1	88
	Escrevendo para Aprender 2.2	89
	Escrevendo para Aprender 2.3	91
	Escrevendo para Aprender 2.4	92
3.	As Cônicas	93
3.1	A circunferência	95
	Escrevendo para Aprender 3.1	97
3.2	A Elipse	99
3.2.1	Conceito & Equação Reduzida	100
3.2.2	Gráficos & Elementos Principais	101
3.2.3	Translação da Elipse	103
	Escrevendo para Aprender 3.2	104
3.3	A Hipérbole	106
3.3.1	Conceito & Equação Reduzida	107
3.3.2	Gráficos & Elementos Principais	108

3.3.3	Hipérbole Equilátera	112
	Escrevendo para Aprender 3.3	118
3.4	A Parábola	119
3.4.1	O Foco e a Diretriz da Parábola	121
3.4.2	Translação da Parábola	123
	Escrevendo para Aprender 3.4	125
3.5	Equação Geral do 2º Grau em Duas Variáveis	126
3.5.1	Translação de Eixos	127
3.5.2	Rotação de Eixos	129
3.5.3	O ângulo de rotação	130
	Escrevendo para Aprender 3.5	131
3.6	O Foco e a Diretriz de uma Cônica	132
	Escrevendo para Aprender 3.6	133
	Respostas & Sugestões	133
	Escrevendo para Aprender 3.1	133
	Escrevendo para Aprender 3.2	134
	Escrevendo para Aprender 3.3	135
	Escrevendo para Aprender 3.4	136
	Escrevendo para Aprender 3.5	137
	Escrevendo para Aprender 3.6	137
4.	Superfícies & Quádricas	139
4.1	Superfície Cilíndrica	141
	Escrevendo para Aprender 4.1	143
4.2	Superfície Cônica	144
4.2.1	Cone de Revolução	145
	Escrevendo para Aprender 4.2	145
4.3	Superfície de Revolução	146
4.3.1	Geratriz na Forma Explícita	146
4.3.2	Quádricas de Revolução	149
	Escrevendo para Aprender 4.3	152
4.4	Equações & Gráficos	154
	O Elipsoide	156

O Hiperboloide de uma Folha	158
O Hiperboloide de duas Folha	159
O Cone Quádrico	160
O Paraboloides Eíptico	163
O Paraboloides Hiperbólico	164
Escrevendo para Aprender 4.4	168
Respostas & Sugestões	169
Escrevendo para Aprender 4.1	169
Escrevendo para Aprender 4.2	169
Escrevendo para Aprender 4.3	169
Escrevendo para Aprender 4.4	171
5. Espaços Vetoriais	139
5.1 Espaço Vetorial	139
6. Transformações Lineares	139
6.1 Núcleo & Imagem	139
7. Produto Interno	139
7.1 Produto Interno	139
8. Diagonalização	139
8.8 Diagonalização	139



Introdução

Os conceitos de *ponto*, *reta* e *plano* são primitivos e as relações entre esses conceitos são estabelecidos por meio de *axiomas*¹ de geometria elementar. Os pontos serão anotados por A, B, P, Q, \dots etc, enquanto as retas por r, s, l, \dots etc. Já os planos serão representados pelas letras $\alpha, \beta, \gamma, \pi, \dots$ etc, do alfabeto grego.

Axioma 1.0.1 *Três pontos A, B e C , não colineares, ou não alinhados, determinam um único plano α . Veja a Figura 1.1.*

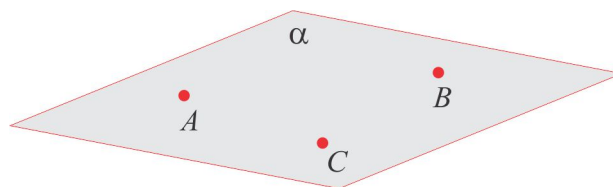


Figura 1.1: Plano definido por 3 pontos.

Axioma 1.0.2 *Se dois pontos de uma mesma reta r estão em um plano α , então a reta r está inteiramente contida no plano α , como ilustra a Figura 1.2.*

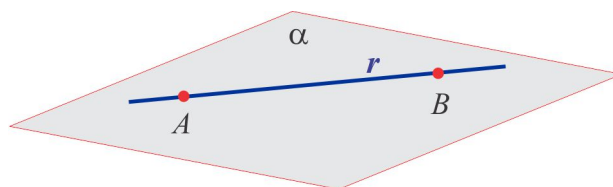
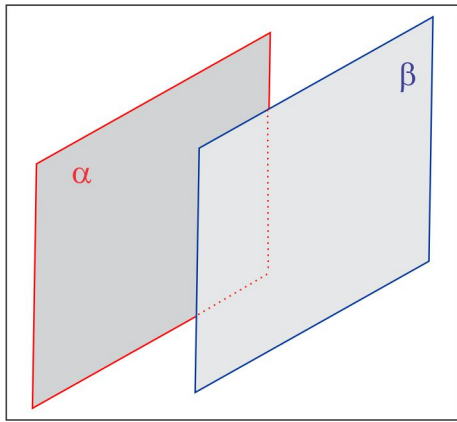
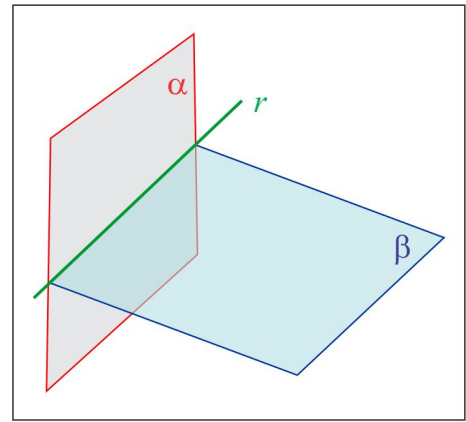


Figura 1.2: Reta r contida no plano α .

Axioma 1.0.3 *Dois planos α e β ou não se interceptam, neste caso eles são paralelos e anotamos $\alpha \cap \beta = \emptyset$, ou têm uma reta r em comum e anotamos $\alpha \cap \beta = r$. Veja as Figuras 1.3 e 1.4.*

¹Por *axioma* entendemos uma afirmação verdadeira, desprovida de demonstração.

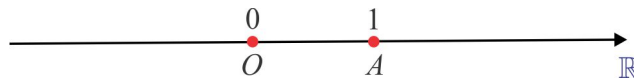
Figura 1.3: $\alpha \cap \beta = \emptyset$ Figura 1.4: $\alpha \cap \beta = r$

No Capítulo 2 descreveremos de forma analítica, isto é, por meio de equações, o plano α referido no Axioma 1.0.1 e a reta r referida no Axioma 1.0.2. Também será objeto de estudo a posição relativa entre dois e três planos.

1.1 Coordenadas Cartesianas

Para motivar a apresentação das coordenadas cartesianas em três configurações distintas vamos identificar o *Lugar Geométrico*² descrito pela equação: $x = 1$. Devemos ter em mente que um ponto é caracterizado por sua(s) coordenada(s), de acordo com a configuração na qual ele está inserido.

■ SITUAÇÃO 1 No eixo real \mathbb{R} (espaço unidimensional) os números representam pontos desse eixo e a equação $x = 1$ representa o ponto à direita e distante uma unidade da origem, como na Figura 1.5.

Figura 1.5: O Eixo real \mathbb{R} .

■ SITUAÇÃO 2 No plano cartesiano \mathbb{R}^2 , ou plano xy (espaço bidimensional) um ponto P é caracterizado por um par ordenado (x, y) de números reais, denominados coordenadas cartesianas do ponto P .

²Lugar Geométrico é um conjunto de pontos que atendem a uma equação.

O plano \mathbb{R}^2 é representado graficamente por um par de eixos orientados e mutuamente perpendiculares, denominados eixo Ox e eixo Oy . Normalmente, representa-se o eixo Ox (eixo das *abscissas*) na posição horizontal e o eixo Oy (eixo das *ordenadas*) na vertical, como ilustra a Figura 1.6. $P(x, y)$

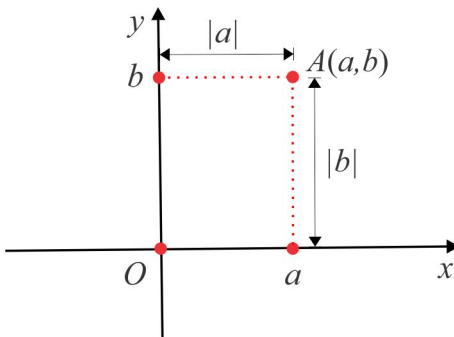


Figura 1.6: O plano cartesiano \mathbb{R}^2 .

A abscissa x de um ponto representa, em valor absoluto, a distância do ponto ao eixo Oy , enquanto a ordenada y representa, em valor absoluto, a distância do ponto ao eixo Ox . Dito isso, os pontos do eixo Ox são da forma $(x, 0)$ e os do eixo Oy da forma $(0, y)$. Em \mathbb{R}^2 uma equação do tipo $ax + by + c = 0$, do primeiro grau nas variáveis x e y , representa graficamente uma reta r , como na Figura 1.7; no caso em que $a \neq 0$ e $b = 0$ trata-se de uma reta vertical pelo ponto $A(-c/a, 0)$. Assim, a equação $x = 1$ representa a reta vertical s pelo ponto $A(1, 0)$, como ilustra a Figura 1.8.

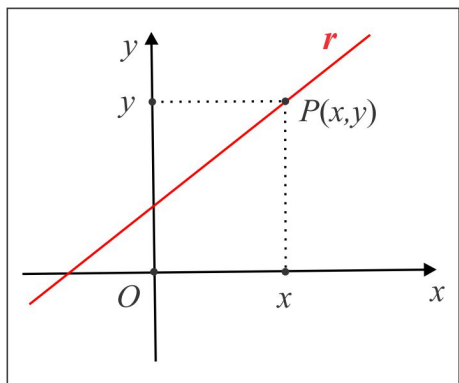


Figura 1.7: Reta $r : ax + by + c = 0$

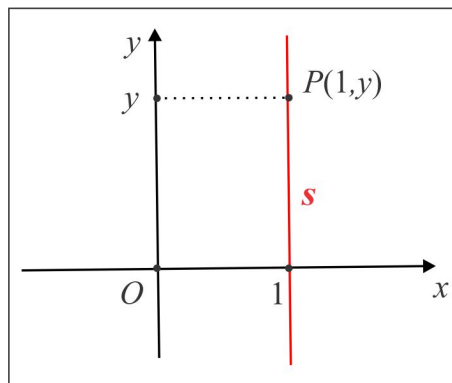


Figura 1.8: Reta $s : x = 1$

PONTOS SIMÉTRICOS NO \mathbb{R}^2 No traçado do gráfico de uma curva do plano xy é importante observarmos a simetria da curva em relação aos eixos Ox e Oy , a partir da equação que descreve a

curva. Por exemplo, a equação $y = x^2$, que descreve uma parábola, permanece inalterada ao trocarmos x por $-x$ e isto indica que a curva é simétrica em relação ao eixo Oy . A Figura 1.9 ilustra os pontos $B(-x, y)$, $D(x, -y)$ e $C(-x, -y)$ simétricos de um dado ponto $A(x, y)$ em relação ao eixo Oy , ao eixo Ox e à origem, respectivamente.

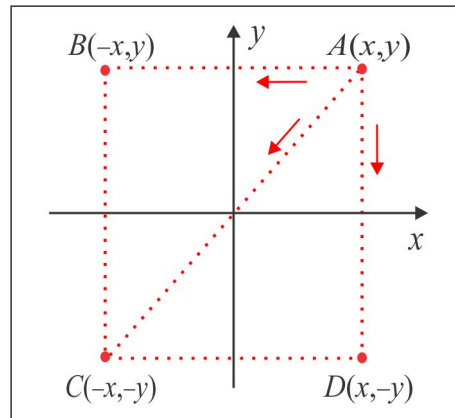


Figura 1.9: Pontos Simétricos.

■ **SITUAÇÃO 3** No espaço tridimensional $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (produto cartesiano de três cópias de \mathbb{R}), cuja configuração geométrica corresponde a três eixos mutuamente perpendiculares, os pontos são caracterizados por três coordenadas cartesianas: a abscissa x , a ordenada y e a cota z , e representados por $P(x, y, z)$. Essas coordenadas medem, em valor absoluto, as distâncias do ponto P aos planos coordenados: $|x|$ é a distância do ponto P ao plano yz ; $|y|$ é a distância do ponto P ao plano xz e $|z|$ é a distância do ponto P ao plano xy .

No espaço \mathbb{R}^3 , além dos eixos Ox , Oy e Oz , destacamos três planos coordenados: o plano xy , cujos pontos têm cota $z = 0$; o plano xz , cujos pontos têm ordenada $y = 0$; o plano yz , constituídos dos pontos com abscissa $x = 0$. Na Figura 1.10 ilustramos a porção do espaço \mathbb{R}^3 constituída dos pontos $P(x, y, z)$ em que x, y e z são não negativos. Esta porção recebe o nome de 1º Octante. Existem oito octantes definidos de acordo com os sinais de x, y e z . Identifique-os! É oportuno ressaltar que o eixo Ox é a reta interseção do plano xy com o plano xz ; o eixo Oy é a reta interseção do plano xy com o plano yz e o eixo Oz é a reta interseção do plano xz com o plano yz .

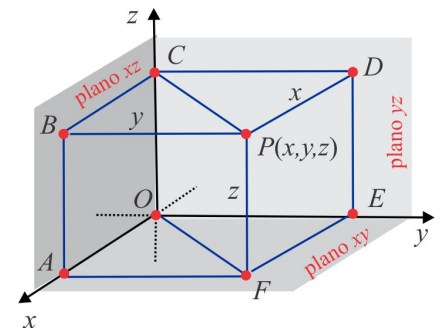


Figura 1.10: O Espaço \mathbb{R}^3

A tabela abaixo mostra as particularidades dos pontos do \mathbb{R}^3 situados em algum eixo ou plano

coordenado.

Eixo Ox	Eixo Oy	Eixo Oz	Plano xy	Plano xz	Plano yz
$A(x, 0, 0)$	$B(0, y, 0)$	$C(0, 0, z)$	$D(x, y, 0)$	$E(x, 0, z)$	$F(0, y, z)$

sendo x, y e z números reais arbitrários.

Para localizar o ponto $P(x, y, z)$ no espaço, procedemos da seguinte forma:

- (i) Marcamos nos respectivos eixos os valores das coordenadas x, y e z do ponto P e identificamos os pontos $A(x, 0, 0)$, $B(0, y, 0)$ e $C(0, 0, z)$.
- (ii) Pelo ponto A traçamos uma paralela ao eixo Oy e pelo ponto B uma paralela ao eixo Ox . Essas paralelas encontram-se no ponto $D(x, y, 0)$ do plano xy .
- (iii) Pelo ponto D traçamos uma paralela ao eixo Oz e pelo ponto C uma paralela ao segmento OD . Essa paralelas encontram-se no ponto $P(x, y, z)$.

EXEMPLO 1.1.1 Localizar os pontos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(1, 1, 0)$ e $E(1, 1, 1)$.

Solução Inicialmente, observamos que os pontos A, B e C estão situados sobre os eixos Ox, Oy e Oz , respectivamente, e o ponto D está situado sobre o plano xy , fora dos eixos. O ponto E possui as três coordenadas não nulas e isso indica que o ponto encontra-se fora dos planos coordenados, como ilustra a Figura 1.17.

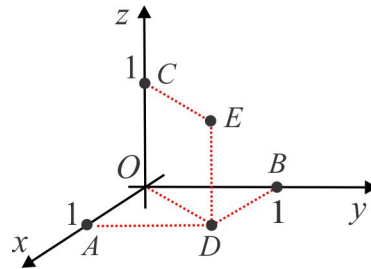
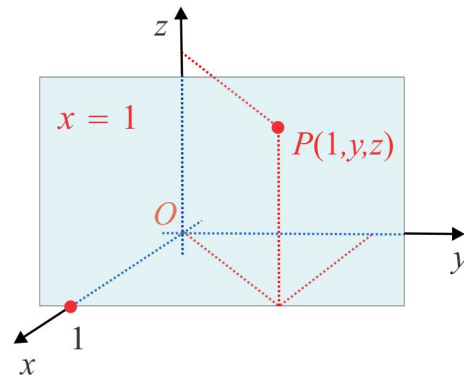


Figura 1.11: Exemplo 1.1.1

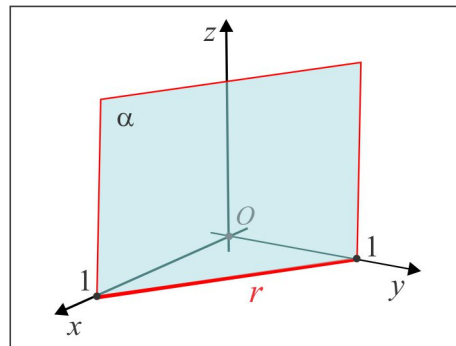
A equação $x = 1$ descreve, agora no espaço \mathbb{R}^3 , o conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ distantes uma unidade do plano yz . Esse conjunto de pontos, ilustrado na Figura 1.18, é o plano paralelo ao plano yz , constituído dos pontos $P(1, y, z)$, com y e z números reais arbitrários.

Figura 1.12: O plano $x = 1$.

EXEMPLO 1.1.2 Como veremos adiante, um plano será descrito em coordenadas cartesianas por uma equação do primeiro grau nas variáveis x , y e z , sob a forma:

$$ax + by + cz + d = 0, \quad (1.1)$$

sendo a, b, c e d números reais arbitrários. Por exemplo, a equação $x + y = 1$ representa, no espaço \mathbb{R}^3 , um plano α e este não passa pela origem, porque a equação não é satisfeita para $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. A Figura 2.4 ilustra o plano α , onde destacamos a reta r , interseção desse plano com o plano xy .

Figura 1.13: O plano $\alpha : x + y = 1$.

1.1.1 Distância entre dois Pontos

A fórmula da distância entre dois pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ do \mathbb{R}^3 é estabelecida a partir do Teorema de Pitágoras. Vejamos as fórmulas nas três configurações.

- (i) NO EIXO REAL \mathbb{R} : Na Figura 1.14, ilustramos dois pontos A e B do eixo real \mathbb{R} , identificados com os números x_A e x_B , respectivamente. A distância entre os pontos A e B é dada por

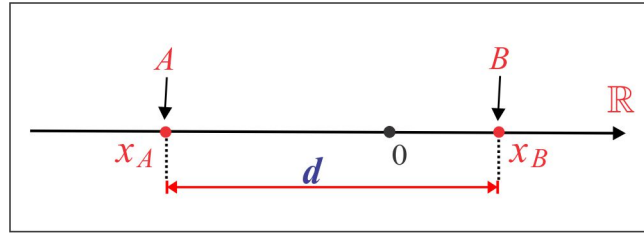


Figura 1.14: Distância em \mathbb{R} .

$$\text{dist}(A; B) = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}. \quad (1.2)$$

- (ii) NO PLANO \mathbb{R}^2 : Em dimensão $n = 2$ (no plano cartesiano xy), consideremos dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, como ilustrado na Figura ???. Vemos que $AC = |x_B - x_A|$ e $BC = |y_B - y_A|$ e do Teorema de Pitágoras segue a seguinte fórmula da distância entre os pontos A e B :

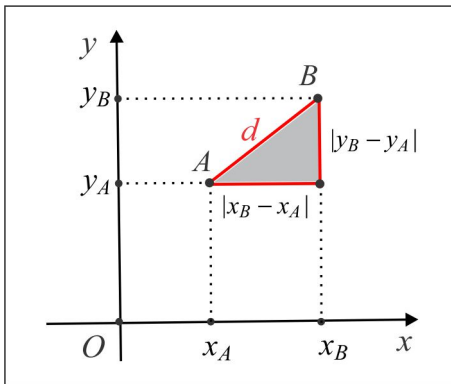
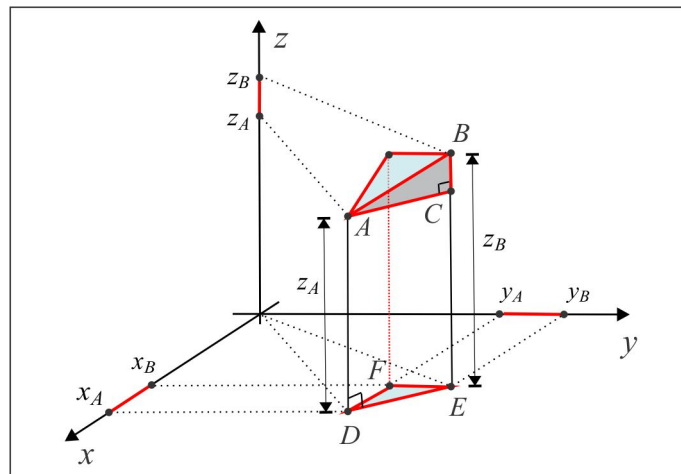


Figura 1.15: Distância em \mathbb{R}^2 .

$$\text{dist}(A; B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \quad (1.3)$$

- (iii) NO ESPAÇO \mathbb{R}^3 : No espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , consideremos os pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, como ilustrado na Figura 1.16, onde vemos os triângulos retângulos ABC e DEF em que: $EF = |y_B - y_A|$, $DF = |x_B - x_A|$ e $BC = |z_B - z_A|$. Do Teorema de Pitágoras, resulta:

$$|DE|^2 = |DF|^2 + |EF|^2 \quad \text{e} \quad |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$

Figura 1.16: Distância em \mathbb{R}^3 .

e por substituição direta, encontramos:

$$\text{dist}(A; B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \quad (1.4)$$

EXEMPLO 1.1.3 Calcular a distância entre os pontos $A(1, -2, 3)$ e $B(0, 2, -1)$.

Solução: O cálculo é feito por aplicação direta da fórmula da distância (1.4). Temos:

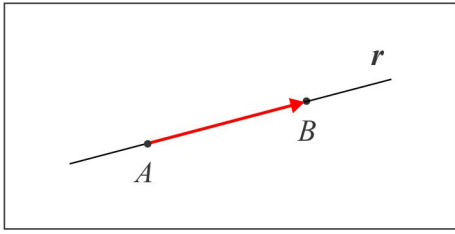
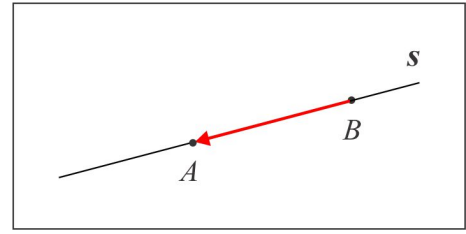
$$\text{dist}(A; B) = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{33} \simeq 5.74.$$

1.2 Vetores Geométricos: conceito e operações

Sobre uma reta r consideremos dois pontos A e B . O segmento orientado com origem A e extremidade B é indicado por AB , nessa ordem. No caso em que $A = B$, o segmento orientado reduz-se a um ponto (torna-se nulo) e será indicado por AA ou BB . Um segmento orientado AB possui três características fundamentais:

- ▶ **COMPRIMENTO:** a distância do ponto A ao ponto B (comprimento do segmento AB).
- ▶ **DIREÇÃO:** a reta suporte r .
- ▶ **SENTIDO:** orientação de A (origem) para B (extremidade).

Neste contexto, é oportuno ressaltar que os segmentos orientados AB e BA são distintos, no caso em

Figura 1.17: Segmento Orientado AB .Figura 1.18: Segmento Orientado BA .

que $A \neq B$. Embora eles tenham mesmo comprimento e mesma direção, eles têm sentidos opostos.

1.2.1 Equipolência & Conceito de Vetor

Dois segmentos orientados AB e CD são ditos *Equipolentes* quando possuírem mesmo comprimento, mesmo sentido e retas suportes paralelas ou coincidentes. Em outras palavras, quando ocorrer uma das situações abaixo:

- ▶ **SITUAÇÃO 1:** $A = C$ e $B = D$. Neste caso eles coincidem.
- ▶ **SITUAÇÃO 2:** AB e CD são distintos, mas, têm mesmo comprimento, mesmo sentido e direções (retas suportes) paralelas ou coincidentes. Neste caso, os segmentos orientados ou são colineares ou o quadrilátero de vértices A, B, C e D é um paralelogramo.

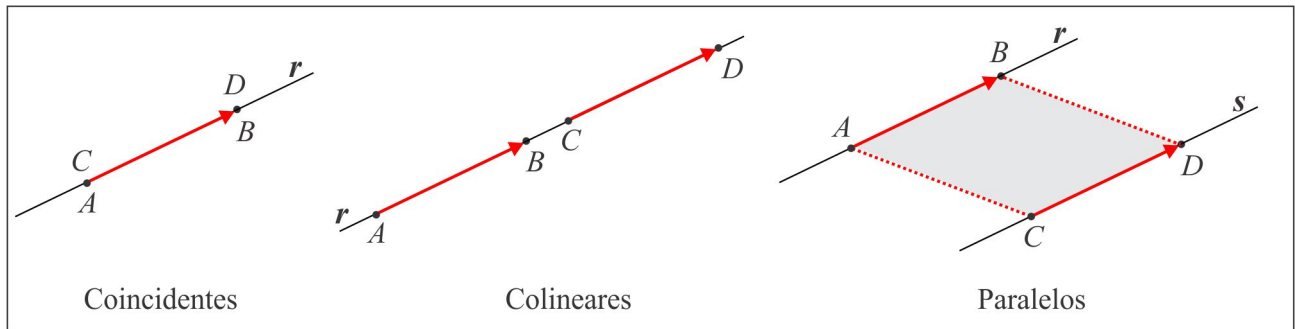


Figura 1.19: Segmentos Orientados Equipolentes.

OBSERVAÇÃO 1.2.1 Anota-se $AB \sim CD$ para indicar que os segmentos orientados AB e CD são equipolentes. Assim, $AA \sim BB$ (dois pontos, vistos como segmentos orientados, são equipolentes) e a relação de equipolência goza das seguintes propriedades:

- (i) **Reflexiva:** $AB \sim AB$. (todo segmento orientado é equipolente a si mesmo)

(ii) **Simétrica:** $AB \sim CD \Rightarrow CD \sim AB$.

(iii) **Transitiva:** $AB \sim CD$ e $CD \sim EF \Rightarrow AB \sim EF$.

A noção de segmentos orientados equipolentes além de servir de base para o conceito de vetor, dará consistência às operações algébricas entre vetores.

Dado um segmento orientado AB , qualquer outro segmento orientado equipolente a AB terá mesma direção, mesmo comprimento e mesmo sentido de AB e a única diferença possível entre eles é a posição que eles ocupam no espaço. Apesar dessa diferença, mantendo-se comprimento, direção e sentido, qualquer um deles pode ser transportado de modo a coincidir com o segmento orientado AB . É natural pensar em segmentos orientados equipolentes como representantes de um mesmo objeto matemático, aqui denominado *Vetor* representado ou determinado pelo segmento orientado AB . O vetor determinado pelo segmento orientado AB é normalmente indicado por \overrightarrow{AB} ; também se usa \vec{a} , \vec{b} , \vec{u} , \vec{v} , ... etc. para representar vetores. Um ponto do espaço, visto como segmento orientado, representa o vetor nulo, indicado por $\vec{0}$ ou \overrightarrow{AA} , \overrightarrow{BB} , \overrightarrow{CC} , ... etc.. Assim:

$$\overrightarrow{AA} = \vec{0}, \overrightarrow{BB} = \vec{0}, \overrightarrow{CC} = \vec{0}, \dots \text{etc.}$$

A Figura 1.20 exibe quatro segmentos orientados equipolentes, com origens em pontos distintos, representando o mesmo vetor \vec{v} .

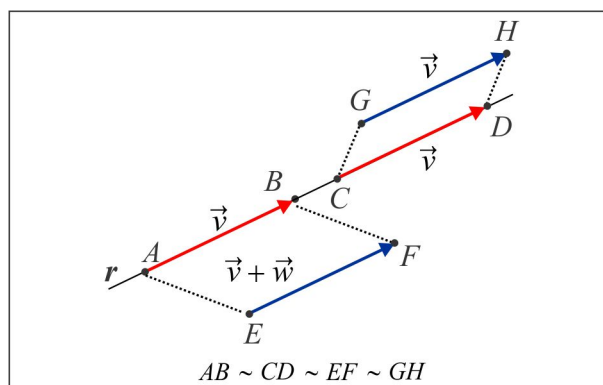


Figura 1.20: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

DEFINIÇÃO 1.2.2 O Vetor determinado pelo segmento orientado AB é, por definição, a coleção de todos segmentos orientados do espaço, equipolentes a AB .

CONSEQUÊNCIAS DA DEFINIÇÃO: A partir da definição de vetor, decorrem os seguintes fatos:

(i) Dois segmentos orientados equipolentes representam o mesmo vetor. Em símbolos, temos:

$$AB \sim CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

(ii) Outro fato interessante diz respeito ao caráter "flutuante" do vetor. Dados um segmento orientado AB e um ponto P do espaço, existe um único segmento orientado PQ , com origem em P , equipolente a AB . O ponto Q é determinado de modo que o quadrilátero $ABQP$ seja um paralelogramo, como ilustra a Figura 1.21.

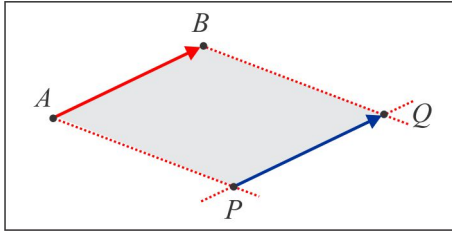


Figura 1.21: $AB \sim PQ$ e $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$.

Esse caráter flutuante estabelece que um dado vetor \vec{a} tem exatamente um representante com origem em cada ponto do espaço.

1.2.2 Soma & Produto por Escalar

O termo escalar será usado como sinônimo de número real e a soma de vetores é motivada pela soma de forças em mecânica, por meio da construção do paralelogramo, como ilustrado na Figura 1.22. As grandezas que serão abordadas a partir de agora são de duas naturezas: vetorial e escalar.

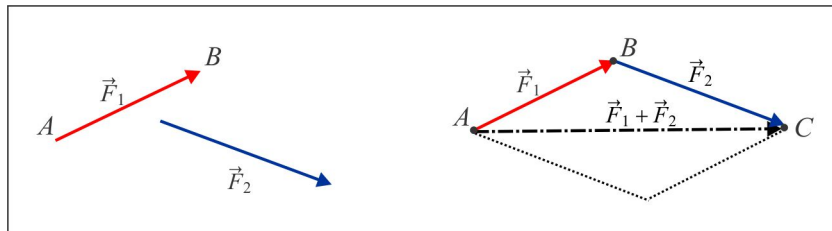


Figura 1.22: Soma de Forças em Mecânica.

► SOMA DE VETORES:

Do ponto de vista algébrico, a soma de vetores é feita usando representantes. Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores e fixemos um representante AB do vetor \vec{u} . Com origem no ponto B , extremidade do vetor \vec{u} , consideremos um representante BC do vetor \vec{v} . A soma do vetor \vec{u} com o vetor \vec{v} é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$, com representante AC .

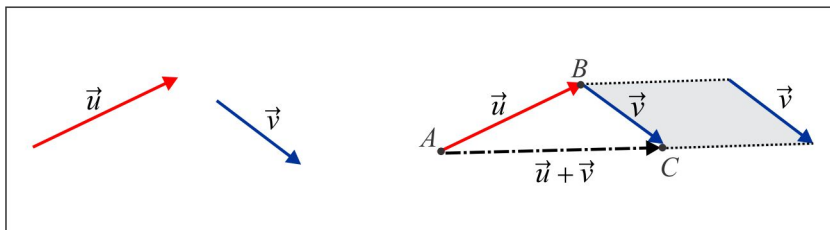


Figura 1.23: Soma de Vetores Geométricos

Usando representantes, temos a regra prática para a soma de vetores:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

que será muito utilizada na resolução de problemas geométricos.

PROPRIEDADES DA SOMA: A operação soma para vetores goza das mesmas propriedades dos números reais e as comprovações podem ser estabelecidas de forma geométrica.

(1) **Comutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

A Figura 1.24 ilustra a comprovação geométrica

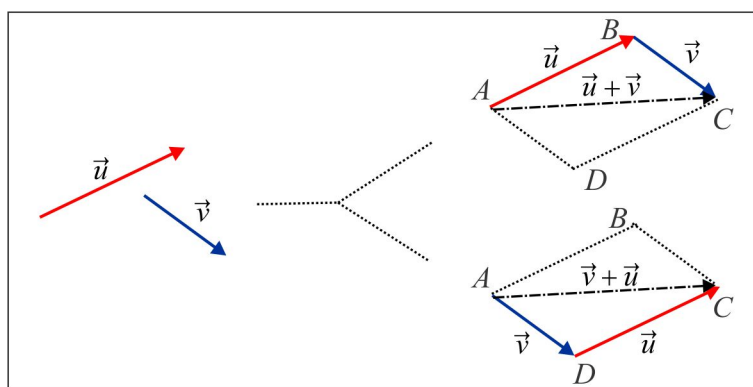


Figura 1.24: Propriedade Comutativa.

e usando os representantes, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

(2) **Associativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

A comprovação geométrica está ilustrada na Figura 1.25

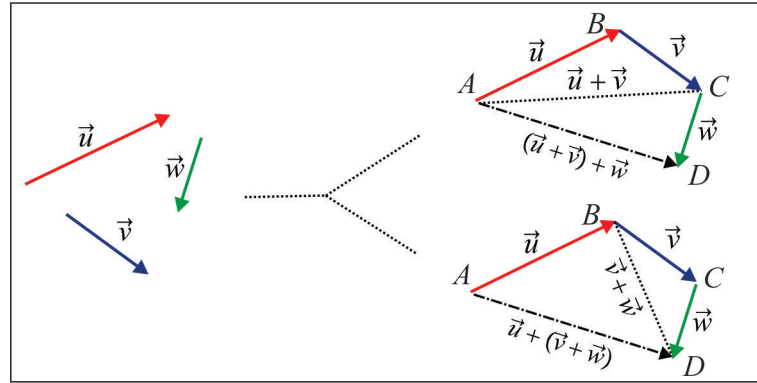


Figura 1.25: Propriedade Associativa

e usando os representantes, temos:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \quad \text{e}$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

(3) **Existência do Elemento Neutro:** $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Considerando $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{0} = \overrightarrow{BB}$, obtemos:

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$$

(4) **Existência do Simétrico:** $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Dado um vetor \vec{u} com representante AB , o simétrico do vetor \vec{u} é o vetor indicado por $-\vec{u}$, com representante BA . Os vetores \vec{u} e $-\vec{u}$ têm mesmo comprimento, mesma direção e sentidos opostos, como indica a Figura 1.26 ao lado. Temos $-\vec{u} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ e, sendo assim:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

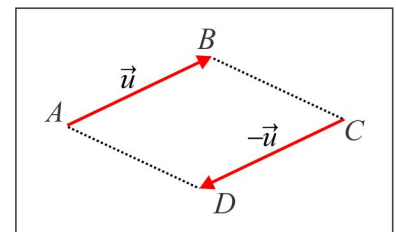


Figura 1.26: O Simétrico $-\vec{u}$.

EXEMPLO 1.2.3 Observando a Figura 1.27, vemos que $\vec{OA} = \vec{BD}$, $\vec{OB} = \vec{AD}$ e $\vec{OC} = -\vec{ED}$

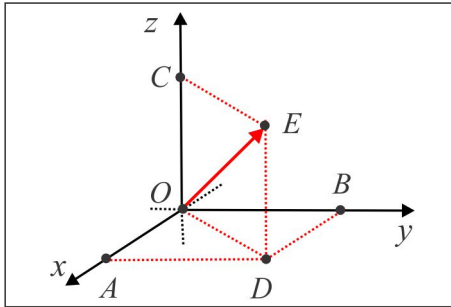


Figura 1.27: Exemplo 1.2.3.

e para expressar o vetor \vec{OE} em função dos vetores \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} , basta notar que:

$$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

► **PRODUTO POR ESCALAR:**

Fixemos um vetor \vec{u} , com representante AB e um escalar (número real) x . O produto do escalar x pelo vetor \vec{u} é o vetor indicado por $x \cdot \vec{u}$ e com representante AC , colinear com AB , caracterizado por:

(i) Se $x = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$, então $x \cdot \vec{u} = \vec{0}$, isto é, $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ e $x \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

(ii) Se $x > 0$, então AB e AC têm mesmo sentido (os pontos B e C estão de um mesmo lado do ponto A).

(iii) Se $x < 0$, então AB e AC têm sentidos opostos (o ponto A está entre os pontos B e C).

(iv) $|AC| = |x| \cdot |AB|$ (o comprimento de AC é igual a módulo de x vezes o comprimento de AB).

É claro que $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ e $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$. Além disso, se $x \neq 0$ e $x \neq \pm 1$, há quatro casos a considerar:

$$x > 1, \quad 0 < x < 1, \quad x < -1 \quad \text{e} \quad -1 < x < 0$$

ilustrados graficamente na Figura 1.28, lembrando que $\vec{u} = \vec{AB}$ e $x\vec{u} = \vec{AC}$.

PROPRIEDADES DO PRODUTO POR ESCALAR: O produto por escalar goza das seguintes propriedades:

(1) **Associativa:** $(xy) \cdot \vec{u} = x(y \cdot \vec{u})$

(2) **Distributiva:** $(x + y) \cdot \vec{u} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{u}$

(3) **Distributiva:** $x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v}$

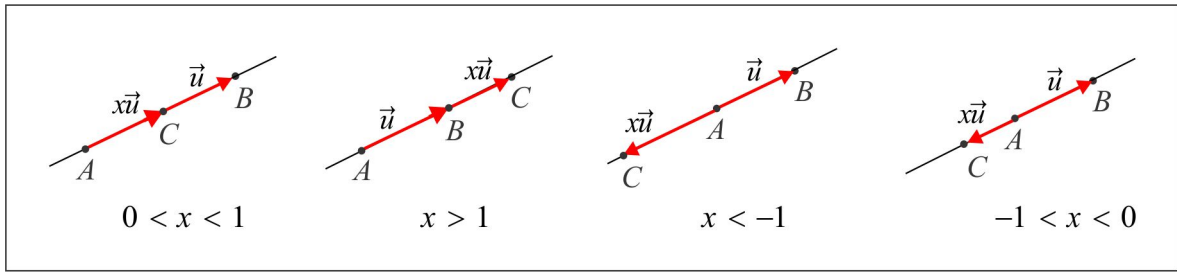


Figura 1.28: Produto por Escalar.

EXEMPLO 1.2.4 No triângulo da Figura 1.29, D é o ponto médio do segmento AB . Vamos expressar o vetor \overrightarrow{CD} em função de \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CB} .

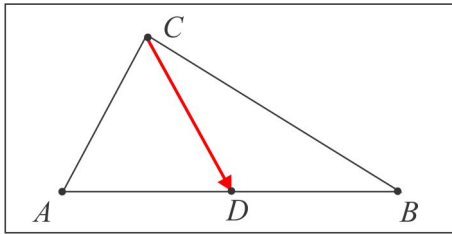


Figura 1.29: Exemplo 1.2.4.

Solução: Observando a figura, vemos que:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

e considerando que $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, obtemos:

$$\boxed{\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}.}$$

1.2.3 Dependência Linear

Para motivar os conceitos referentes à dependência linear entre vetores, deixe-nos considerar algumas situações geométricas em dois casos distintos.

1º CASO - DOIS VETORES A Figura 1.30 ilustra dois vetores \vec{u} e \vec{v} , com representantes: (a) colineares, (b) paralelos e (c) não paralelos nem colineares.

Nos casos equivalentes (a) e (b) os dois vetores são ditos LD (*Linearmente Dependentes*), porque

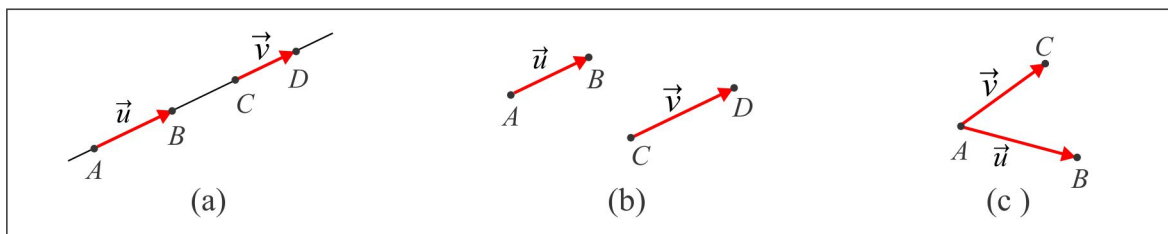


Figura 1.30: Vetores LD e Vetores LI.

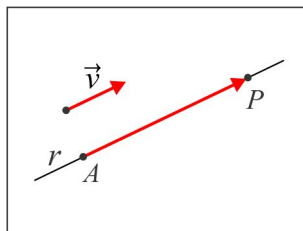
um deles é múltiplo escalar do outro, isto é:

$$\vec{u} = t \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = s \cdot \vec{u}$$

Dados um ponto A e um vetor não nulo \vec{v} , com representante AB , seja r a reta suporte do segmento orientado AB . Um ponto $P(x, y, z)$ do espaço está sobre a reta r se, e somente se, existe um único parâmetro (escalar) t , tal que:

$$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

A equação (1.5) descreve, de forma vetorial, a reta r que passa no ponto A , na direção do vetor \vec{v} , e os vetores do espaço com representantes sobre a reta r são precisamente os múltiplos escalares do vetor \vec{v} . Veja a Figura 1.31.

Figura 1.31: Reta r na direção do vetor \vec{v} .

No caso (c) em que os representantes não são paralelos nem colineares, um dos vetores não pode ser escrito como múltiplo escalar do outro e eles são ditos LI (*Linearmente Independentes*). Os pontos A , B e C não estão alinhados e, portanto, determinam um (único) plano α , no seguinte sentido: dado um ponto $P(x, y, z)$ no plano α existem parâmetros únicos p e q , tais que:

$$\overrightarrow{AP} = p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}, \quad p, q \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Faremos referência à equação 1.6 como a descrição vetorial do plano gerado pelos vetores LI \vec{u} e \vec{v} . Na Figura 1.32 abaixo vemos $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$, sendo $\vec{AB} = q \cdot \vec{v}$ e $\vec{BP} = p \cdot \vec{u}$.

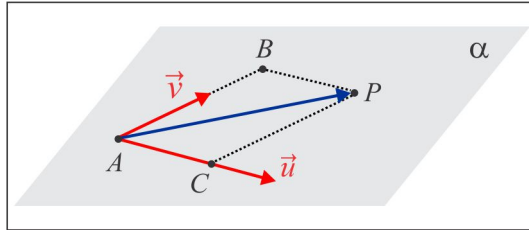


Figura 1.32: Plano gerado por \vec{u} e \vec{v} .

Qualquer expressão da forma $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$, com x e y escalares, recebe o nome de *Combinação Linear* dos vetores \vec{u} e \vec{v} e, neste contexto, a igualdade (1.6) nos diz que o vetor \vec{AP} é combinação linear dos vetores \vec{u} e \vec{v} . Os escalares x e y são os coeficientes da combinação linear. Por fim, ressaltamos que os vetores com representantes no plano α são as combinações lineares de \vec{u} e \vec{v} .

2º CASO - TRÊS VETORES Observando a Figura 1.33, notamos que nos casos (a), (b) e (c) os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} possuem representantes coplanares, isto é, estão sobre o mesmo plano.

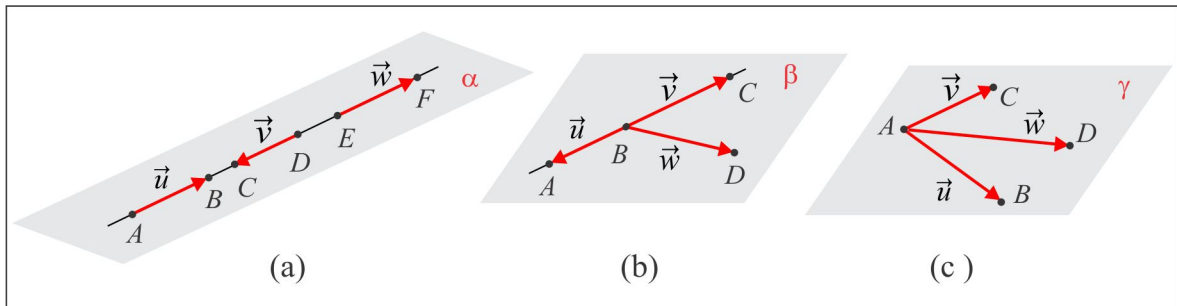


Figura 1.33: Três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} coplanares.

Já a Figura 1.34 ilustra os representantes dos vetores \vec{u} e \vec{v} coplanares (quaisquer dois vetores sempre têm representantes coplanares. Por quê?), enquanto o representante AD do vetor \vec{w} não é paralelo ao plano π que contém os representantes AB e AC . Em uma linguagem simples, dizemos que o vetor \vec{w} "fura" o plano π no ponto A .

Essas considerações motivam a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.2.5 Três vetores do espaço \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são *Linearmente Dependentes* (abrevia-se *LD*) quando possuírem representantes coplanares, como ilustram os casos (a), (b) e (c). Se os três vetores não

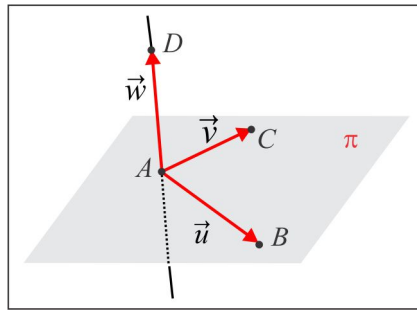


Figura 1.34: Três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} não coplanares.

possuem representantes coplanares, como ocorre no caso (d), eles são ditos *Linearmente Independentes* (abrevia-se *LI*).

Lema 1.2.6 (Lema Fundamental I) *Três vetores do espaço \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são LI se, e somente se, a equação vetorial:*

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w} = \vec{0}$$

possui apenas a solução nula: $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Qualquer expressão da forma $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$, com x , y e z escalares, recebe o nome de *combinação linear dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w}* .

Prova: A comprovação é feita por contradição. De fato, se os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são LD, então eles têm representantes coplanares e um deles, digamos \vec{w} , é combinação linear dos outros dois, isto é:

$$\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$$

e, assim, teríamos a combinação linear nula $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + (-1) \cdot \vec{w} = \vec{0}$, com o coeficiente $z = -1$ não nulo. Reciprocamente, se um dos coeficientes, digamos z , na combinação linear nula

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w} = \vec{0}$$

é diferente de zero, então:

$$\vec{w} = (-x/z) \cdot \vec{u} + (-y/z) \cdot \vec{v}$$

e isso indica que o vetor \vec{w} jaz no plano gerado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} e, portanto, \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são Linearmente Dependentes (coplanares). ■

Lema 1.2.7 (Lema Fundamental II) *Três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , linearmente independentes, geram o espaço \mathbb{R}^3 , no seguinte sentido: dado \vec{a} um vetor qualquer do espaço, existem escalares x , y e z , únicos, tais que:*

$$\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}.$$

Prova: A Figura 1.35 ilustra os representantes: $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ e $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$

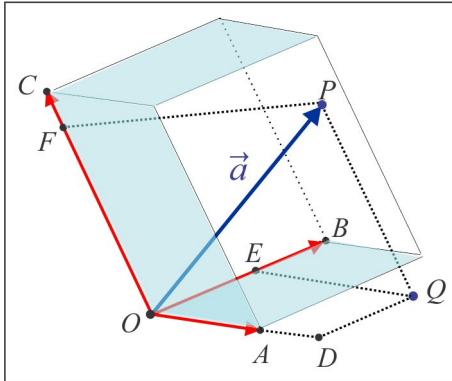


Figura 1.35: Os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} geram o espaço \mathbb{R}^3 .

onde notamos que $\overrightarrow{OD} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE} = y \cdot \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OF} = z \cdot \overrightarrow{OC}$ e, assim:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} \\ &= x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}.\end{aligned}$$

A unicidade da representação segue do Lema 1.2.6 ■

CONSEQUÊNCIAS:

(i) Considerando $z = 0$ reduzimos o Lema Fundamental II ao caso de dois vetores, isto é, \vec{u} e \vec{v} são LI se, e somente se, a equação vetorial:

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

possui apenas a solução nula: $x = 0$, $y = 0$.

(ii) Se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores LI, então:

$$\begin{aligned}x_1 \cdot \vec{u} + y_1 \cdot \vec{v} + z_1 \cdot \vec{w} &= x_2 \cdot \vec{u} + y_2 \cdot \vec{v} + z_2 \cdot \vec{w} \\ \Leftrightarrow (x_1 - x_2) \cdot \vec{u} + (y_1 - y_2) \cdot \vec{v} + (z_1 - z_2) \cdot \vec{w} &= \vec{0}\end{aligned}$$

e usando o Lema 1.2.6 deduzimos que

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2 \text{ e } z_1 = z_2.$$

EXEMPLO 1.2.8 Se \vec{u} e \vec{v} são vetores LI, mostremos que os vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ também o são. De fato, considerando a combinação linear nula:

$$x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + y \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \quad (1.7)$$

usamos o Lema 1.2.6 para mostrar que $x = 0$ e $y = 0$. De (1.7) e da propriedade distributiva, obtemos:

$$x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v} + y \cdot \vec{u} - y \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (x + y) \cdot \vec{u} + (x - y) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

e, considerando que os vetores \vec{u} e \vec{v} são LI, a última equação nos leva ao sistema algébrico:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são $x = 0$ e $y = 0$.

EXEMPLO 1.2.9 Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto de vetores LI, então $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \vec{v} + 3\vec{w}\}$ também o é. De fato, pelo Lema 1.2.6 é suficiente mostrar que a combinação linear nula:

$$x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + y \cdot (\vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}) + z \cdot (\vec{v} + 3\vec{w}) = \vec{0} \quad (1.8)$$

tem solução $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. A equação vetorial (1.8) é equivalente a:

$$(x + y) \cdot \vec{u} + (x - y + z) \cdot \vec{v} + (-2y + 3z) \cdot \vec{w} = \vec{0} \quad (1.9)$$

e considerando que os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são LI, segue de (1.9) que:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -2y + 3z = 0 \end{cases}$$

e resolvendo o sistema encontramos: $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, como queríamos.

DEFINIÇÃO 1.2.10 Um conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ constituído de três vetores LI denomina-se Base do Espaço. De acordo com o Lema 1.2.7 todo vetor \vec{a} do espaço se expressa, de maneira única, sob a forma:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$$

e os escalares x , y e z recebem o nome de coordenadas do vetor \vec{a} na base \mathcal{B} .

EXEMPLO 1.2.11 (A base Canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$) Sejam OA , OB e OC três segmentos orientados unitários e mutuamente ortogonais, nas direções Ox , Oy e Oz , respectivamente, como ilustra a Figura 1.36, e designemos $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$. Dado um ponto $P(x, y, z)$ no espaço, temos:

$$\overrightarrow{OD} = x \cdot \vec{i}, \quad \overrightarrow{OE} = y \cdot \vec{j} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OF} = z \cdot \vec{k}$$

e imitando o que foi feito no Lema 1.2.7, obtemos:

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.} \quad (1.10)$$

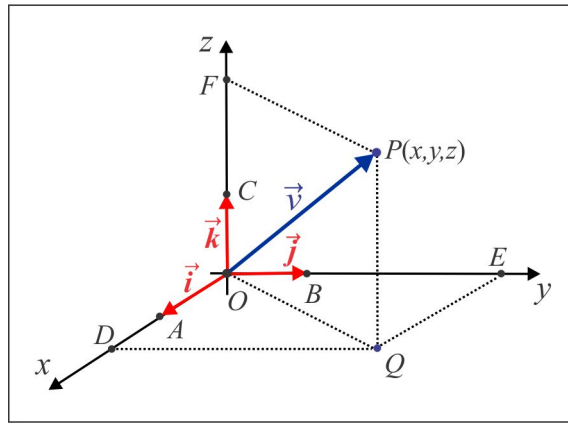


Figura 1.36: A base Canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Como consequência do Exemplo 1.2.11 deduzimos que:

- (i) As coordenadas cartesianas x , y e z do ponto P são precisamente as coordenadas do vetor \overrightarrow{OP} na base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. A unicidade da representação (1.10) nos permite identificar um ponto $P(x, y, z)$ do espaço com o vetor \overrightarrow{OP} .
- (ii) Em qualquer base do espaço, o vetor nulo $\vec{0}$ é o único que possui as três coordenadas nulas. Na base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, temos:

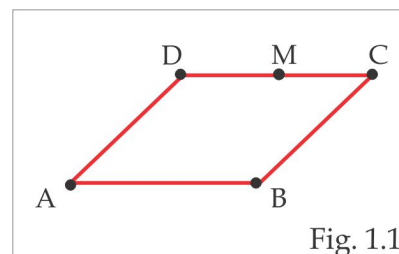
$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}.$$

1. As afirmações abaixo estão classificadas em verdadeiras (V) ou falsas (F). Discuta cada uma delas.

- (a) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $A = C$ e $B = D$ (F)
- (b) Se $AB \sim CD$, então $AC \sim BD$ e os vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BD} são iguais. (V)
- (c) Se \vec{a} e \vec{b} são LD, então \vec{a} e \vec{b} têm representantes colineares. (V)
- (d) Se $\vec{a} = \vec{0}$, então os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são coplanares. (V)
- (e) Se os pontos A , B e C não estão alinhados, então os vetores \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} são LI. (F)
- (f) Dois segmentos orientados colineares e de mesmo comprimento são equipolentes. (F)
- (g) Se $AB \sim CD$, então $BA \sim DC$ (V)
- (h) Os segmentos orientados AA e BB representam o mesmo vetor. (V)
- (i) Se $AB \sim CD$, então o quadrilátero de vértices A, B, C e D é um quadrado. (F)
- (j) Vetores determinados por segmentos orientados equipolentes são iguais. (V)
- (k) Três pontos não colineares determinam dois vetores LI. (V)
- (l) Dois vetores LI são sempre coplanares. (V)
- (m) Três vetores LD são sempre coplanares. (V)
- (n) Três vetores LD são sempre colineares. (F)
2. A partir de dois vetores linearmente independentes \vec{u} e \vec{v} , construa, graficamente, o vetor $2\vec{u} - \vec{v}$.
3. Se os pontos A , B e C não estão alinhados e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, verifique que A , B , C e D são vértices de um paralelogramo.
4. Sejam AD , BE e CF as medianas de um triângulo ABC . Mostre que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

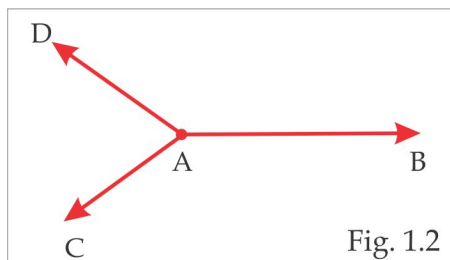
5. No paralelogramo da Fig. 1.1, M é o ponto médio do lado DC . Complete as sentenças:

- (a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$
- (b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \dots\dots\dots$
- (c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \dots\dots\dots$
- (d) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \dots\dots\dots$

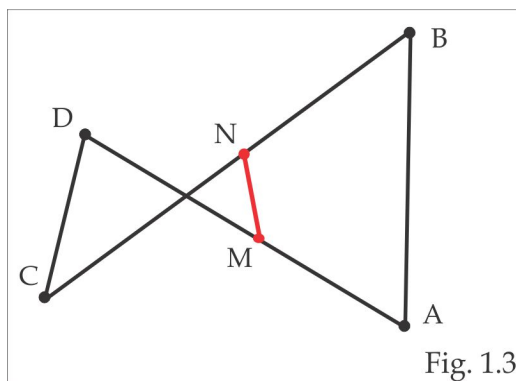


6. Na Fig. 1.2 abaixo, os vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{AD} estão no mesmo plano. Construir, graficamente,

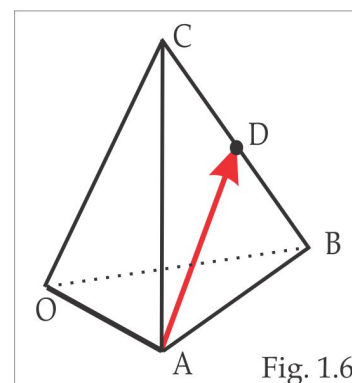
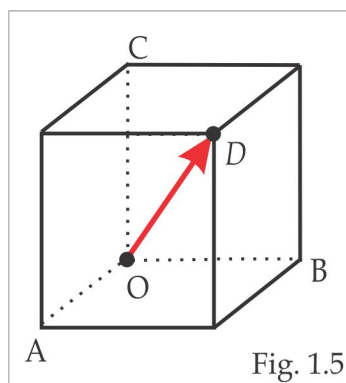
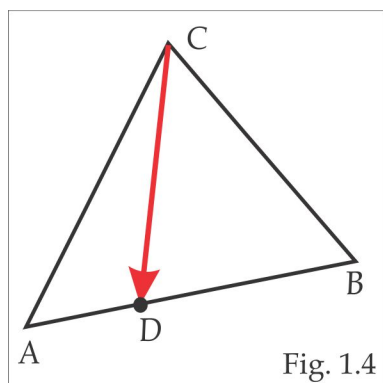
com origem em A , o vetor \vec{v} , tal que $\vec{v} + \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$.



7. Na Fig. 1.3 abaixo tem-se $\vec{MA} + \vec{MD} = \vec{0}$ e $\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$. Escrever o vetor $\vec{AB} + \vec{DC}$ em função do vetor \vec{MN} .



8. Mostre que as diagonais de um paralelogramo cortam-se ao meio.
9. Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero são vértices de um paralelogramo.
10. Mostre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo às bases e tem comprimento igual a sua semi-soma.
11. Observe as figuras abaixo.



- (a) Na Fig. 1.4 tem-se $|DB| = 2|AD|$. Expresse o vetor \overrightarrow{CD} como uma combinação linear dos vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} .
- (b) A Fig. 1.5 representa um paralelepípedo (caixa retangular). Expresse a diagonal \overrightarrow{OD} como uma combinação linear das arestas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} .
- (c) No tetraedro da Figura 1.6, D é o ponto médio de BC . Expresse o vetor \overrightarrow{AD} como uma combinação linear das arestas \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} .
12. Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade do comprimento deste.
13. O ponto de encontro das medianas de um triângulo recebe o nome de *Baricentro*. Mostre que o Baricentro de um triângulo divide as medianas na razão de 2 para 1.
14. Se O é o Baricentro de um triângulo de vértices A , B e C , mostre que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
15. Se o ponto A divide o segmento PQ na razão de n para m e O é um ponto qualquer do espaço, mostre que:
- $$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{OP} + \left(\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{OQ}.$$
16. Se \vec{a} e \vec{b} são vetores LI, mostre que $2\vec{a} + 3\vec{b}$ e $\vec{a} - 6\vec{b}$ também são LI. Se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base do espaço, mostre que $\{\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}, \vec{b} + 2\vec{c}\}$ também o é.
17. Sejam \vec{a} e \vec{b} dois vetores LI. Como devem ser os escalares x e y para que o vetor $x\vec{a} + y\vec{b}$ seja paralelo ao vetor \vec{a} , mas de sentido contrário?

1.3 Vetores em Coordenadas

Sejam $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ dois pontos no espaço e seja \vec{v} o vetor com representante AB , isto é, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, como ilustra a Figura 1.37.

Para expressar o vetor \vec{v} na base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, notamos que $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ e considerando que:

$$\overrightarrow{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} + z_B \vec{k} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k},$$

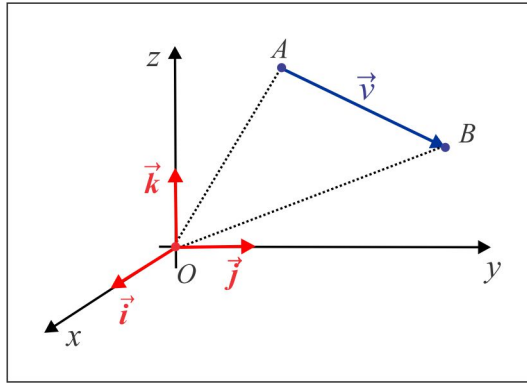


Figura 1.37: Vetor determinado por dois pontos.

obtemos:

$$\vec{v} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}.$$

A *norma* do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, indicada por $\|\vec{v}\|$, é, por definição, a distância do ponto A ao ponto B e, sendo assim, temos:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Se $\|\vec{v}\| = 1$, o vetor \vec{v} diz-se *unitário*.

A partir das propriedades da Soma e do Produto por Escalar, vejamos como ficam essas operações e a norma de um vetor, em coordenadas.

(a) **Soma:** Dados os vetores $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, então:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k}.$$

(b) **Produto por Escalar:** Dados um vetor $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e um escalar x , então:

$$x \cdot \vec{v} = (xv_1)\vec{i} + (xv_2)\vec{j} + (xv_3)\vec{k}.$$

(c) **Norma:** Considerando o ponto $P(v_1, v_2, v_3)$ e notando que $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, obtemos:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

e dado um escalar x , então $\|x \cdot \vec{v}\| = |x| \cdot \|\vec{v}\|$. De fato, como $x \cdot \vec{v} = x \cdot v_1 \vec{i} + x \cdot v_2 \vec{j} + x \cdot v_3 \vec{k}$, temos:

$$\begin{aligned}\|x \cdot \vec{v}\| &= \sqrt{(xv_1)^2 + (xv_2)^2 + (xv_3)^2} \\ &= |x| \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = |x| \cdot \|\vec{v}\|.\end{aligned}$$

Olhando os vetores básicos \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} sob a forma:

$$\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}, \quad \vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{k} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 1 \cdot \vec{k}$$

encontramos:

$$\|\vec{i}\| = 1, \quad \|\vec{j}\| = 1 \quad \text{e} \quad \|\vec{k}\| = 1,$$

indicando, como já era esperado, que os vetores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são unitários. Além disso, dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ os vetores $\vec{u} = \pm \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ são unitários e colineares com o vetor \vec{v} , porque se $x = \pm 1/\|\vec{v}\|$, então $\vec{u} = x \cdot \vec{v}$ e, portanto:

$$\|\vec{u}\| = |x| \cdot \|\vec{v}\| = (1/\|\vec{v}\|) \cdot \|\vec{v}\| = 1.$$

EXEMPLO 1.3.1 Dados os pontos $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, -3)$ e $C(1, 2, 0)$, temos:

(i) $\vec{AB} = -2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{AC} = 0\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(ii) Usando as operações com vetores, encontramos:

$$3\vec{AB} - 2\vec{AC} = (-6\vec{i} + 3\vec{j} - 12\vec{k}) + (-2\vec{j} + 2\vec{k}) = -6\vec{i} + 5\vec{j} - 10\vec{k}.$$

(iii) Calculando as normas, temos:

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{21} \quad \text{e} \quad \|3\vec{AB} - 2\vec{AC}\| = \sqrt{(-6)^2 + 5^2 + (-10)^2} = \sqrt{161}.$$

EXEMPLO 1.3.2 (Coordenadas do Ponto Médio) Dados os pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, seja $M(x_M, y_M, z_M)$ o ponto médio do segmento AB , como ilustra a Figura 1.38.

Observando a figura, deduzimos que $\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ e usando as coordenadas, encontramos:

$$x_M = x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A), \quad y_M = y_A + \frac{1}{2}(y_B - y_A) \quad \text{e} \quad z_M = z_A + \frac{1}{2}(z_B - z_A)$$

de onde resultam as coordenadas do ponto médio:

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}, \quad \boxed{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{z_M = \frac{z_A + z_B}{2}}.$$

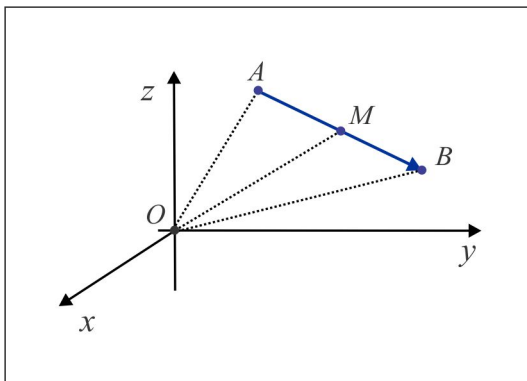


Figura 1.38: Coordenadas do Ponto Médio.

EXEMPLO 1.3.3 O ponto médio $M(x_M, y_M, z_M)$ do segmento de extremidades $A(2, -1, 4)$ e $B(6, -3, -2)$ tem coordenadas:

$$x_M = 4, \quad y_M = -2 \quad e \quad z_M = 1$$

e o ponto médio é $M(4, -2, 1)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.2

- Dados os vetores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$ e $\vec{d} = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 10\vec{k}$, calcule:
 - $\frac{1}{4}\vec{a}$
 - $3\vec{b} - 5\vec{a} + \vec{c}$
 - $-\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a}$
 - $\vec{b} - \vec{a}$.
- Dado $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, determine um vetor \vec{v} colinear com \vec{u} , de sentido contrário, e cujo comprimento seja igual a 3. Represente graficamente \vec{u} e \vec{v} .
- Localize no sistema de coordenadas os pontos: $A(2, 3, 3)$, $B(2, 0, 3)$ e $C(2, 2, 0)$ e represente graficamente os vetores $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$.
- Calcule \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} , sendo $A(2, 3, 4)$, $B(-2, 1, 1)$ e $C(-2, -1, -2)$.
- Considere o ponto $A(1, 2, 3)$ e o vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Determine B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
- Determine as coordenadas do ponto médio do segmento PQ , sabendo que $P(2, 1, 5)$ e $Q(4, 3, 1)$. Qual a distância do ponto P ao ponto Q ?
- Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$, determine o vetor \vec{w} tal que $3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$.

8. Dados os pontos $A(1, -2, 3)$, $B(5, 2, 5)$ e $C(-4, 2, 9)$, determine o ponto D de modo que A , B , C e D sejam vértices de um paralelogramo.
9. Sejam A , B , C e D os vértices de um paralelogramo e G o ponto de encontro das diagonais. Sabendo que $A(2, -1, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ e $G(4, -1, 7)$, determine os vértices C e D .
10. Em cada caso verifique se vetores são LD ou LI.
- (a) $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{w} = 3\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$ (b) $\vec{u} = -14\vec{i} + 91\vec{j} + 56\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 13\vec{j} - 8\vec{k}$
(c) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + 12\vec{j} + \vec{k}$ (d) $\vec{u} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{k}$
11. Determine m de modo que os vetores $\vec{u} = m\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + m\vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ sejam coplanares.
12. Qual valor de m faz com que $\vec{u} = m\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 8\vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$ sejam colineares?
13. Verifique se os pontos $A(1, -1, 2)$, $B(0, 1, 1)$ e $C(2, -1, 3)$ estão alinhados.
14. Determine y e z de modo que os pontos $A(1, 2, 1)$, $B(1, 0, 0)$ e $C(1, y, z)$ sejam colineares.
15. Em cada caso verifique se os pontos A , B , C e D são coplanares.
- (a) $A(1, 1, 1)$, $B(-2, -1, -3)$, $C(0, 2, -2)$ e $D(-1, 0, -2)$.
(b) $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 0, 3)$, $C(2, 4, 1)$ e $D(-1, -2, 2)$.
16. Verifique se os vetores $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ podem ser representados pelos lados de um triângulo.
17. Verifique se os pontos $A(1, 1, 0)$, $B(3, 1, 0)$ e $C(1, 3, 0)$ podem ser vértices de um triângulo.
18. Verifique que os vetores $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{c} = -3\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}$ formam uma base do \mathbb{R}^3 e determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ nessa base. A base é positiva ou negativa?
19. Sejam \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} vetores LI e considere $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ e $\vec{v} = -\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. Escreva o vetor $\vec{w} = 9\vec{a} + 15\vec{b} + 6\vec{c}$ como combinação linear de \vec{u} e \vec{v} .
20. Calcule os valores de x para os quais os vetores $\vec{a} = \vec{i} + x\vec{j}$, $\vec{b} = -x\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ são LI.
-

1.4 Produto Interno

O *Produto Interno*, ou *Produto Escalar*, entre dois vetores é motivado pela projeção ortogonal de um vetor sobre outro. Iniciaremos com os conceitos de norma e ângulo entre vetores.

► **NORMA & ÂNGULO:** Como vimos anteriormente, todos representantes de um dado vetor \vec{v} têm o mesmo comprimento e se $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ definimos a norma de \vec{v} por $\|\vec{v}\| = \text{dist}(A; B)$. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, os vetores $\vec{u} = \pm \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ são os únicos vetores unitários colineares (LD) com o vetor \vec{v} .

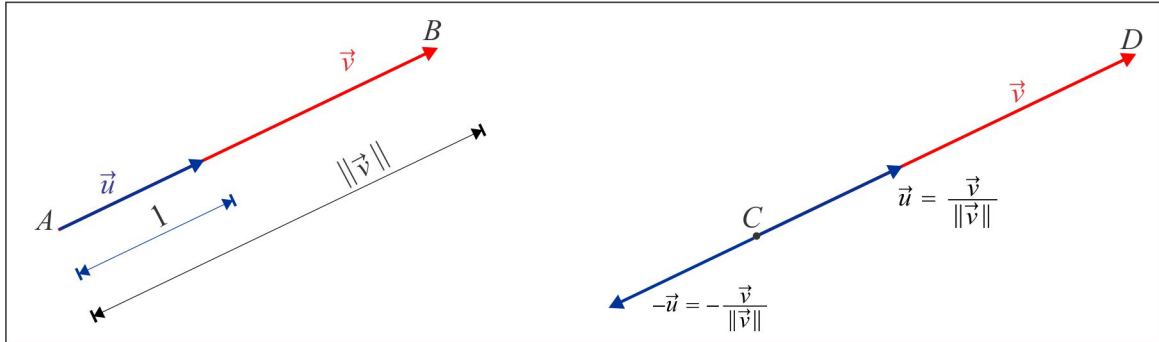


Figura 1.39: Construção de vetor unitário.

Um fato que nos parece óbvio é que se \vec{u} é um vetor unitário e \vec{v} é um vetor colinear com \vec{u} , então:

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = -\|\vec{v}\|\vec{u},$$

a depender dos sentidos dos representantes como ilustra a Figura 1.39.

O *ângulo* entre dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} é, por definição, o menor ângulo orientado θ entre dois representantes de \vec{u} e \vec{v} , com mesma origem, como ilustra a Figura 1.40.

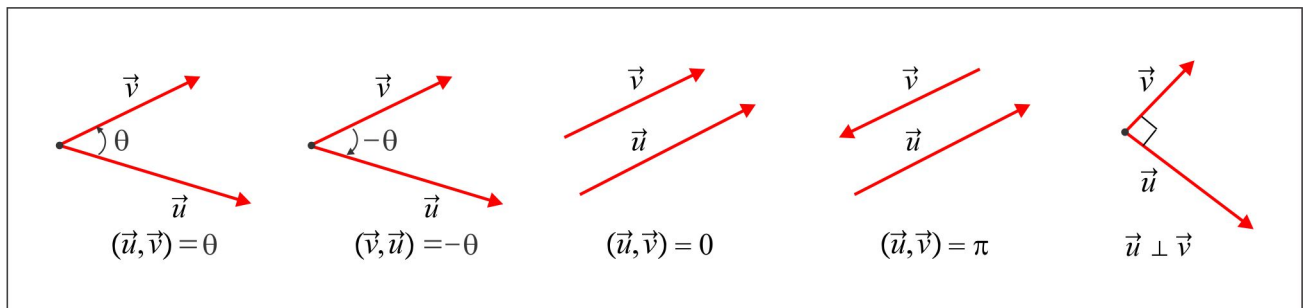


Figura 1.40: Ângulo entre vetores.

Anota-se $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ para indicar o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} e em se tratando de ângulo orientado, segue

que $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$. Dois vetores \vec{u} e \vec{v} com representantes perpendiculares são ditos *ortogonais* e anotamos $\vec{u} \perp \vec{v}$; neste caso o ângulo entre eles é $\theta = \pm\pi/2$ rad.

A base canônica $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é constituída de três vetores unitários e mutuamente ortogonais. As coordenadas cartesianas x, y e z de um ponto P são precisamente as coordenadas do vetor \overrightarrow{OP} na base \mathcal{B} . Isso torna a base \mathcal{B} especial!

► **PROJEÇÃO ORTOGONAL:** A Figura 1.41 ilustra os vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} , com representantes AB e AC , respectivamente, e D o pé da perpendicular baixada do ponto B sobre o segmento AC .

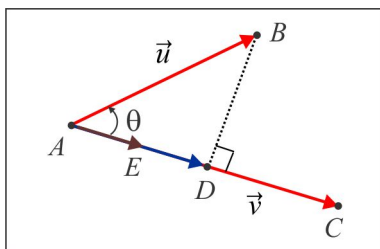


Figura 1.41: Projeção Ortogonal.

O vetor \overrightarrow{AD} recebe o nome de Projeção Ortogonal do vetor \vec{u} sobre o vetor \vec{v} e é indicado por $\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u}$.

Para expressar o vetor $\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ em função dos vetores \vec{u} e \vec{v} , notamos que o vetor \overrightarrow{AD} é colinear com o vetor unitário $\vec{v}/\|\vec{v}\|$ e, sendo assim, $\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AD}\| \cdot (\vec{v}/\|\vec{v}\|)$. Portanto:

$$\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) = \|\vec{u}\| \cos \theta \left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right)$$

ou, de forma equivalente:

$$\text{Proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left[\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos \theta \right] \left(\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \right). \quad (1.11)$$

Ao número real $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, que figura em (1.11), sendo θ o ângulo entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , damos o nome de *Produto Interno* ou *Produto Escalar* entre os vetores \vec{u} e \vec{v} . De forma precisa, temos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 1.4.1 O Produto Interno entre os vetores \vec{u} e \vec{v} , indicado por $\vec{u} \bullet \vec{v}$, é definido como segue:

(i) Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

(ii) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}). \quad (1.12)$$

1.4.1 Propriedades & Consequências do Produto Interno

Dados três vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} e um escalar (número real) x , temos as seguintes propriedades:

- (1) **Comutativa:** $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$.
- (2) **Associativa:** $x \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v}) = (x \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (x \cdot \vec{v})$.
- (3) **Distributiva:** $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$.

CONSEQUÊNCIAS A partir das propriedades do Produto Interno, seguem facilmente as seguintes consequências:

- (a) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. Se \vec{u} for unitário, então $\vec{u} \bullet \vec{u} = 1$.
- (b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$. O ângulo é $\theta = \pi/2$ e $\cos \theta = 0$.
- (c) $\vec{i} \bullet \vec{j} = 0$, $\vec{i} \bullet \vec{k} = 0$ e $\vec{j} \bullet \vec{k} = 0$. Os vetores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são mutuamente ortogonais.
- (d) $\vec{i} \bullet \vec{i} = 1$, $\vec{j} \bullet \vec{j} = 1$ e $\vec{k} \bullet \vec{k} = 1$. Os vetores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são unitários.
- (e) Dado $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$, então as coordenadas u_1 , u_2 e u_3 do vetor \vec{u} são precisamente:

$$u_1 = \vec{u} \bullet \vec{i}, \quad u_2 = \vec{u} \bullet \vec{j} \quad \text{e} \quad u_3 = \vec{u} \bullet \vec{k}.$$

- (f) Se $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$ e $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$, temos a seguinte regra para o Produto Interno em coordenadas:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

- (g) Segue de (1.12) que o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} é o menor ângulo orientado θ , tal que

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

PRODUTOS NOTÁVEIS & DESIGUALDADES Usando as propriedades e consequências do Produto Interno, temos:

- (a) **Quadrado da Soma:** $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Prova:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

(b) **Quadrado da Diferença:** $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$

(c) **Produto da Soma pela Diferença:** $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$

Prova:

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) &= \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} - \vec{v} \bullet \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.\end{aligned}$$

(d) **Desigualdade de Cauchy-Schwarz:** $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$

Prova: Considerando que $|\cos \theta| \leq 1$, temos:

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \underbrace{|\cos \theta|}_{\leq 1} \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

(e) **Desigualdade Triangular:** $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$

Prova: A Figura 1.42 ilustra um triângulo ABC e a desigualdade triangular estabelece que o comprimento AC de um dos lados não ultrapassa a soma dos outros dois e daí resultou o nome Desigualdade Triangular. Usando o quadrado da soma e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \\ &= (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2\end{aligned}$$

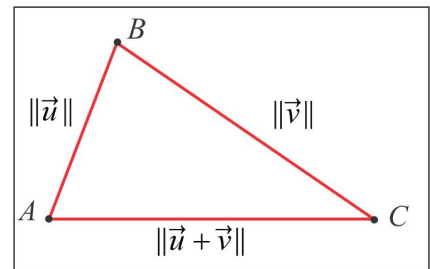


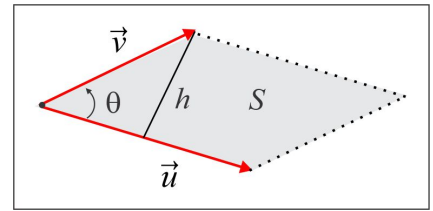
Figura 1.42: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$

1.5 Produto Vetorial

Para motivar o conceito de *Produto Vetorial* entre dois vetores, deixe-nos considerar o seguinte problema geométrico:

► **PROBLEMA:** Calcular a área do paralelogramo cujos lados são representantes dos vetores LI (não paralelos) \vec{u} e \vec{v} , como ilustra a Figura 1.43. A área do paralelogramo S vem dada por:

$$A(S) = (\text{base}) \times (\text{altura}) = \|\vec{u}\| \times h = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})|$$



e como veremos adiante, o valor numérico da área $A(S)$ é a norma de um novo vetor, conhecido por *produto vetorial* de \vec{u} e \vec{v} .

Figura 1.43: Área $A(S)$.

Dados três vetores LI \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , podemos construir com esses vetores seis bases ordenadas:

$$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}, \mathcal{B}_2 = \{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}, \mathcal{B}_3 = \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}, \mathcal{B}_4 = \{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\}, \mathcal{B}_5 = \{\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}\} \text{ e } \mathcal{B}_6 = \{\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}\}$$

e a cada base ordenada associaremos o sinal "+" ou "-", de acordo com a *Regra da Mão Direita* descrita a seguir. Para melhor clareza da regra, suponhamos que os vetores LI \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} estejam dispostos como ilustrado na Figura 1.44.

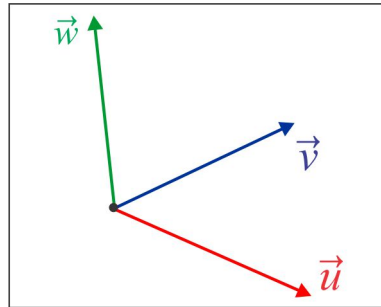


Figura 1.44: Base Ordenada.

O sinal da base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é estabelecido da seguinte forma: imaginemos o vetor \vec{w} (terceiro vetor da base) apontando para nossos olhos e giramos, segundo o menor ângulo, o vetor \vec{u} (primeiro vetor da base) até torná-lo colinear com o vetor \vec{v} (segundo vetor da base). Se a rotação for anti-horária a base será positiva e, caso contrário, associamos à base o sinal "-". Dito de outra forma, acompanhando com os quatro dedos da mão direita a rotação do vetor \vec{u} (primeiro vetor da base) até torná-lo colinear com o vetor \vec{v} (segundo vetor da base), se o polegar apontar na direção do vetor \vec{w} (terceiro vetor da base) a base será positiva. Esta é a *Regra da Mão Direita*. Na tabela abaixo, exibimos os sinais associados às bases listadas acima, com respeito à configuração da Figura 1.44.

\mathcal{B}_1	\mathcal{B}_2	\mathcal{B}_3	\mathcal{B}_4	\mathcal{B}_5	\mathcal{B}_6
+	-	+	-	+	-

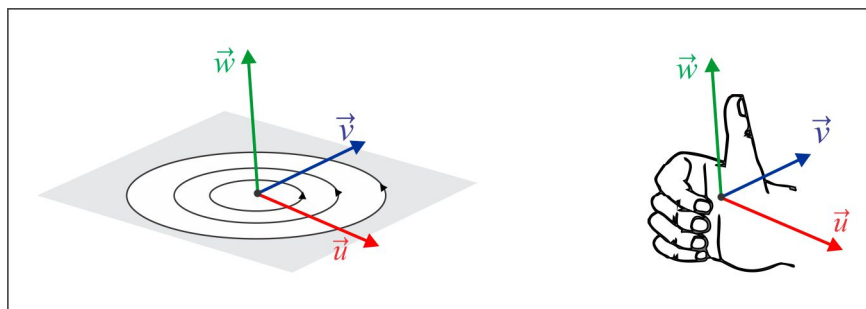


Figura 1.45: Regra da Mão Direita.

Procedendo dessa forma com as demais bases, deduzimos que as bases \mathcal{B}_3 e \mathcal{B}_5 são positivas, enquanto as bases \mathcal{B}_2 , \mathcal{B}_4 e \mathcal{B}_6 são negativas. É claro que os sinais das bases serão alterados quando a disposição gráfica dos vetores for modificada.

DEFINIÇÃO 1.5.1 *Dados os vetores LI (não paralelos) \vec{u} e \vec{v} , o produto vetorial de \vec{u} por \vec{v} é, por definição, o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$, caracterizado por:*

- (i) **Norma:** $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})|$.
- (ii) **Direção:** o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal aos vetores \vec{u} e \vec{v} , simultaneamente.
- (iii) **Sentido:** a base ordenada $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é positiva, isto é, atende à regra da mão direita.

No caso em que os vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos (aqui estão incluídos os casos $\vec{u} = \vec{0}$ e $\vec{v} = \vec{0}$), define-se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. Sobre a definição do produto vetorial, ressaltamos que:

- (a) O sentido do vetor $\vec{v} \times \vec{u}$ é determinado pela regra da mão direita, considerando que a base ordenada $\{\vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u}\}$ deve ser positiva. A Figura 1.46 ilustra os produtos vetoriais $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.

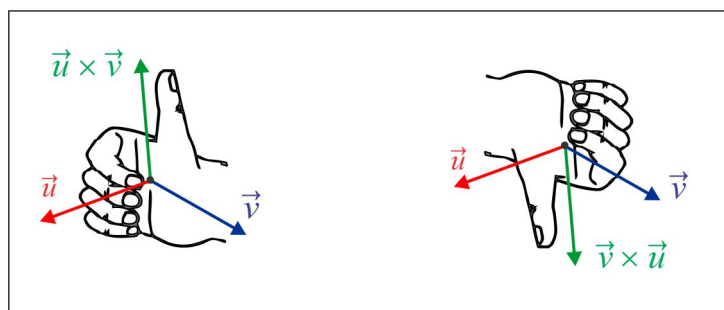


Figura 1.46: Os produtos $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.

- (b) Os vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ são paralelos, já que ambos são ortogonais ao plano gerado por \vec{u} e \vec{v} .
- (c) A norma $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ é precisamente o valor numérico da área do paralelogramo cujos lados são representantes dos vetores \vec{u} e \vec{v} , ilustrado na Figura 1.47.

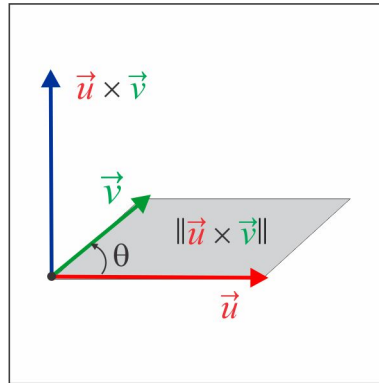


Figura 1.47: $A(S) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

1.5.1 Propriedades & Consequências do Produto Vetorial

- (1) Os vetores \vec{u} e \vec{v} são paralelos (LD) se, e somente se, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$. De fato, sendo \vec{u} e \vec{v} paralelos, então $\text{sen}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ e, portanto, $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$.
- (2) Antissimetria: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$. Basta observar a Figura 1.46.
- (3) Com respeito aos vetores básicos \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , dispostos como ilustrado no Exemplo 1.2.11, temos a seguinte tabela de produtos vetoriais:

$\vec{i} \times \vec{j}$	$\vec{k} \times \vec{i}$	$\vec{j} \times \vec{k}$	$\vec{i} \times \vec{i}$	$\vec{j} \times \vec{j}$	$\vec{k} \times \vec{k}$	$\vec{j} \times \vec{i}$	$\vec{i} \times \vec{k}$	$\vec{k} \times \vec{j}$
\vec{k}	\vec{j}	\vec{i}	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$	$-\vec{k}$	$-\vec{j}$	$-\vec{i}$

- (4) Associatividade: $x \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (x \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (x \cdot \vec{v})$.
- (5) Distributividade: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.
- (6) O Produto Vetorial em coordenadas. Dados os vetores $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$ e $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$, obtemos, a partir das propriedades já estabelecidas, a seguinte expressão em coordenadas para o produto vetorial:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (u_1 v_2) \vec{k} - (u_1 v_3) \vec{j} - (u_2 v_1) \vec{k} + (u_2 v_3) \vec{i} + (u_3 v_1) \vec{j} - (u_3 v_2) \vec{i} \\ &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}. \end{aligned}$$

Na última linha, os coeficientes podem ser identificados com determinantes 2×2 , de modo que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k}. \quad (1.13)$$

O lado direito de (1.13) nada mais é do que o desenvolvimento de Laplace do determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

que normalmente se usa para representar o produto vetorial.

EXEMPLO 1.5.2 Se $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-6 + 2)\vec{i} - (-3 + 2)\vec{j} + (2 - 4)\vec{k} = -4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Como $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$, deduzimos que os vetores \vec{u} e \vec{v} não são paralelos e a área do paralelogramo S de lados representados pelos vetores \vec{u} e \vec{v} é igual a:

$$A(S) = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}.$$

1.6 Produto Misto

O *Produto Misto*, como o próprio nome sugere, envolve os produtos Interno e Vetorial. Para motivar o conceito, vamos considerar o seguinte problema geométrico:

► **PROBLEMA:** Calcular o volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , como ilustrado na Figura 1.48.

O volume do paralelepípedo vem dado por:

$$\text{vol} = (\text{área da base}) \times (\text{altura})$$

e por observação da Figura 1.48, encontramos:

$$\text{vol} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot H = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot |\cos \theta|. \quad (1.15)$$

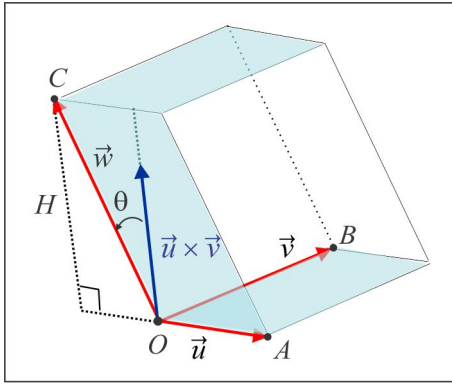


Figura 1.48: Volume do Paralelepípedo.

O que vemos em (1.15) é o volume expresso pelo produto interno dos vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e \vec{w} , isto é:

$$\text{vol} = |(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}|.$$

Ao número real $(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}$ damos o nome de *Produto Misto* dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} , nessa ordem, e anotamos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \bullet \vec{w}.$$

É oportuno ressaltar que o produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ pode mudar de sinal ao permutarmos os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . Por exemplo, notando que $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, temos:

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$$

1.6.1 Propriedades & Consequências do Produto Misto

- (1) Os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares se, e só se, o paralelepípedo degenera-se em uma figura plana e, assim, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.
- (2) O sinal do Produto Misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é o mesmo da base ordenada $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, no caso em que os vetores não são coplanares.
- (3) Para comprovar que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$, basta observar que em valor absoluto os produtos mistos são iguais (representam o volume do mesmo paralelepípedo) e que os ternos ordenados $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ e $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$ têm o mesmo sinal.

(4) **O produto Misto em coordenadas:** Considerando os vetores:

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}, \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{w} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$$

usamos os produtos interno e vetorial em coordenadas e encontramos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

EXEMPLO 1.6.1 *Sejam os vetores $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.*

(a) Os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são LI (não coplanares), porque:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

(b) O paralelepípedo de arestas \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} tem volume igual a 7.

(c) As coordenadas do vetor $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ na base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são as soluções x , y e z da equação vetorial:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}. \tag{1.16}$$

A equação (1.16) é equivalente ao sistema algébrico:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ -y - z = 1 \end{cases}$$

com solução $x = 9/7$, $y = -4/7$ e $z = -3/7$. Assim, temos a representação:

$$\vec{a} = \frac{9}{7}\vec{u} - \frac{4}{7}\vec{v} - \frac{3}{7}\vec{w}.$$

1. Classifique as afirmações em *verdadeiras* (V) ou *falsas* (F), justificando sua resposta.

(a) () Se \vec{a} e \vec{b} são paralelos, então $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

- (b) () Se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, então \vec{a} ou \vec{b} é igual a $\vec{0}$.
- (c) () Se \vec{a} e \vec{b} são perpendiculares, então $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$.
- (d) () Se $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, então \vec{a} ou \vec{b} é igual a $\vec{0}$.
- (e) () Existem vetores não nulos \vec{a} e \vec{b} tais que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ e $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$.
- (f) () Se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal, então $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.
- (g) () Se α é o plano gerado por \vec{a} e \vec{b} e β é o plano gerado por \vec{c} e \vec{d} , então α e β são paralelos se, e somente se, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{0}$.
- (h) () Os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são coplanares se, e somente se, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$.
- (i) () Se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base ortonormal, então $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \pm 1$.
- (j) () Sempre que \vec{a} e \vec{b} forem colineares, ter-se-á $\|\vec{a} + \vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.
- (k) () Se \vec{a} e \vec{b} são vetores unitários, então $\vec{a} + \vec{b}$ tem a direção da bissetriz do ângulo (\vec{a}, \vec{b}) .
- (l) () Se \vec{a} e \vec{b} são vetores do espaço, então $\|\vec{a} \pm \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \pm 2\vec{a} \bullet \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$.
- (m) () Três vetores ortogonais são sempre LI.
- (n) () Se $\|\vec{a}\| = 1$, então o vetor $\text{Proj}_{\vec{a}} \vec{b}$ tem comprimento $|\vec{a} \bullet \vec{b}|$.
- (o) () Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base positiva, então $\{\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}\}$ também o é.
- (p) () O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}\}$ é uma base apenas quando \vec{u} e \vec{v} forem LI.
- (q) () Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortonormal e \vec{a} é um vetor, então $\|\vec{a}\|^2 = (\vec{a} \bullet \vec{u})^2 + (\vec{a} \bullet \vec{v})^2 + (\vec{a} \bullet \vec{w})^2$.

2. Mostre que as diagonais de um losango são ortogonais.

3. Se \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} vetores não nulos e ortogonais, demonstre o [Teorema de Pitágoras](#):

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

4. Se \vec{a} e \vec{b} são dois vetores e $\vec{a} \neq \vec{0}$, mostre que o vetor $\vec{v} = \vec{b} - \frac{(\vec{a} \bullet \vec{b})\vec{a}}{\|\vec{a}\|^2}$ é perpendicular ao vetor \vec{a} .

5. Verifique que a norma goza das seguintes propriedades:

(a) $\|\vec{u}\| \geq 0$ e $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$. (O único vetor de norma zero é o vetor nulo.)

(b) $|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

(c) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$. (Identidade de Polarização)

- (d) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$. **(Identidade do Paralelogramo)**
6. Descreva passo-a-passo a construção de uma base ortonormal positiva $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, a partir de um vetor não nulo \vec{u} .
7. Sejam \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} três vetores tais que o ângulo entre quaisquer dois deles, nessa ordem, é 60° . Sabendo que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 2$ e $\|\vec{c}\| = 6$, calcule $\|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|$.
8. Se $\|\vec{a}\| = 11$, $\|\vec{b}\| = 23$ e $\|\vec{a} - \vec{b}\| = 30$, calcule $\|\vec{a} + \vec{b}\|$.
9. Os vetores \vec{a} e \vec{b} são perpendiculares entre si e o vetor \vec{c} é tal que $(\vec{c}, \vec{a}) = 60^\circ$ e $(\vec{c}, \vec{b}) = 60^\circ$. Sabendo-se que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 5$ e $\|\vec{c}\| = 8$, calcule o produto interno: $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \bullet (\vec{b} + 3\vec{c})$.
10. Determine a *projeção ortogonal* do vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ sobre o vetor $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.
11. Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$.
12. Determine um vetor unitário \vec{u} , paralelo ao vetor $2\vec{a} - \vec{b}$, sendo $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.
13. Calcule $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, sabendo que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 6$, $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/4$ rad.
14. Determine o valor de x , de modo que $(x\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}) \bullet (2\vec{i} + \vec{j}) = 3$.
15. Dados $\vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$, ache um vetor unitário \vec{w} na direção da bissetriz do ângulo entre \vec{u} e \vec{v} .
16. Verifique que os pontos $A(1, 1, 0)$, $B(3, 1, 0)$ e $C(1, 3, 0)$ são vértices de um triângulo retângulo e calcule seus ângulos.
17. Dados $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{j} - \vec{k}$, calcule os produtos mistos:
- (a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ (b) $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{u}]$ (c) $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$ (d) $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}]$.
18. Em cada caso, use o produto misto e verifique se os pontos são coplanares ou não.
- (a) $A(0, 2, -2)$, $B(-1, 0, -2)$, $C(-2, -1, -3)$ e $D(1, 1, 1)$.
- (b) $A(-1, 0, 3)$, $B(-1, -2, 2)$, $C(1, 0, 2)$ e $D(2, 4, 1)$.
19. Os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são mutuamente ortogonais e formam, nessa ordem, um terço ordenado positivo. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{w}\| = 3$, calcule o produto misto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

20. Use o produto vetorial e determine as condições que devem satisfazer os vetores \vec{a} e \vec{b} para que $\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{a} - \vec{b}$ sejam paralelos.
21. Os vetores $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ são coplanares ou não?
22. Se $\|\vec{u}\| = 3$ e $\|\vec{v}\| = 5$, determine os valores de x de modo que os vetores $\vec{u} + x\vec{v}$ e $\vec{u} - x\vec{v}$ sejam:
- (a) perpendiculares (b) paralelos.
23. Sejam $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$. Determine um vetor \vec{v} perpendicular aos vetores \vec{a} e \vec{b} e tal que $\vec{v} \bullet \vec{c} = 100$.
24. Se α , β e γ são os ângulos diretores de um vetor não nulo \vec{v} , isto é, os ângulos que o vetor \vec{v} forma com os eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente, mostre que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

25. Demostre as seguintes relações:

$$\text{(a)} \quad \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}. \quad \text{(b)} \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{z} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{z} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]\vec{w}.$$

26. Os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} têm normas 4, 2 e 6, respectivamente, e o ângulo entre quaisquer dois deles, na ordem apresentada, é $\pi/3$ rad. Calcule $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|$.
27. Prove as seguintes afirmações:
- (a) Se $\vec{a} \bullet \vec{v} = \vec{b} \bullet \vec{v}$, $\forall \vec{v}$, então $\vec{a} = \vec{b}$.
- (b) Se $\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b} \times \vec{v}$, $\forall \vec{v}$, então $\vec{a} = \vec{b}$.
- (c) Se $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$, então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são coplanares.

1.7 Regra de Cramer

Daremos a seguir uma breve descrição da Regra de Cramer para resolução de sistemas lineares 3×3 . Começamos com dois resultados básicos, que serão utilizados na seqüência.

■ Usando a relação $[\vec{w}, \vec{z}, \vec{X}] = [\vec{X}, \vec{w}, \vec{z}]$, com $\vec{X} = \vec{u} \times \vec{v}$, vamos demonstrar que:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \bullet (\vec{w} \times \vec{z}) = (\vec{u} \bullet \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{z}) - (\vec{u} \bullet \vec{z}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

SOLUÇÃO Temos $[\vec{w}, \vec{z}, \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{w}, \vec{z}]$ e considerando $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v}$, obtemos do Exercício 25(a), seção 1.4,

$$\begin{aligned} [\vec{w}, \vec{z}, \vec{u} \times \vec{v}] &= [\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}] \Leftrightarrow (\vec{w} \times \vec{z}) \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = [(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}] \cdot \vec{z} \\ &\Leftrightarrow (\vec{w} \times \vec{z}) \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = -[\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})] \cdot \vec{z} = -[(\vec{w} \bullet \vec{v})\vec{u} - (\vec{w} \bullet \vec{u})\vec{v}] \cdot \vec{z} \\ &= (\vec{w} \bullet \vec{u})(\vec{v} \bullet \vec{z}) - (\vec{w} \bullet \vec{v})(\vec{u} \bullet \vec{z}) \end{aligned}$$

■ Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do espaço e \vec{X} um vetor qualquer, vamos mostrar que

$$\vec{X} = \frac{1}{\Delta}[\vec{X}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{u} + \frac{1}{\Delta}[\vec{u}, \vec{X}, \vec{w}]\vec{v} + \frac{1}{\Delta}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{X}]\vec{w}$$

onde $\Delta = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

SOLUÇÃO Do Exercício ??, temos:

$$(i) (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{x}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]\vec{w} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{x}.$$

$$(ii) (\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{x}) = -(\vec{w} \times \vec{x}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = -([\vec{w}, \vec{x}, \vec{v}]\vec{u} - [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u}]\vec{v}),$$

de onde resulta que:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]\vec{w} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{x} = -[\vec{w}, \vec{x}, \vec{v}]\vec{u} + [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u}]\vec{v}.$$

Se na última igualdade isolarmos \vec{x} no 1º membro, chegaremos ao resultado.

Consideremos, agora, o sistema linear 3×3 :

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = d_1 \\ b_1x + b_2y + b_3z = d_2 \\ c_1x + c_2y + c_3z = d_3 \end{cases} \quad (*)$$

e os vetores $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$, $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$, $\vec{w} = a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k}$ e $\vec{X} = d_1\vec{i} + d_2\vec{j} + d_3\vec{k}$, de

modo que $\vec{X} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$. Se o determinante

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

é não nulo, então os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} formam uma base do espaço e, portanto, os escalares x , y e z são únicos, ou seja, a solução do sistema (*) é única e esta vem dada por:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \text{e} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

onde os determinantes Δ_x , Δ_y e Δ_z são obtidos a partir do Δ , do modo seguinte:

$$\Delta_x = \det \begin{bmatrix} d_1 & a_2 & a_3 \\ d_2 & b_2 & b_3 \\ d_3 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \Delta_y = \det \begin{bmatrix} a_1 & d_1 & a_3 \\ a_2 & d_2 & b_3 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_z = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & c_2 & d_3 \end{bmatrix}.$$

No caso em que o sistema é homogêneo, isto é, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, então a única solução do sistema é $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.

QUESTÕES DE REVISÃO

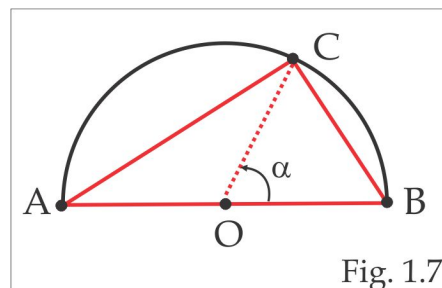
1. Dado um ponto $P(x, y, z)$, o que representam, em termos de distâncias, as quantidades:

$$\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sqrt{x^2 + z^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{y^2 + z^2} ?$$

E as coordenadas x , y e z o que medem?

2. Como devem ser os escalares x , y e z , para que o ponto $P(x, y, z)$ esteja sobre:
- (a) o eixo x (b) o eixo y (c) o eixo z (d) o plano xy (e) o plano xz (f) o plano yz .
3. Como verificar se os pontos A , B e C são colineares? Três pontos são sempre coplanares? E três vetores?
4. O que são segmentos orientados equipolentes? Vetores determinados por segmentos orientados equipolentes são iguais?
5. O que é *Combinação Linear* dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} ? E *Base* do espaço \mathbb{R}^3 , o que é?
6. O que são Vetores LI e vetores LD? Vetores colineares são LI ou LD? E coplanares? Qual argumento algébrico se usa para testar a dependência linear entre vetores?
7. O que é $\|\vec{a}\|$? Em que condições se tem $\|\vec{a}\| = 0$?
8. O que é um vetor unitário? Dado um vetor não nulo \vec{a} quantos vetores unitários e colineares com \vec{a} existem? Como determiná-los?

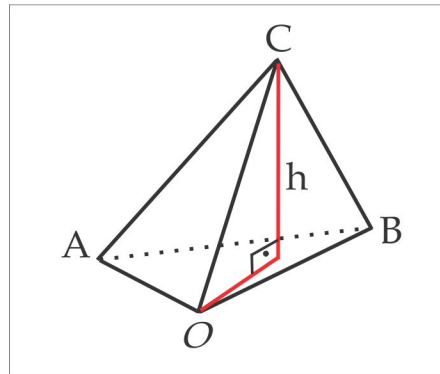
9. Sob que condições três vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} podem ser representados pelos lados de um triângulo?
10. Como verificar se quatro pontos A, B, C e D são coplanares ou não?
11. Identifique o plano gerado pelos seguintes pares de vetores: (a) \vec{i} e \vec{j} (b) \vec{i} e \vec{k} (c) \vec{j} e \vec{k} .
12. Na representação $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ como são denominados os escalares x , y e z ? Como você relaciona o vetor \vec{a} e o ponto $P(x, y, z)$?
13. Como se define o produto interno entre dois vetores? Como usar o produto interno para determinar o ângulo entre dois vetores não nulos?
14. E o produto vetorial, o que é? Que ente geométrico pode ser calculado com o produto vetorial?
15. Para que serve o produto misto?
16. O que é o *plano gerado* por um par de vetores LI? E a *reta gerada* por um vetor não nulo?
17. O que é uma base ortogonal do espaço? E uma base ortonormal, o que é?
18. Como usar o produto interno para achar as coordenadas de um vetor em uma base ortonormal?
19. O triângulo ABC está inscrito no semicírculo de raio R , como ilustra a Figura 1.7 abaixo. Mostre que o triângulo é retângulo no vértice C .



20. Um vetor não nulo \vec{v} forma com os eixos Ox e Oy os ângulos $\alpha = 120^\circ$ e $\beta = 45^\circ$, respectivamente. Determine o ângulo entre \vec{v} e o eixo Oz .
21. Dois ângulos diretores de um vetor \vec{v} são: $\alpha = 60^\circ$ e $\gamma = 120^\circ$. Se $\|\vec{v}\| = 2$, determine as coordenadas do vetor \vec{v} .
22. Determine os *cosenos diretores* do vetor $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 12\vec{k}$.
23. Determine dois vetores \vec{v} e \vec{w} , de norma 75, paralelos ao vetor $\vec{u} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$.

24. Verifique que os vetores $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$, $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k})$ e $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ são ortonormais e determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ na base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.
25. Sejam $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$. O conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do espaço \mathbb{R}^3 ? Essa base é ortonormal? Ela é ortogonal? É possível escrever o vetor $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ como combinação linear de \vec{u}, \vec{v} e \vec{w} ?
26. Se $\|\vec{u}\| = 4$ e $\|\vec{v}\| = 3$ e o ângulo entre \vec{u} e \vec{v} e entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ é α , calcule $\cos \alpha$.
27. Se \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são vetores unitários tais que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, mostre que $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -3/2$.
28. Se \vec{u} e \vec{v} são vetores não nulos e ortogonais, determine o valor de x de modo que os vetores $\vec{u} + x\vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$ sejam ortogonais.
29. Se $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/6$, calcule $\|(2\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})\|$.
30. Determine dois vetores de norma 3, ortogonais aos vetores $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$.
31. Determine um vetor \vec{v} tal que $\vec{v} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 6$ e $\vec{v} \times (2\vec{i} + 3\vec{j}) = 4\vec{k}$.
32. Qual a área do paralelogramo que tem três vértices consecutivos nos pontos $A(1, 0, 1)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(3, 2, -5)$?
33. Verifique se os pontos $A(-1, -3, 4)$, $B(-2, 1, -4)$ e $C(3, -11, 5)$ são vértices de um triângulo. Em caso afirmativo, classifique o triângulo em retângulo, isóceles ou equilátero e calcule sua área.
34. Considere os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Construa uma base ortonormal positiva $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, sendo \vec{a} paralelo ao vetor \vec{u} e \vec{b} paralelo ao vetor \vec{v} . Determine as coordenadas do vetor $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ na base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.
35. Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A(2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B(4, 1, 3)$, $C(1, 3, 2)$ e $D(1, 2, 1)$.
36. Considere o triângulo de vértices $A(3, 2, 1)$, $B(3, 2, 2)$ e $C(3, 3, 2)$. Determine:
- (a) Os ângulos do ΔABC ; (b) O vetor projeção do menor lado sobre o maior lado;
- (c) A área do ΔABC ; (d) A altura do triângulo, relativa ao maior lado.
37. Dados $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$, construa uma base ortonormal negativa $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, sendo \vec{u} paralelo ao vetor \vec{a} e \vec{v} coplanar com \vec{a} e \vec{b} .

38. Seja $x < 0$ e considere os vetores $\vec{u} = 2x\vec{i} + 2x\vec{j} + x\vec{k}$, $\vec{v} = x\vec{i} - 2x + 2x\vec{k}$ e $\vec{w} = 2x\vec{i} - x\vec{j} - 2x\vec{k}$. Mostre que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base ortogonal negativa. Determine o(s) valor(es) x que torna(m) a base ortonormal e, em seguida, encontre as coordenadas do vetor $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ nessa base ortonormal.
39. Verifique que os pontos $A(4, 6, 2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(3, 3, 3)$ e $D(7, 4, 3)$ são vértices de um paralelepípedo, calcule o volume do sólido e as coordenadas do ponto E , sendo AE uma diagonal interna.
40. Mostre que o volume do tetraedro da figura abaixo é: $V = \frac{1}{6} [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]$.



RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.1

1. Em alguns casos, uma ilustração geométrica ajuda na conclusão.
 - (a) Para que os vetores \vec{AB} e \vec{CD} sejam iguais é necessário e suficiente que os segmentos orientados AB e CD sejam equipolentes
 - (b) Segmentos equipolentes determinam o mesmo vetor.
 - (c) Dois vetores são Linearmente Dependentes (LD) quando possuírem representantes paralelos. Tais representantes podem ser colineares ou não.
 - (d) O plano que contém representantes dos vetores \vec{b} e \vec{c} também contém pontos do espaço, que são representantes do vetor nulo \vec{a} .
 - (e) Os pontos não alinhados A , B e C podem ser determinados de tal forma que os segmentos orientados OA , OB e OC sejam coplanares. Neste caso, os vetores \vec{OA} , \vec{OB} e \vec{OC} são LD.

- (f) Seriam equipolentes se tivessem o mesmo sentido. Por exemplo, os segmentos orientados e não nulos AB e BA são colineares, de mesmo comprimento e, contudo, não são equipolentes.
- (g) O quadrilátero de vértices A, B, C e D é um paralelogramo.
- (h) Qualquer ponto do espaço é um representante do vetor nulo.
- (i) O quadrilátero de vértices A, B, C e D é um paralelogramo, mas, não um quadrado, necessariamente.
- (j) É isso que estabelece o conceito de vetor.
- (k) Os dois vetores LI determinados pelos 3 pontos não colineares geram o plano que contém os três pontos.
- (l) Quaisquer dois vetores (LI ou LD) são sempre coplanares.
- (m) Se não fossem coplanares, seriam geradores do espaço e, portanto, LI.
- (n) Eles podem ser coplanares e não colineares.
2. Recorde-se que $2\vec{u}$ tem mesma direção e sentido que \vec{u} e $-\vec{v}$ tem sentido oposto ao vetor \vec{v} .
3. Decorre da equipolência dos segmentos orientados AD e BC .
4. Observando a Figura 1.12, vemos que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

e, somando essas expressões, chegamos ao resultado.

5. (a) \overrightarrow{AC} (b) \overrightarrow{CA} (c) \overrightarrow{AB} (d) \overrightarrow{BD} .
6. O vetor procurado é $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$
7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$.
8. Seja M o ponto médio da diagonal AC e mostremos que M é ponto médio da diagonal DB .

Observando a Figura 1.9, vemos que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$, e considerando que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, resulta $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

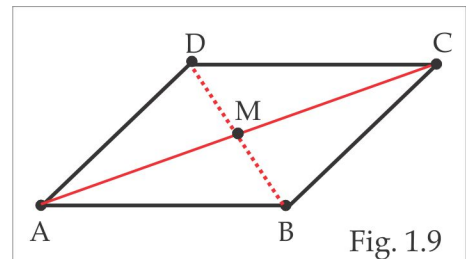
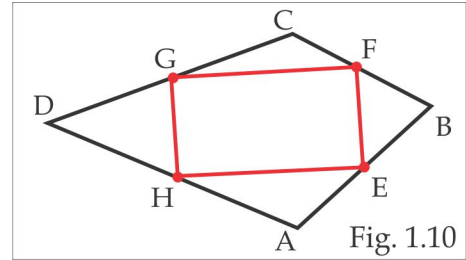


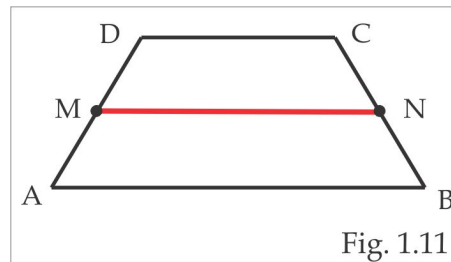
Fig. 1.9

9. No quadrilátero da Figura 1.10, E , F , G e H são os pontos médios dos lados.

É suficiente mostrar que $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE}$ e $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$.
Temos $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, e, de modo similar, encontramos $\overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.



10. Observe o trapézio da Figura 1.11 abaixo, em que M e N são os pontos médios de AD e BC , respectivamente.



Temos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

11. (a) Devemos encontrar escalares x e y , tais que $\overrightarrow{CD} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{BC}$. Observando a Figura 1.4, vemos que:

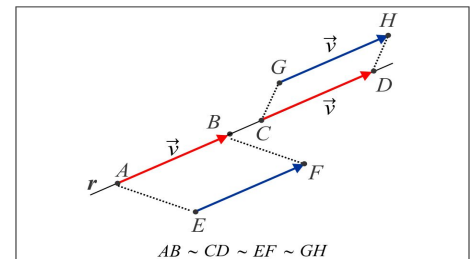
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

(b) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (c) $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

12. No triângulo da Figura 1.12, M e N são os pontos médios dos lados AC e BC , respectivamente.

É suficiente mostrar que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. De fato,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$



13. O *baricentro* de um triângulo é, por definição, o encontro das *medianas* do triângulo, como ilustra a Figura 1.14.

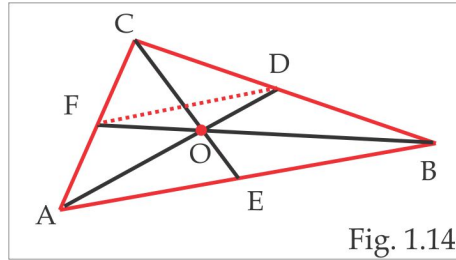


Fig. 1.14

Suponhamos que o ponto O divida a mediana AD na razão de 2 para 1 e mostremos que o ponto O também divide a mediana BF na mesma razão. Temos:

$$\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{DF} + 2\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OF}. \quad (\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{DF}, \text{ Ex. 12})$$

14. Do Exercício 13 segue que $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BF}$ e $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$. Então:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE}) = \frac{2}{3} \left[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}) \right] = \\ &= \frac{2}{3} (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

15. Na Figura 1.13 ilustramos a situação geométrica, onde vemos que

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}, \text{ e considerando que } \overrightarrow{PA} = \frac{n}{m}\overrightarrow{AQ},$$

encontramos:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \frac{n}{m}\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OP} + \frac{n}{m}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OQ}).$$

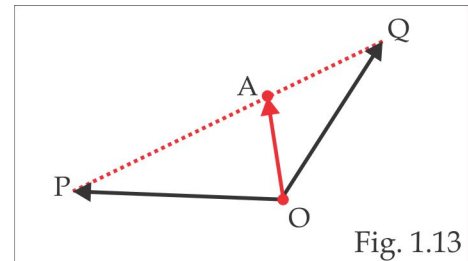


Fig. 1.13

16. Lembramos que \vec{a} , e \vec{b} são LI se, e somente se, a equação vetorial $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ admite apenas a solução nula $x = 0$ e $y = 0$. Considere, então, uma combinação linear nula

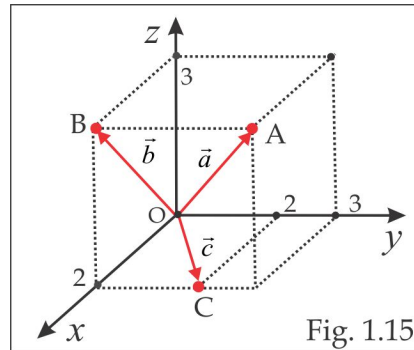
$$x(2\vec{a} + 3\vec{b}) + y(\vec{a} - 6\vec{b}) = \vec{0}$$

e mostre que $x = 0$ e $y = 0$. No caso de três vetores a situação é similar. Três vetores \vec{a} , \vec{b} , e \vec{c} são LI se, e somente se, a equação vetorial $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ admite apenas a solução nula $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Recorde-se que uma base é um conjunto constituído de três vetores LI.

17. $x < 0$ e $y = 0$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.2

- (a) $\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{5}{2}\vec{k}$ (b) $-15\vec{i} + 2\vec{j} - 22\vec{k}$ (c) $-5\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} - \frac{15}{2}\vec{k}$ (d) $-3\vec{i} - 5\vec{k}$.
- $\vec{v} = -3\vec{u} / \|\vec{u}\| = -\sqrt{6}\vec{i} + \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{j} - \frac{\sqrt{6}}{2}\vec{k}$.
- O ponto $B(2, 0, 3)$ jaz no plano xz , porque tem a ordenada $y = 0$, enquanto o ponto $C(2, 2, 0)$ tem a cota $z = 0$ e, portanto, jaz no plano xy . Veja a ilustração geométrica na Figura 1.15.

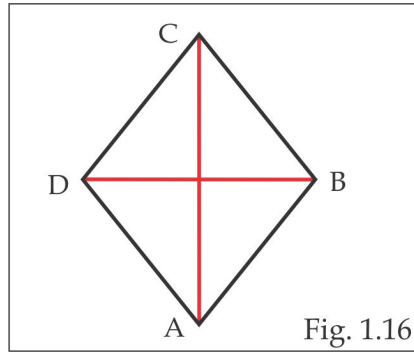


- $\vec{AB} = -4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{AC} = -4\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$; $\vec{BC} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$.
- $B(4, 6, 8)$.
- $M(3, 2, 3)$, $\|\vec{PQ}\| = \sqrt{24}$.
- $\vec{w} = (-\frac{5}{2})\vec{i} + 2\vec{j} + (-\frac{5}{2})\vec{k}$.
- $D(-8, -2, 7)$.
- $C(6, -1, 19)$; $D(9, -5, 12)$.
- (a) LI (b) LD (c) LI (d) LD .
- $m = 2$ ou $m = -1$.
- Com $m = 4$, tem-se $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$.
- Não.
- $y = 2z$
- (a) Sim. (b) Não.

16. Sim. Tem-se $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$.
17. Sim, porque os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} são *LI*.
18. A base é negativa e $\vec{v} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{24}{49}\vec{b} + \frac{2}{49}\vec{c}$.
19. $\vec{w} = 8\vec{u} + 7\vec{v}$.
20. $x \neq 1$ e $x \neq -2$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 1.3

1. V, F, V, F, F, F, V, V, V, F, V, V, V, V, F, F, V.
2. É suficiente mostrar que os vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BD} são ortogonais (perpendiculares), isto é, $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
Veja a ilustração geométrica na Figura 1.16.

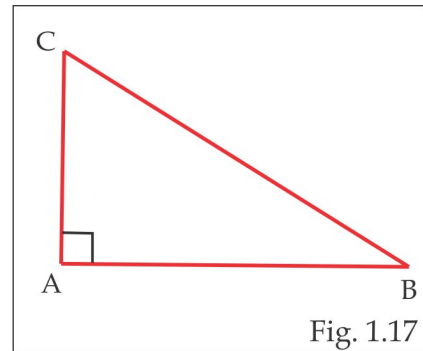


Considere as representações $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ e use as propriedades do produto interno para concluir.

3. Da Figura 1.17, vemos que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ e sendo os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} , então $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Temos:

$$\begin{aligned}
 \|\overrightarrow{BC}\|^2 &= \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BC} \\
 &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \bullet (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\
 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2(\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}) + \|\overrightarrow{AC}\|^2 \\
 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2
 \end{aligned}$$



4. O vetor \vec{v} será ortogonal ao vetor \vec{a} , quando $\vec{v} \bullet \vec{a} = 0$. Ora,

$$\vec{v} \bullet \vec{a} = \vec{b} \bullet \vec{a} - \frac{(\vec{a} \bullet \vec{b})}{\|\vec{a}\|} \vec{a} \bullet \vec{a} = \vec{b} \bullet \vec{a} - \vec{a} \bullet \vec{b} = 0.$$

5. (a) Considerando $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

(b) Temos:

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{u} - \vec{v} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\| \Rightarrow \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|. \quad (1.17)$$

De modo similar, encontramos:

$$\|\vec{v}\| - \|\vec{u}\| \leq \|\vec{v} - \vec{u}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \quad (1.18)$$

Combinando (1.17) e (1.18) chega-se ao resultado.

(c) Consequência direta dos Produtos Notáveis.

(d) Consequência direta dos Produtos Notáveis.

6. **Etapa 1.** Normalizamos o vetor \vec{a} e obtemos o primeiro vetor básico $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$.

Etapa 2. Usando o produto interno, construímos um vetor \vec{b} , ortogonal ao vetor \vec{a} e, em seguida, normalizamos \vec{b} e obtemos o segundo vetor básico $\vec{v} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$, ortogonal ao vetor \vec{u} .

Etapa 3. Um terceiro vetor básico, unitário e ortogonal aos vetores u e v , é: $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

7. Consequência dos Produtos Notáveis: $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \pm 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

8. $\sqrt{85}$.

9. 20.

10. -62.

11. $\frac{2}{3}\vec{i} - \frac{4}{3}\vec{j} - \frac{4}{3}\vec{k}$.

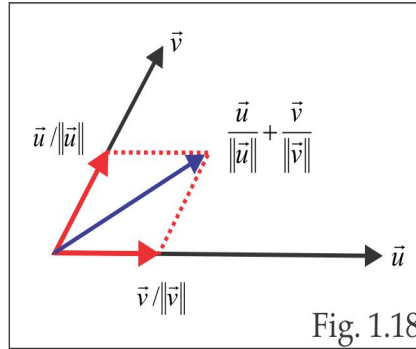
12. $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$.

13. $\vec{u} = \frac{-3}{\sqrt{34}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{34}}\vec{j}$.

14. $\|\vec{u}\| = 2$ e $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 34$.

15. $x = 0$.

16. O vetor $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} + \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ aponta na direção da bissetriz do ângulo entre \vec{u} e \vec{v} . O unitário na direção da bissetriz é, portanto, $\vec{w} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$. Veja a Figura 1.18.



17. $\hat{A} = \pi/2$; $\hat{B} = \hat{C} = \pi/4$

18. (a) -7 (b) 0 (c) 7 (d) 0 .

19. (a) coplanares (b) não coplanares.

20. 24.

21. Se \vec{a} for paralelo a \vec{b} , então $\vec{a} + \vec{b}$ será paralelo a $\vec{a} - \vec{b}$.22. Não, porque $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$.23. (a) $x = \pm 3/5$ (b) $x \in \mathbb{R}$, se \vec{a} e \vec{b} forem paralelos e $x = 0$, caso contrário.

24. $\vec{v} = 70\vec{i} + 50\vec{j} + 10\vec{k}$.

25. Decorre das relações:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\|\vec{v}\|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\|\vec{v}\|} \quad \text{e} \quad \cos \gamma = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\|\vec{v}\|}.$$

26. (a) Use coordenadas, desenvolva os dois lados da igualdade e comprove o resultado.

(b) Do item (a), segue que $\vec{a} \times (\vec{z} \times \vec{w}) = (\vec{a} \cdot \vec{w})\vec{z} - (\vec{a} \cdot \vec{z})\vec{w}$ e considerando $\vec{a} = \vec{u} \times \vec{v}$ obtemos:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{z} \times \vec{w}) = [(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}]\vec{z} - [(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{z}]\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{z} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]\vec{w}.$$

27. Da relação

$$\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w})$$

e dos dados, encontramos $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = 100$ e, portanto, $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\| = 10$.

28. (a) Se $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{b} \cdot \vec{v}$, então $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{v} = 0$, $\forall \vec{v}$, e considerando $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, obtemos:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}.$$

(b) Sabendo que $(\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{v} = \vec{0}$, $\forall \vec{v}$, consideramos, sucessivamente, $\vec{v} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$ e $\vec{v} = \vec{k}$, para deduzir que \vec{a} e \vec{b} têm as mesmas coordenadas. Logo, $\vec{a} = \vec{b}$.

(c) É suficiente mostrar que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$. Para isto, multiplicamos escalarmente a equação $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$ por \vec{w} e encontramos: $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$, isto é, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$.

QUESTÕES DE REVISÃO

1. A quantidade $\sqrt{x^2 + y^2}$ representa a distância do ponto $P(x, y, z)$ ao eixo z , enquanto a coordenada x é, em valor absoluto, a distância de P ao plano yz .
2. (a) $y = 0$, $z = 0$ (b) $x = 0$, $z = 0$ (c) $x = 0$, $y = 0$ (d) $z = 0$ (e) $y = 0$ (f) $x = 0$.
3. Os pontos A , B e C são colineares se os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} forem LD, isto é, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Sim, três pontos são sempre coplanares, podendo ser colineares ou não. Três vetores podem ser coplanares ou não.
4. Dois segmentos orientados são equipolentes, quando possuírem mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento. Segmentos orientados são equipolentes determinam o mesmo vetor.
5. Qualquer expressão do tipo $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$, com x, y e z escalares, é uma *combinação linear* dos vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} . Uma *base* do \mathbb{R}^3 é qualquer conjunto constituído de três vetores não coplanares (LI). Um fato fundamental é que qualquer vetor do espaço se expressa, de modo único, como combinação linear dos vetores da base.
6. Dois vetores são LD quando forem paralelos, isto é, possuírem representantes colineares. Três vetores são LD quando possuírem representantes coplanares, podendo ser colineares ou não. A

dependência linear pode ser investigada a partir da combinação linear nula ou usando produtos entre vetores:

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ são LD se, e somente se, } \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ e } \vec{w} \text{ são LD se, e somente se, } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0.$$

7. A quantidade $\|\vec{a}\|$ é a *norma* do vetor \vec{a} e é igual ao comprimento de qualquer representante do vetor \vec{a} . Temos que $\|\vec{a}\| = 0$ se, e somente se, $\vec{a} = \vec{0}$ (o único vetor de norma zero é o vetor nulo).
8. Um vetor \vec{a} diz-se *unitário* se $\|\vec{a}\| = 1$. Se \vec{a} é um vetor não nulo, existem dois e somente dois vetores unitários, colineares com \vec{a} , os quais são dados por:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad \text{e} \quad \vec{v} = -\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.$$

9. Os vetores \vec{a}, \vec{b} e \vec{c} não devem ser colineares e $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
10. Se $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 0$, os pontos A, B, C e D serão coplanares.
11. Os planos coordenados xy, xz e yz , respectivamente.
12. Os escalares x, y e z são as coordenadas do vetor \vec{a} na base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e temos $\vec{a} = \vec{OP}$.
13. O produto interno entre os vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} é o número real definido por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

onde θ é o menor ângulo positivo entre dois representantes de \vec{u} e \vec{v} , com mesma origem. O ângulo θ entre \vec{u} e \vec{v} é calculado pela relação:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

No caso em que um dos vetores é nulo, o produto interno é definido com sendo zero.

14. O produto vetorial entre os vetores não paralelos \vec{u} e \vec{v} é o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$, caracterizado por:

(i) **COMPRIMENTO:** $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| |\sin \theta|.$

(ii) **DIREÇÃO:** $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular ao plano gerado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} .

(iii) **SENTIDO:** O terço ordenado $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ é positivo.

A quantidade $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ representa a área do paralelogramo cujos lados não paralelos são representantes de \vec{u} e \vec{v} . No caso em que os vetores \vec{u} e \vec{v} são colineares (paralelos) define-se o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ como sendo o vetor nulo $\vec{0}$.

15. Podemos usar o produto misto para testar a dependência linear entre três vetores e, também, para calcular o volume do paralelepípedo, cujas arestas são representantes de três vetores LI (não coplanares).
16. O *plano gerado* pelos vetores LI \vec{u} e \vec{v} é o *lugar geométrico* constituído pelos vetores da forma $x\vec{u} + y\vec{v}$, com x e y números reais. Por outro lado, a *reta gerada* pelo vetor não nulo \vec{u} é o *lugar geométrico* constituído pelos vetores da forma $t\vec{u}$, sendo t um número real.
17. Uma base *ortogonal* do espaço é qualquer conjunto constituído por três vetores LI, mutuamente ortogonais. Se, além de ortogonais, os três vetores forem unitários (de norma igual a 1) a base denominar-se-á *base ortonormal*. Por exemplo, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal.
18. Dada uma base ortonormal $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, qualquer vetor \vec{a} do espaço se expressa, de maneira única, sob a forma:

$$\vec{a} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w}$$

e as coordenadas x , y e z são dadas por:

$$x = \vec{a} \cdot \vec{u}, \quad y = \vec{a} \cdot \vec{v} \quad \text{e} \quad z = \vec{a} \cdot \vec{w}.$$

19. É suficiente mostrar que $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = 0$. Temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \bullet (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) = \\ &= \overrightarrow{CO} \bullet \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CO} \bullet \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} \\ &= R^2 - R^2 + R^2 \cos(\pi - \alpha) + R^2 \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

20. 60° .

21. $\vec{v} = \vec{i} \pm \sqrt{2}\vec{j} - \vec{k}$.

22. $\cos \alpha = 4/13$, $\cos \beta = 3/13$ e $\cos \gamma = 12/13$.

23. $\vec{v} = -48\vec{i} + 45\vec{j} - 36\vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{v}$.

24. $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{7}{\sqrt{3}}\vec{k}$.

25. $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base não ortogonal. Não sendo ortogonal, não pode ser ortonormal. Temos $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
26. ± 1 e $\pm \frac{7}{24}$.
27. Multiplique a equação $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$ escalarmente por \vec{u} , por \vec{v} e depois por \vec{w} e some os resultados.
28. $x = (\|\vec{u}\| / \|\vec{v}\|)^2$.
29. $9/2$.
30. $\vec{v} \pm \frac{3}{\sqrt{11}}(\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k})$.
31. $\vec{v} = \frac{24}{13}\vec{i} + \frac{10}{13}\vec{j}$.
32. $A = 10\sqrt{2}$.
33. Isóceles e $A = 5\sqrt{185}$.
34. Primeiro, observe que os vetores \vec{u} e \vec{v} são ortogonais. Considere $\vec{a} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{b} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ e $\vec{c} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$.
35. $V = 15$.
36. a. $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$ e $\hat{C} = 45^\circ$ b. $\text{Proj}_{\vec{AC}} \vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$ c. $1/2$ d. $h = \sqrt{2}/2$.
37. Considere $\vec{u} = \vec{a} / \|\vec{a}\|$, $\vec{v} = (\vec{a} + 9\vec{b}) / \|\vec{a} + 9\vec{b}\|$ e $\vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) / \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.
38. $x = \pm 1/3$ e $\vec{v} = \frac{-5}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{10}{3}\vec{w}$.
39. Basta verificar que $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] \neq 0$. O volume é precisamente o valor absoluto do produto misto. O ponto E é tal que:
- $$\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AD},$$
- de modo que $\text{vol} = 24$ e $E(3, -3, 3)$.
40. Note que $\text{vol} = \frac{1}{3}(\text{área da base}) \times h$ e que a área da base pode ser calculada pela norma do produto vetorial.



Introdução

Um plano α é o lugar geométrico (conjunto de pontos) constituído dos pontos $P(x, y, z)$ do espaço \mathbb{R}^3 , governados por uma equação do primeiro grau nas variáveis x , y e z :

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad (2.1)$$

sendo a , b , c e d constantes reais. Em símbolos escrevemos:

$$P(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0.$$

O *Grau de Liberdade* (anota-se GL) de uma sistema é o número de variáveis menos o número de equações. No sistema (2.1) temos $GL = 3 - 1 = 2$ e para encontrar pontos do plano α escolhemos duas variáveis livres, às quais serão atribuídos valores arbitrários, e a terceira variável é calculada a partir da equação (2.1). Por exemplo, no caso em que o coeficiente c é não nulo, escolhendo x e y como variáveis livres e atribuindo valores $x = \lambda$ e $y = \mu$, obtemos da equação:

$$z = -\frac{d}{c} - \frac{a\lambda}{c} - \frac{b\mu}{c}.$$

Este processo sugere a descrição do plano α em função dos parâmetros λ e μ , pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = (-a\lambda - b\mu - d) / c \end{cases} \quad (2.2)$$

O mesmo plano α está descrito pela Equação Cartesiana (2.1) e pelas Equações Paramétricas (2.2). Na forma paramétrica, um ponto $P(x, y, z)$ do plano α é encontrado atribuindo-se valores aos parâmetros λ e μ e calculando-se os correspondentes valores de x , y e z .

EXEMPLO 2.0.1 A equação $x + y = 1$ é do tipo (2.1) e, portanto, representa no espaço \mathbb{R}^3 um certo plano α . Um fato que nos chama a atenção é que a variável z não figura na equação e isto indica que z é uma variável livre e assume qualquer valor real; do ponto de vista gráfico, isso significa que o plano α é paralelo ao eixo Oz . Considerando na equação $x = 1$ e $z = 0$, obtemos $y = 0$ e encontramos o ponto

$A(1,0,0)$ do plano α ; considerando, agora, $x = 0$ e $z = 0$, encontramos no plano o ponto $B(0,1,0)$. Na forma paramétrica, o plano α é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \mu, \quad \text{com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A Figura 2.4 ilustra graficamente uma porção do plano α no primeiro diedro (1° octante). No plano xy

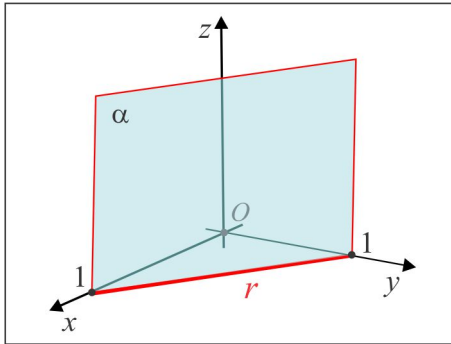


Figura 2.4: O plano $\alpha : x + y = 1$.

a equação $x + y = 1$ representa a reta r que passa nos pontos $A(1,0,0)$ e $B(0,1,0)$ e esta reta é descrita no espaço \mathbb{R}^3 pelo par de equações:

$$x + y = 1 \quad \text{e} \quad z = 0$$

que graficamente corresponde à interseção do plano $\alpha : x + y = 1$ com o plano $xy : z = 0$.

EXEMPLO 2.0.2 Seja β o plano descrito na forma paramétrica por:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu, \quad \text{com } \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Para encontrar pontos do plano β , atribuímos valores aos parâmetros λ e μ . Por exemplo, com $\lambda = 1$ e $\mu = 0$ encontramos o ponto $A(1,0,0)$; já a escolha $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ nos dá o ponto $B(0,1,0)$. O ponto $C(0,0,1)$ corresponde à escolha $\lambda = 0$ e $\mu = 0$.

(b) Se na expressão que define z substituirmos λ e μ por x e y , respectivamente, chegaremos à equação cartesiana do plano β :

$$\beta : x + y + z = 1.$$

(c) As interseções do plano β com os planos coordenados xy , xz e yz são as retas r_1 , r_2 e r_3 , determinadas considerando na equação cartesiana $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente. Temos, portanto, as retas interseções:

$$r_1 : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_3 : \begin{cases} y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

(d) Ilustração gráfica da porção do plano β no 1º octante.

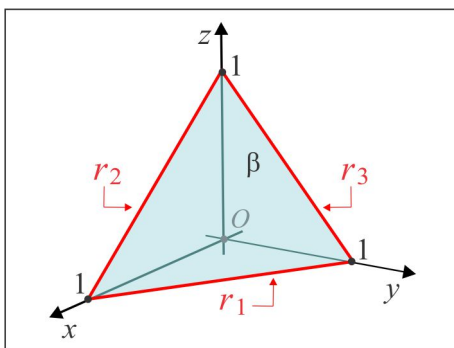


Figura 2.5: O plano β do Exemplo 2.0.2.

2.1 O plano no Espaço \mathbb{R}^3

Encontrar a equação de um plano torna-se um processo simples, quando conhecemos os elementos necessários que o determinam. Basicamente, um plano é determinado conhecendo-se um ponto por onde ele passa e um vetor normal. Por vetor normal a um plano α entendemos um vetor \vec{n}_α que é perpendicular (ortogonal) a qualquer vetor com representante no plano α .

2.1.1 Equação Normal do Plano

A Figura 2.6 ilustra um plano α passando no ponto A e normal ao vetor \vec{n}_α . Um ponto $P(x, y, z)$ do espaço está sobre o plano α se, e somente se, os vetores \vec{n}_α e \overrightarrow{AP} são ortogonais. Em símbolos, escrevemos:

$$P(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \bullet \overrightarrow{AP} = 0. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) é a *Equação Normal* do plano e conhecendo o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e o vetor

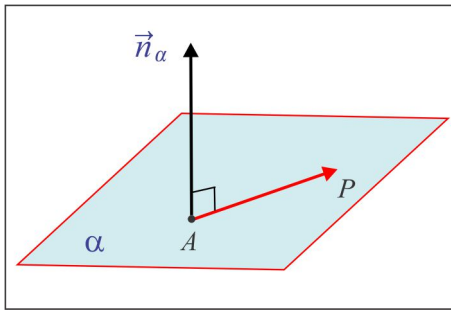


Figura 2.6: Plano Normal a um Vetor.

$\vec{n}_\alpha = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, temos $\overrightarrow{AP} = (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} + (z - z_A)\vec{k}$ e de (2.3) resulta:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \quad (2.4)$$

A equação (2.4) pode ser posta na forma:

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (2.5)$$

onde $d = -ax_A - by_A - cz_A$. A equação (2.5) é a equação cartesiana do plano que passa no ponto A e é normal ao vetor $\vec{n}_\alpha = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Ressaltamos que na equação (2.5) os coeficientes de x , y e z são precisamente as coordenadas do vetor normal.

EXEMPLO 2.1.1 Qual a equação cartesiana do plano α que passa no ponto $A(1, -2, 3)$ e é normal ao vetor $\vec{n} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$? O ponto $B(1, 1, 1)$ jaz no plano α ?

Solução: A equação do plano é da forma:

$$x - 3y + 4z + d = 0$$

e resta-nos calcular o valor do coeficiente d , o qual é obtido por substituição direta do ponto A na equação. Temos:

$$1 - 3(-2) + 4(3) + d = 0 \Rightarrow d = -19$$

e a equação cartesiana do plano α é: $x - 3y + 4z = 19$. O ponto B não pertence ao plano, porque suas coordenadas não satisfazem à equação do plano.

EXEMPLO 2.1.2 (Vetor Normal) Dado um plano α de equação cartesiana:

$$\alpha : ax + by + cz = d$$

o vetor $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é normal ao plano α . De fato, considerando no plano um vetor genérico $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, com $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$, temos $\vec{v} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$ e, assim:

$$\begin{aligned}\vec{n} \bullet \vec{v} &= a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) \\ &= (ax_2 + by_2 + cz_2) - (ax_1 + by_1 + cz_1) \\ &= d - d = 0,\end{aligned}$$

de onde segue que \vec{n} é ortogonal a qualquer vetor com representante no plano α .

2.1.2 Plano determinado por 3 Pontos

Um dos axiomas de geometria plana estabelece que três pontos não colineares A , B e C determinam um plano. Designemos por α tal plano e consideremos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, como ilustra a Figura 2.7.

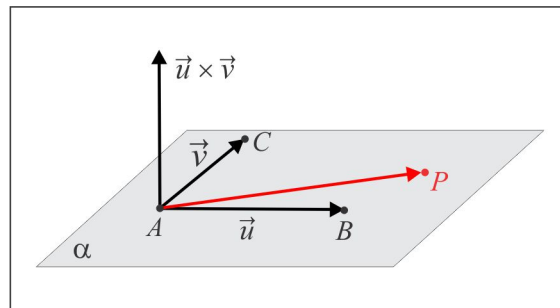


Figura 2.7: Plano determinado por 3 pontos.

EQUAÇÃO CARTESIANA: Lembrando que o vetor $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ é normal ao plano α , usamos a equação normal e obtemos:

$$P(x, y, z) \in \alpha \Leftrightarrow \vec{AP} \bullet (\vec{AB} \times \vec{AC}) = 0.$$

Dessa forma, encontramos a equação cartesiana do plano α a partir do produto misto:

$$[\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}] = 0,$$

e considerando os pontos $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ e $C(x_C, y_C, z_C)$, obtemos a equação na forma matricial:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS: Os três vetores \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} sendo coplanares, existem parâmetros (números) λ e μ , tais que:

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}.} \quad (2.6)$$

A equação vetorial (2.6) que representa o plano α é equivalente ao sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)\lambda + (x_C - x_A)\mu \\ y = y_A + (y_B - y_A)\lambda + (y_C - y_A)\mu \\ z = z_A + (z_B - z_A)\lambda + (z_C - z_A)\mu. \end{cases} \quad (2.7)$$

As equações (2.7) descrevem o plano α em função dos parâmetros λ e μ e recebem o nome de *Equações Paramétricas* do plano α .

OBSERVAÇÃO 2.1.3 Uma situação semelhante ocorre quando se conhece um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ do plano e dois vetores LI \vec{u} e \vec{v} , paralelos ao plano, como ilustra a Figura 2.8.

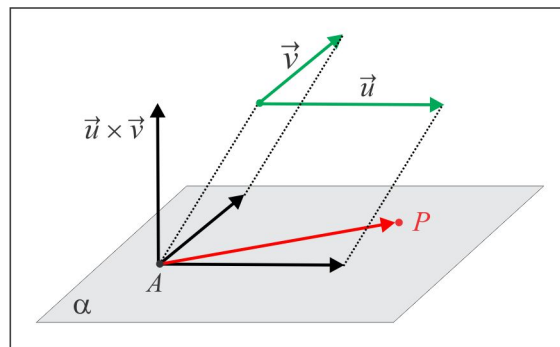


Figura 2.8: Plano determinado por ponto e 2 vetores LI.

Considerando os vetores $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, obtemos a equação cartesiana:

$$\boxed{[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}] = 0}$$

ou, na forma matricial:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

EXEMPLO 2.1.4 De acordo com (2.8), o plano α que passa nos pontos $A(1, 0, -1)$, $B(1, 1, 2)$ e $C(-2, 1, 0)$

é governado pela equação cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e calculando o determinante, encontramos:

$$\alpha : 2x + 9y - 3z = 5.$$

Na forma paramétrica, o plano é descrito pelas equações:

$$\begin{cases} x = 1 - 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = -1 + 3\lambda + \mu. \end{cases}$$

2.1.3 Posição Relativa entre dois Planos

A posição relativa de dois planos α e β é estabelecida a partir dos vetores normais \vec{n}_α e \vec{n}_β . Na Figura 2.9 ilustramos duas situações em que os planos são: (a) paralelos ou (b) ortogonais.



Figura 2.9: Posição relativa.

- (a) No caso (a) os planos são paralelos (anota-se $\alpha // \beta$) e isto ocorre se, e somente se, $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \vec{0}$.
- (b) No caso (b) os planos são ortogonais (anota-se $\alpha \perp \beta$) e isto ocorre se, e somente se, $\vec{n}_\alpha \bullet \vec{n}_\beta = 0$.

A Figura 2.10 ilustra a situação gráfica de dois planos α e β não paralelos nem ortogonais, onde destacamos que a reta r interseção de α e β tem a direção do produto vetorial $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$.

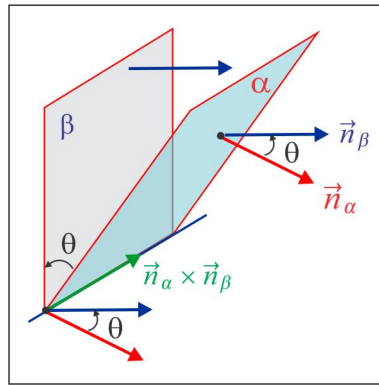


Figura 2.10: O ângulo entre dois planos.

Neste caso, o ângulo θ entre os planos é o menor ângulo orientado entre dois vetores normais \vec{n}_α e \vec{n}_β e, dessa forma, temos:

$$\cos \theta = |\cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)|. \quad (2.9)$$

Recorde-se que se o vetor \vec{n} é normal a um plano, então o vetor $-\vec{n}$ também o é, e daí a necessidade de colocar o módulo na expressão do cosseno.

EXEMPLO 2.1.5 *Vamos analisar as posições relativas entre os planos:*

$$\alpha : 2x + y - z = 0, \quad \beta : 4x + 2y - 2z + 3 = 0 \quad e \quad \gamma : x - 2y - z + 1 = 0.$$

Solução Primeiro, construímos vetores normais aos planos:

$$\vec{n}_\alpha = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{n}_\beta = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} \quad e \quad \vec{n}_\gamma = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

e observamos que $\vec{n}_\beta = 2\vec{n}_\alpha$ e daí resulta que $\vec{n}_\beta // \vec{n}_\alpha$ e, portanto, os planos α e β são paralelos. Por outro lado:

$$\cos(\alpha, \gamma) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\gamma|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\gamma\|} = \frac{1}{6}$$

e os planos α e γ não são paralelos e têm uma reta r em comum, como ilustra a Figura 2.11.

A reta r interseção de α e γ é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$, cujas coordenadas satisfazem ao sistema (2.10), constituído pelas equações cartesianas dos planos α e γ :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y - z = -1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Ressaltamos que os pontos da reta r são precisamente as soluções do sistema (2.10), as quais são determinadas observando que o grau de liberdade do sistema é $G = 3 - 2 = 1$.

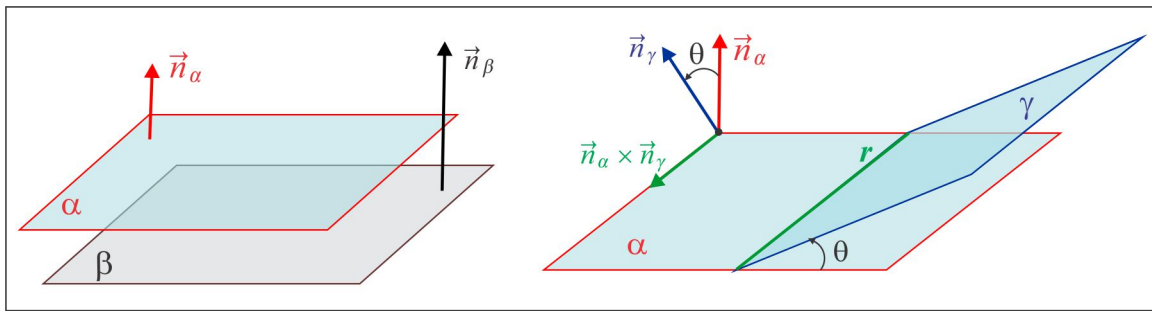


Figura 2.11: A reta r interseção de α e γ .

EXEMPLO 2.1.6 Explorando a reta r do Exemplo 2.1.5.

- (a) O grau de liberdade do sistema que define a reta r é igual a 1 e isto nos autoriza atribuir valor a uma das variáveis, considerada livre, e calcular as outras duas a partir do sistema de equações resultante. Cada procedimento deste nos dará um ponto da reta. Por exemplo, considerando $y = 0$, chegamos ao sistema 2×2 :

$$\begin{cases} 2x - z = 0 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

cuja solução é $x = 1$ e $z = 2$. Assim, encontramos o ponto $A(-1, 0, 2)$ da reta r . Considerando, agora, $x = 0$, chegamos ao sistema 2×2 :

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

com solução $y = 1/3$ e $z = 1/3$ e construímos o ponto $B(0, 1/3, 1/3)$ da reta r .

- (b) O vetor $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{5}{3}\vec{k}$ é paralelo à reta r e agora temos um ponto A da reta e a direção $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

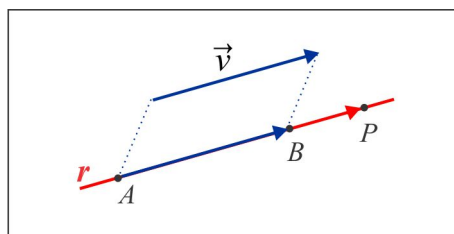


Figura 2.12: A reta r do Exemplo 2.1.6.

A ilustração gráfica indica que um ponto $P(x, y, z)$ está sobre a reta r se, e somente se, os vetores \overrightarrow{AP} e \vec{v} são colineares, isto é, existe um *parâmetro* t , tal que $\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$, $t \in \mathbb{R}$. Esta equação vetorial é equivalente ao terno de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 + \frac{1}{3}t \\ z = 2 - \frac{5}{3}t \end{cases} \quad (2.11)$$

que descrevem a reta r . Cada valor atribuído ao parâmetro t produz um ponto da reta; o ponto correspondente a $t = 0$ é precisamente o ponto A da reta r , obtido a partir de (2.11) com $t = 0$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.1

1. Classifique as afirmações em verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando cada resposta.

- (a) () Um ponto $A(x, y, z)$ pertence ao eixo z se, e somente se, $x = 0$ e $y = 0$.
- (b) () Um ponto $A(x, y, z)$ pertence ao plano xz se, e somente se, $y = 0$.
- (c) () Dados dois pontos A e B , existe um único plano que os contém.
- (d) () Um plano α paralelo aos vetores \vec{u} e \vec{v} é ortogonal aos vetores $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.
- (e) () Se os pontos A , B e C não estão alinhados, então existe um único plano que os contém.
- (f) () Dados um ponto A e um vetor \vec{v} , existe uma única reta passando por A , ortogonal a \vec{v} .
- (g) () Paralelo ao plano xy , existe um único plano que contém o ponto $A(1, 1, 1)$.
- (h) () Se l e r são duas retas concorrentes, existe um único plano que as contém.
- (i) () Duas retas não paralelas sempre têm um ponto em comum.

2. Enumere a coluna da direita, observando se o ponto pertence ao lugar geométrico.

- (1) $A(0, 0, 1)$ () plano $\alpha : x + y + z - 6 = 0$
- (2) $B(0, 1, 0)$ () plano xy
- (3) $C(1, 0, 0)$ () reta $l : x = t, y = t, z = t$
- (4) $D(x, y, 0)$ () eixo x
- (5) $E(0, y, z)$ () plano $y = 0$
- (6) $F(x, 0, z)$ () eixo z
- (7) $G(1, 2, 3)$ () interseção dos planos $z = 0$ e $x = 0$
- (8) $H(1, 1, 1)$ () plano $x = 0$

3. Determine as interseções do plano $\pi : 3x + 2y - z = 5$ com os eixos e com os planos coordenados.
4. Seja π o plano de equações paramétricas: $x = 4 - \lambda + 2\mu$, $y = 2 + \lambda$ e $z = 3\lambda - \mu$.
 - (a) Verifique que o ponto $A(4, 2, 0)$ jaz no plano π ;
 - (b) Determine dois outros pontos B e C do plano π ;
 - (c) Encontre dois vetores \vec{a} e \vec{b} paralelos ao plano π ;
 - (d) Determine a equação cartesiana do plano π .
5. O plano π passa nos pontos $A(3, 1, 2)$, $B(4, -1, -1)$ e $C(2, 0, 2)$. Descreva o plano π nas formas cartesiana e paramétrica.
6. Interprete, geometricamente, as condições abaixo impostas ao plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.
 - (a) $a = 0$ (b) $b = 0$ (c) $c = 0$ (d) $a = 0$ e $b = 0$ (e) $d = 0$.
7. Determine o plano α que contém o ponto $A(2, 1, -1)$ e é ortogonal ao vetor $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Os pontos $B(0, -1, 0)$ e $C(2, 1, -1)$ jazem nesse plano? Justifique.
8. Determine quatro vetores LD e não colineares, de normas 1, 2, 3 e 4, respectivamente, paralelos ao plano $\alpha : 3x + 2y - z = 4$.
9. Determine o plano que contém o eixo Oz e passa pelo ponto $A(4, 3, 1)$.
10. A equação $x = 1$ representa: um ponto (em \mathbb{R}); uma reta (em \mathbb{R}^2); um plano (em \mathbb{R}^3). Se α representa o plano de equação $x = 1$, determine:
 - (a) Dois pontos do plano α (b) um vetor \vec{n} , normal ao plano α , de comprimento 3.
11. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $A(1, 2, 2)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.
12. Determine a equação cartesiana do plano que contém os pontos $A(2, -1, 3)$ e $B(3, 1, 2)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$.
13. Qual valor de m faz com que o ponto $A(m, m + 2, 2)$ pertença ao plano $\pi : 2x - y - 3z + 5 = 0$? O plano π passa pela origem? De forma genérica, como deve ser a equação de um plano que passa pela origem?

14. Descreva, de forma genérica, como se determina um vetor de norma λ ortogonal a um plano dado. Imagine o plano dado na forma cartesiana ou na forma paramétrica.
15. Com base no exercício precedente, determine um vetor de comprimento 15, normal ao plano de equações paramétricas $x = 3 - 2\lambda - \mu$, $y = 1 + \lambda - 2\mu$, $z = -\lambda - \mu$.
16. O ponto $A(2, -1, -1)$ é o pé da perpendicular baixada da origem a um plano π . Determine a equação cartesiana do plano π .
17. Seja π o plano de equação $2x - 5y + 4z = 3$. Construa uma base ortonormal negativa $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, de modo que \vec{u} seja normal e \vec{v} e \vec{w} sejam paralelos ao plano π .
18. Determine a equação do plano que passa nos pontos $A(1, 2, 1)$ e $B(1, 3, 2)$ e faz com o plano $\pi : x + y + 2z = 11$ um ângulo de $\pi/3$ rad
19. Determine a equação cartesiana do plano que contém os pontos $A(7, 2, -3)$ e $B(5, 6, -4)$ e é paralelo ao eixo x .
20. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $5x + 2y - 3z + 6 = 0$.
21. Um plano α contém o eixo Oz e é paralelo ao vetor na direção da bissetriz do ângulo entre \vec{i} e \vec{j} . Determine a equação e dê uma idéia geométrica da posição do plano α .
22. Considere os pontos $A(7, 2, -3)$ e $B(5, 6, -4)$. Determine a equação do plano que passa pelo ponto médio e é ortogonal ao segmento AB .
23. Sejam A , B e C as interseções do plano $\pi : 4x + 8y + z = 16$ com os eixos coordenados. Calcule a área do triângulo ABC .
24. Verifique se o pares de planos são paralelos ou perpendiculares.

$$(a) \begin{cases} x = 1 - \lambda + 2\mu, & y = 3\lambda - \mu, & z = 2 + 2\lambda - 2\mu \\ x = 2\lambda + 3\mu, & y = 1 + \mu, & z = 2 + \lambda \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4x + 2y - 4z = 0 \\ 12x + 6y - 12z = 4 \end{cases}$$

25. Determine m e n para que os seguintes pares de equações representem planos perpendiculares.

$$(a) \begin{cases} 3x - 5y + mz = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + my + 3z = 1 \\ nx + y - 3z = 6 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} -2x + 7y - 3z = 0 \\ x + my + nz = 1 \end{cases}$$

26. Determine m e n para que os seguintes pares de equações representem planos paralelos.

$$(a) \begin{cases} nx - 6y - 6z = 0 \\ 2x + my + 3z = 5 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + my + 2z = 0 \\ 3x - y + nz = 2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} mx + 3y - 2z = 1 \\ 2x - 5y - nz = 0 \end{cases}$$

27. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ equidistantes de $A(-2, 1, -2)$ e $B(2, -2, 3)$.

28. Em cada caso, determine a equação do plano que atende às condições especificadas.

(a) Contém o ponto $A(1, -2, 4)$ e é paralelo ao plano xz .

(b) Contém o ponto $B(2, 2, -1)$ e é paralelo ao eixo y e ao eixo z .

(c) Contém os pontos $A(1, -1, -2)$ e $B(3, 1, 1)$ e é perpendicular ao plano $x - y + 3z = 5$.

(d) Contém o ponto $A(1, 2, 3)$ e é perpendicular aos planos $2x - y + 3z = 0$ e $x + 2y + z = 1$.

29. Em cada caso, determine a posição relativa e o ângulo entre os planos π_1 e π_2 .

$$(a) \quad \pi_1 : 2x + y - z = 1 \quad \pi_2 : 3x - 5y + z = 4$$

$$(b) \quad \pi_1 : x + 2y + 3z = 1 \quad \pi_2 : 2x + 4y + 6z = 2$$

$$(c) \quad \pi_1 : 2x - 2y + 6z = 6 \quad \pi_2 : x = -3\lambda - \mu, \quad y = -\mu \quad z = \lambda$$

$$(d) \quad \pi_1 : 3x + 6y + 3z = 27 \quad \pi_2 : 2x + 4y + 2z = 14$$

30. Se α , β e γ são os ângulos diretores de um vetor unitário \vec{u} , mostre que a equação do plano que contém o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é normal ao vetor \vec{u} é:

$$(x - x_0) \cos \alpha + (y - y_0) \cos \beta + (z - z_0) \cos \gamma = 0.$$

2.2 A Reta no Espaço \mathbb{R}^3

Dados um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, a reta r que passa no ponto A e é paralela ao vetor \vec{v} é governada pelas equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \quad (2.12)$$

as quais decorrem da equação vetorial $\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}$, sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico da reta r . O vetor \vec{v} , paralelo à reta r , recebe o nome de *Vetor Diretor* da reta e a cada valor atribuído ao parâmetro t corresponde um ponto da reta. O ponto correspondente ao valor $t = 0$ é precisamente o ponto A .

No caso em que o vetor diretor \vec{v} possui todas as coordenadas não nulas, eliminando o t nas equações paramétricas, vemos que a reta r pode ser descrita sob a forma:

$$r : \frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} \quad (2.13)$$

conhecida como *Forma Simétrica* da equação da reta.

É oportuno ressaltar que na forma paramétrica (2.12) os coeficientes a , b e c do parâmetro t são coordenadas do vetor \vec{v} paralelo à reta, enquanto na forma simétrica (2.13) os denominadores o são.

Se, por exemplo, a coordenada c for nula, então o vetor diretor $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e, por conseguinte, a reta r , será ortogonal ao vetor \vec{k} e, portanto, ao eixo Oz . Se duas coordenadas, digamos b e c , do vetor diretor são nulas, então o vetor diretor $\vec{v} = a\vec{i}$ é ortogonal ao plano yz . O mesmo ocorre com a reta r , como ilustrado na Figura 2.13.

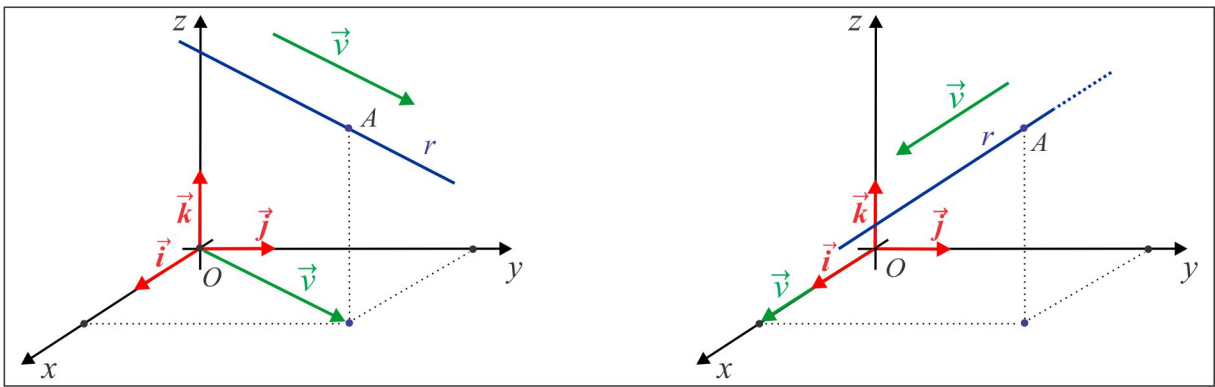


Figura 2.13: Reta no espaço.

EXEMPLO 2.2.1 Identifiquemos a reta r que passa no ponto $A(2, -2, 1)$ e é ortogonal ao plano:

$$\alpha : -x + 2y + z = 0.$$

Solução Na Figura 2.14 ilustramos a situação gráfica, onde vemos o vetor $\vec{n} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ é normal ao plano α e, conseqüentemente, paralelo à reta r .

Com o ponto $A(2, -2, 1)$ da reta e o vetor diretor $\vec{v} = \vec{n}$, chegamos às equações paramétricas da reta:

$$x = 2 - t, \quad y = -2 + 2t \quad \text{e} \quad z = 1 + t.$$

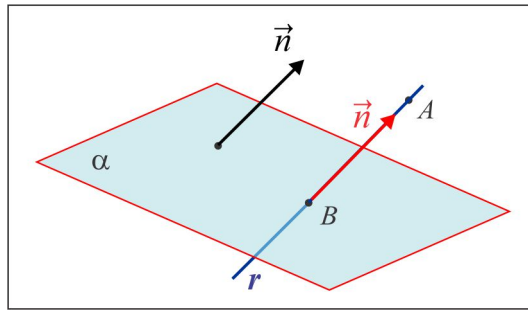


Figura 2.14: Reta r do Exemplo 2.2.1.

Na forma simétrica, a reta r é descrita por:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

EXEMPLO 2.2.2 Construir dois vetores unitários paralelos à reta r interseção dos planos:

$$\alpha : x + y + z = 1 \quad e \quad \beta : -2x + y - 3z = 2.$$

Solução Um vetor \vec{v} paralelo à reta r pode ser determinado de duas formas:

(i) Considerando os vetores \vec{n}_α e \vec{n}_β normais aos planos α e β , respectivamente, e em seguida fazendo

$$\vec{v} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta.$$

(ii) Considerando dois pontos A e B sobre a reta r e fazendo $\vec{v} = \vec{AB}$.

Os vetores unitários paralelos à reta r são $\vec{u} = \pm \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Um cálculo direto nos dá:

$$\vec{v} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = -4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \quad e \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{26}.$$

2.2.1 Posição Relativa Reta \times Plano

A posição de uma reta r em relação a um plano α é determinada a partir do vetor diretor \vec{v} da reta e do vetor normal \vec{n}_α do plano. Destacamos três situações ilustradas na Figura 2.15.

(a) A reta r é paralela ao plano α (anotamos $r // \alpha$). Neste caso, $\vec{v} \perp \vec{n}_\alpha$ e teremos $\vec{v} \bullet \vec{n}_\alpha = 0$.

(b) A reta r é perpendicular ao plano α ($r \perp \alpha$). Neste caso, \vec{v} é paralelo a \vec{n}_α e teremos $\vec{v} \times \vec{n}_\alpha = \vec{0}$.

(c) A reta r forma com plano α um ângulo θ , com $0 < \theta < \pi/2$. Neste caso, $\cos \theta = |\cos(\vec{v}, \vec{n}_\alpha)|$

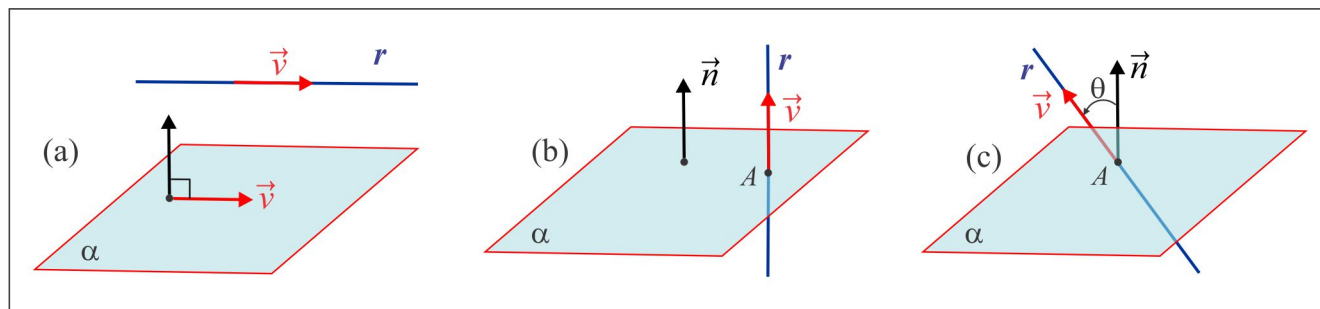


Figura 2.15: Posição relativa RetaxPlano.

Nos casos (b) e (c) a reta "fura"o plano no ponto A e anotamos $r \cap \alpha = \{A\}$.

EXEMPLO 2.2.3 Encontrar o ponto onde a reta r fura o plano α , sendo:

$$r : \frac{x-1}{2} = y+1 = z \quad e \quad \alpha : x+y+z=4.$$

Solução Temos $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{n}_\alpha = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, de modo que o ângulo θ entre a reta r e o plano α é tal que:

$$\cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}_\alpha}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\|} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Na forma paramétrica a reta r é descrita por:

$$r : x = 1 + 2t, \quad y = -1 + t \quad e \quad z = t$$

e substituindo as expressões de x , y e z na equação do plano, encontramos:

$$(1 + 2t) + (-1 + t) + t = 4,$$

de onde resulta $t = 1$ e, por conseguinte, $x = 3$, $y = 0$ e $z = 1$. O ponto de interseção da reta com o plano é, portanto, $A(3, 0, 1)$.

1. Verifique que o ponto $A(1, -1, 1)$ é a interseção da reta $r : x = t, y = -t, z = t$ com o plano $\alpha : 3x - 2y + z = 6$.
2. Determine as equações dos eixos coordenados na forma paramétrica e como interseção de dois planos.

3. Identifique as interseções da reta $r : x = 3 + 2t, y = -1 + 5t, z = 2 - t$ com os planos e eixos coordenados.
4. Verifique que a reta $r : \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$ está contida no plano $\pi : x - 2y + z = 6$.
5. A reta l passa no ponto $A(1, 2, 2)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Determine as equações da reta l nas formas:
- (a) vetorial (b) paramétrica (c) simétrica.
6. Determine as equações paramétricas da reta que passa nos pontos $A(0, 2, 3)$ e $B(5, 0, 6)$.
7. Considere a reta de equação vetorial $\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + t(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}), t \in \mathbb{R}$. Escreva as equações da reta na forma (i) simétrica e (ii) paramétrica.
8. Determine a equação vetorial do segmento de reta que une os pontos A e B .
9. Descreva a reta $x = 2 - s, y = 4, z = 3s$ como interseção de dois planos.
10. Encontre dois planos ortogonais cuja interseção é a reta $r : x = -1 - 2t, y = -1 + 9t, z = 7t$.
11. Obtenha as equações paramétricas e vetorial da reta
- $$l : x - 1 = \frac{5y + 4}{2} = -6z + 9.$$
12. Em cada caso, obtenha um vetor unitário paralelo à reta r .
- (a) $r : x = 1 - 2t, y = -5 + t, z = 2 + 4t$ (b) $r : x - 1 = -z/7; y = 3$.
13. Determine as equações da reta que passa pela origem e é perpendicular às retas:
- $$r_1 : x = 2 + t, y = 3 + 5t, z = 5 + 6t \quad r_2 : x = 1 + 3s, y = s, z = -7 + 2s.$$
14. Seja r a reta interseção dos planos $\pi_1 : x + y + z = 0$ e $\pi_2 : 2x + 3y - z = 4$. Descreva a reta r na forma paramétrica.
15. Determine as equações paramétricas da reta r paralela aos planos $3x + 3y + z = -1$ e $x + y - z = 0$ e que passa no ponto $A(-1, 1, 0)$.

16. Decomponha o vetor $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ nas direções \vec{a} e \vec{b} , sendo \vec{a} e \vec{b} , respectivamente, paralelo e perpendicular à reta

$$r : \frac{x-2}{2} = \frac{1-y}{3} = z+1.$$

17. Determine o plano que contém as retas r_1 e r_2 , sendo

$$r_1 : \begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-z=4 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : x=1+8t, y=5-6t, z=-1-2t.$$

18. Determine as equações paramétricas da reta r que passa no ponto $A(1, 2, -1)$, é paralela ao plano $x+y=5$ e perpendicular ao vetor $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$.

19. Encontre, na forma paramétrica, a reta bissetriz do ângulo agudo entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} 4x-3y-65=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} 7x-24y+55=0 \\ z=0. \end{cases}$$

20. Em cada caso, estude a posição da reta r em relação ao plano π . Determine o ângulo entre r e π e, caso exista, o ponto onde a reta *fura* o plano.

(a) $r : x = -8 + 15t, y = 5 - 9t, z = 0$ $\pi : 3x + 5y = 1$

(b) $r : x - 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{4}$ $\pi : x = 5 - 2\lambda, y = 1 - \lambda + 4\mu, z = 2 + \lambda - 2\mu$

(c) $r : x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = 1 + s$ $\pi : x = 1 - \lambda - 4\mu, y = -2 + 2\lambda - 8\mu, z = 1 + \lambda - \mu$

(d) $r : \vec{OP} = (1, 2, 3) + t(2, -1, 1)$ $\pi : x - 2y - 4z + 5 = 0.$

21. Considere a reta $r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{2}$ e o plano $\pi : x - 3y + 6z + 7 = 0$. Determine, caso exista, o(s) valor(es) de m de modo que:

(a) r seja paralela a π (b) r esteja contida em π (c) r intercepte π em um ponto.

22. Determine os valores de m e c para que a reta $r : \frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{5-z}{2}$ e o plano $\pi : 3x - 2y + cz + 1 = 0$ sejam perpendiculares e encontre o ponto onde a reta intercepta o plano.

23. Encontre a reta que passa no ponto $A(3, 6, 4)$, é paralela ao plano $\pi : x - 3y + 5z = 6$ e intercepta o eixo Oz .

24. Qual valor de λ faz com que o ângulo entre as retas

$$r_1 : 1 + \lambda t, y = 1 + 3t, z = t \quad \text{e} \quad r_2 : x = 1 + 2t, y = -3 - t, z = -1 + 2t$$

seja $\pi/4$?

25. Considere os pontos $A(2, -4, 6)$, $B(-4, 2, 2)$ e $C(1, -1, 0)$. Encontre, na forma paramétrica, a reta mediatriz do segmento AB , que passa no ponto C .

2.3 Distâncias

Nesta seção abordaremos distância de um ponto a um plano, de um ponto a uma reta e distância entre duas retas, além de algumas consequências.

2.3.1 Distância de Ponto a Plano

Consideremos um plano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e seja $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do espaço. Se o ponto A está sobre o plano, é claro que a distância do ponto A ao plano α é zero. Se não, pelo ponto A , consideramos a reta r ortogonal ao plano α e seja B o pé da perpendicular baixada do ponto A ao plano α , isto é, a interseção da reta r com o plano α , como ilustrado na Figura 2.16.

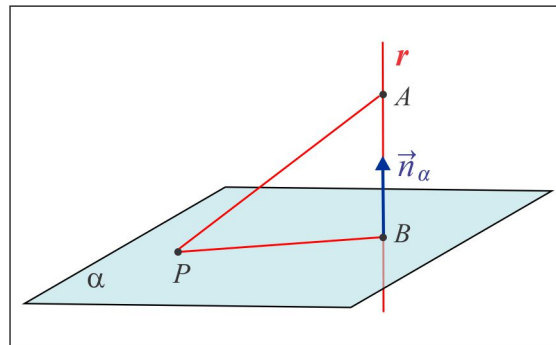


Figura 2.16: Distância de Ponto a Plano.

A distância do ponto A ao plano α , é dada por:

$$\text{dist}(A; \alpha) = \|\overrightarrow{AB}\| \quad (2.14)$$

onde o ponto B é a interseção da reta r com o plano α .

Com o objetivo de encontrar uma fórmula prática para o cálculo da distância, deixe $P(x_1, y_1, z_1)$ ser um ponto qualquer do plano e observemos que o vetor \overrightarrow{AB} é a projeção ortogonal do vetor \overrightarrow{AP} sobre

o vetor normal \vec{n}_α , isto é:

$$\vec{AB} = \text{Proj}_{\vec{n}_\alpha} \vec{AP} = (\vec{AP} \bullet \vec{n}_\alpha) \frac{\vec{n}_\alpha}{\|\vec{n}_\alpha\|^2} \quad (2.15)$$

e de (2.15) resulta:

$$\|\vec{AB}\| = \frac{|\vec{AP} \bullet \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{n}_\alpha\|}.$$

Ora, $\vec{n}_\alpha = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ e considerando que o ponto P jaz no plano α , então $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ e, dessa forma, chegamos à seguinte fórmula da distância de ponto a plano:

$$\text{dist}(A; \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (2.16)$$

EXEMPLO 2.3.1 De acordo com (2.16), a distância do ponto $A(1, -1, 2)$ ao plano $\alpha : 2x + y - z = 4$ é:

$$\text{dist}(A; \alpha) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

CONSEQUÊNCIAS

(1) Distância entre dois Planos Paralelos: Se α e β são dois planos paralelos, a distância entre eles é calculada da seguinte forma: escolhemos um ponto A em um dos planos, digamos α , e calculamos a distância do ponto A ao plano β . Assim:

$$\text{dist}(\alpha; \beta) = \text{dist}(A; \beta).$$

EXEMPLO 2.3.2 Calcular a distância entre os plano paralelos:

$$\alpha : x - y + 2z = -1 \quad e \quad \beta : 2x - 2y + 4z = 3.$$

Solução Consideremos sobre o plano α o ponto $A(0, 1, 0)$, de modo que:

$$\text{dist}(\alpha; \beta) = \text{dist}(A; \beta) = \frac{|0 - 2 + 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{5}{2\sqrt{6}}.$$

(2) Distância de uma Reta a um Plano: No caso em que uma reta r é paralela a um plano α , a distância da reta ao plano é medida pela distância de um ponto A da reta ao plano, isto é:

$$\text{dist}(r; \alpha) = \text{dist}(A; \alpha).$$

Se a reta não é paralela ao plano, ela fura o plano num determinado ponto e é natural definir, neste caso, a distância como sendo zero.

2.3.2 Distância de Ponto a Reta

A Figura 2.17 ilustra uma reta r , com vetor diretor \vec{v} , e um ponto P livremente escolhido sobre a reta. A distância do ponto A à reta r é definida por:

$$\text{dist}(A; r) = \|\vec{AB}\|, \quad (2.17)$$

onde o ponto B é o pé da perpendicular baixada do ponto A à reta r .

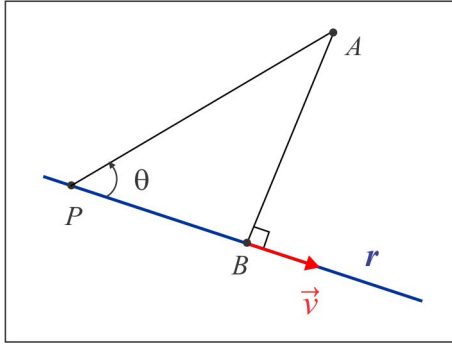


Figura 2.17: Distância de Ponto a Reta.

O processo geométrico para encontrar o ponto B consiste no seguinte:

- (i) Encontrar o plano α que passa no ponto A e é ortogonal à reta r .
- (ii) O ponto B é o ponto de interseção da reta r com o plano α .

Outra forma de encontrar o ponto B consiste em considerar um ponto móvel (partícula) $Q(t)$ sobre a reta r e observar que a partícula Q atinge o ponto B no instante t_0 em que $\vec{AQ} \cdot \vec{v} = 0$. O ponto B é precisamente $Q(t_0)$.

Uma fórmula para a distância do ponto A à reta r é facilmente deduzida a partir da Figura 2.17. De fato, temos:

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{AP}\| |\text{sen } \theta| = \frac{\|\vec{AP}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\text{sen } \theta|}{\|\vec{v}\|},$$

de onde resulta a fórmula da distância do ponto A à reta r :

$$\text{dist}(A; r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}. \quad (2.18)$$

EXEMPLO 2.3.3 Calcular a distância do ponto $A(2, 1, -3)$ à reta $r : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2$.

Solução Inicialmente, observamos que $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ é paralelo à reta r e que o ponto $P(0, -1, 2)$ está sobre a reta. Temos $\overrightarrow{AP} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ e um cálculo direto nos dá:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 12\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Usando a fórmula da distância (2.18), encontramos:

$$\text{dist}(A; r) = \frac{\sqrt{(-17)^2 + (12)^2 + (-2)^2}}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} \approx 5.59.$$

EXEMPLO 2.3.4 Considere o ponto A e a reta r do Exemplo (2.3.3). Encontrar o ponto B da reta mais próximo do ponto A .

Solução Na forma paramétrica, a reta r é descrita por:

$$x = 2t, \quad y = -1 + 3t \quad \text{e} \quad z = 2 + t,$$

e um ponto genérico da reta r é da forma $Q(2t, -1 + 3t, 2 + t)$ Temos:

$$\overrightarrow{AQ} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2(-2 + 2t) + 3(-2 + 3t) + (5 + t) = 0$$

e resolvendo a última equação encontramos $t = 5/14$ e, conseqüentemente, $B(5/7, 1/14, 33/14)$. Assim, $\overrightarrow{AB} = (\frac{18}{14})\vec{i} + (\frac{13}{14})\vec{j} + (\frac{78}{14})\vec{k}$ e a distância do ponto A à reta r é, portanto:

$$\text{dist}(A; r) = \|\overrightarrow{AB}\| \approx \frac{78.217}{14} \approx 5.586 \approx 5.59.$$

EXEMPLO 2.3.5 (Distância de Ponto a Reta no Plano xy .) O plano xy é descrito pela equação $z = 0$, de modo que uma reta no plano xy , inserida no espaço \mathbb{R}^3 , é descrita pelo par de equações cartesianas: $ax + by + c = 0$, $z = 0$ que graficamente corresponde à interseção do plano $\alpha : ax + by + c = 0$ com o plano $xy : z = 0$. Admitindo $b \neq 0$, a reta pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -(c/b) - (a/b)t \\ z = 0 \end{cases}$$

com vetor diretor $\vec{v} = \vec{i} - (a/b)\vec{j} + 0\vec{k}$, e considerando $A(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do espaço e o ponto $P(0, -c/b, 0)$ sobre a reta, temos:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{v} = (y_0 + \frac{c}{b} + \frac{ax_0}{b})\vec{k}$$

e aplicando a fórmula (2.18), da distância de ponto a reta, encontramos:

$$\text{dist}(A; r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (2.19)$$

2.3.3 Distância entre duas Retas

Sejam r_1 e r_2 duas retas no espaço com vetores diretores \vec{v}_1 e \vec{v}_2 , respectivamente, e vejamos as posições relativas entre elas.

- (i) As retas r_1 e r_2 são ditas *Concorrentes* se elas têm um único ponto em comum. Neste caso, existe um único plano que as contem e a distância entre elas é zero, como ilustra a Figura 2.18. O ângulo θ entre elas é tal que $\cos \theta = |\cos(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)|$.
- (ii) As retas r_1 e r_2 são ditas *Paralelas* se elas estão em um mesmo plano e não têm ponto em comum, como na Figura 2.19. Neste caso:

$$\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(A; r_2)$$

sendo A um ponto livremente escolhido sobre a reta r_1 . O ângulo entre elas é $\theta = 0$.

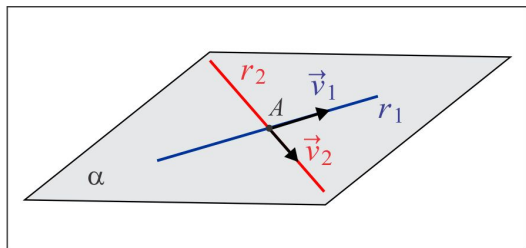


Figura 2.18: Retas Concorrentes.

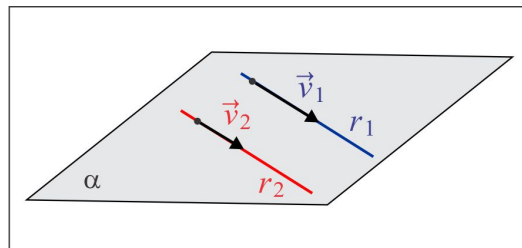


Figura 2.19: Retas Paralelas.

- (iii) A Figura 2.20 ilustra duas retas r_1 e r_2 situadas em planos distintos e sem ponto em comum. Elas são denominadas retas *Reversas* e observamos que a reta r_1 jaz no plano α , enquanto a reta r_2 fura esse plano no ponto B .

No caso (iii) em que as retas são reversas, a distância entre elas é definida com base no seguinte princípio:

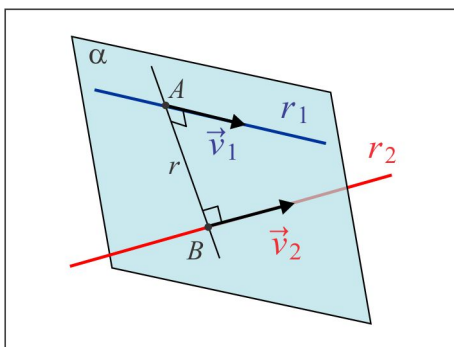


Figura 2.20: Retas Reversas.

Existe uma única reta r ortogonal às retas r_1 e r_2 simultaneamente e interceptando ambas nos pontos A e B , como ilustrado na Figura 2.20.

Com base nesse princípio, definiremos a distância entre as retas reversas r_1 e r_2 pela relação:

$$\text{dist}(r_1; r_2) = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

e para deduzir uma fórmula prática para o cálculo da distância, observemos a Figura 2.21 abaixo:

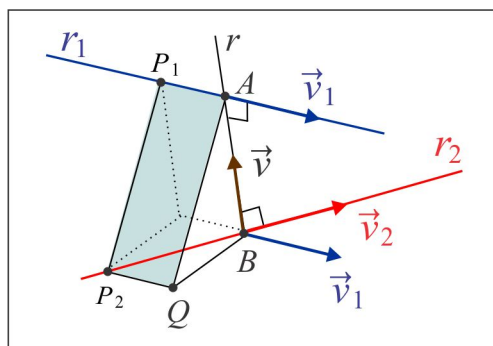


Figura 2.21: Distância entre Retas Reversas.

onde P_1 e P_2 são pontos livremente escolhidos sobre as retas r_1 e r_2 , respectivamente, e $\vec{v} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$. Temos que $\overrightarrow{AQ} = \text{Proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{P_1 P_2}$ e, portanto:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\text{Proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{AQ}\| = \|\text{Proj}_{\vec{v}} \overrightarrow{P_1 P_2}\|$$

de onde resulta a fórmula da distância:

$$\text{dist}(r_1; r_2) = \frac{|P_1 P_2 \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}. \quad (2.20)$$

É oportuno ressaltar que a fórmula (2.20) também se aplica ao caso em que as retas são concorrentes. Neste caso, o vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$ é ortogonal a $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ e, sendo assim, $\overrightarrow{P_1P_2} \bullet (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0$.

EXEMPLO 2.3.6 Para as retas:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x = -2 + 2s \\ y = 4 - s \\ z = 3 - 4s \end{cases}$$

temos:

- (i) A distância entre as retas é zero. De fato, consideremos os pontos $P_1(1, 2, 0) \in r_1$ e $P_2(-2, 4, 3) \in r_2$ e os vetores diretores $\vec{v}_1 = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$. Um cálculo direto nos dá:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -5\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k} \neq \vec{0}$$

e isto indica que as retas não são paralelas (em princípio elas podem ser concorrentes ou reversas). É fácil ver que $\overrightarrow{P_1P_2} \bullet (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0$ e da fórmula da distância resulta que $\text{dist}(r_1; r_2) = 0$. Logo, as retas são concorrentes.

- (ii) Para encontrar o ponto comum às retas r_1 e r_2 , notamos que a abscissa do ponto de interseção é $x = 1 - t$, na reta r_1 , e $x = -2 + 2s$, na reta r_2 , de modo que:

$$1 - t = -2 + 2s \Leftrightarrow t = 3 - 2s.$$

Por outro lado, $y = 2 + t$ na reta r_1 e $y = 4 - s$ na reta r_2 e no ponto comum teremos:

$$2 + t = 4 - s \Leftrightarrow 2 + (3 - 2s) = 4 - s \Leftrightarrow s = 1 \Leftrightarrow t = 1.$$

O ponto de interseção $A(0, 3, -1)$ é obtido considerando $t = 1$ na reta r_1 ou $s = 1$ na reta r_2 .

EXEMPLO 2.3.7 Vamos comprovar que as retas:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad e \quad r_2 : \begin{cases} x = -s \\ y = 1 + s \\ z = 2 + 2s \end{cases}$$

são reversas e encontrar o ponto $A \in r_1$ e o ponto $B \in r_2$, tais que o segmento AB seja ortogonal às retas r_1 e r_2 , ao mesmo tempo. Ressaltamos que $\text{dist}(r_1; r_2) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Solução Os pontos genéricos (partículas) $P(t, t, t)$ e $Q(-s, 1 + s, 2 + 2s)$ sobre as retas r_1 e r_2 , respectivamente, passam pelos pontos A e B nos instantes t e s , tais que:

$$\overrightarrow{PQ} \bullet \vec{v}_1 = 0 \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ} \bullet \vec{v}_2 = 0 \quad (2.21)$$

e resolvendo sistema (2.21) encontramos $t = 4/7$ e $s = -9/14$ e, assim, obtemos os pontos:

$$A(4/7, 4/7, 4/7) \quad \text{e} \quad B(9/14, 5/14, 5/7).$$

A distância entre as retas é:

$$\text{dist}(r_1; r_2) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{14}.$$

1. Descreva, de forma breve, como você decide quando duas retas são:

(a) coincidentes (b) paralelas (c) concorrentes (d) reversas.

2. Em cada caso, verifique se as retas r_1 e r_2 são paralelas, coincidentes, concorrentes ou reversas.

Determine o ângulo e, caso exista, a interseção entre elas.

- | | |
|--|---|
| (a) $r_1 : x = 1, y = t, z = 1$ | $r_2 : x = s, y = 0, z = 1$ |
| (b) $r_1 : x - 3 = \frac{z - 2}{7}; y = 4$ | $r_2 : \frac{x - 6}{2} = \frac{z - 4}{14}; y = 8$ |
| (c) $r_1 : x = 1 + 3t, y = 2 + 5t, z = 2 + 7t$ | $r_2 : x = 7 + 6s, y = 12 + 10s, z = 6 + 14s$ |
| (d) $r_1 : x + 1 = \frac{y - 1}{2}; z = 5$ | $r_2 : x = 1 + 4s, y = 5 + 2s, z = 2 + 3s$ |
| (e) $r_1 : x = 1, y = 3 - s, z = 5 + 2s$ | $r_2 : x = -4 + 5t, y = 3 + 2t, z = -2 + 3t$ |

3. Mostre que as retas

$$r_1 : x = 2 + 3t, y = 1 + 2t, z = t \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{2} = z + 1$$

são paralelas e determine o plano π que as contém.

4. Mostre que as retas

$$r_1 : \frac{x - 3}{3} = \frac{y - 1}{2} = z \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x - 3}{5} = y - 1 = \frac{z}{3}$$

são concorrentes e determine o plano π que as contém.

5. Considere a reta $r_1 : x = 2 + 3t, y = t, z = -t$. Determine duas retas r_2 e r_3 , de modo que r_1 e r_2 sejam reversas e r_1 e r_3 concorrentes.
6. Calcule a distância do ponto $A(1, 2, 2)$ ao plano π que passa pelos pontos $B(-1, 0, 0)$, $C(1, 0, 1)$ e $D(-2, 3, 0)$.
7. Certa reta r jaz no plano $\pi : x - y + z = 7$, passa no ponto $A(3, -3, 1)$ e é ortogonal à reta $l : x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$. Ache as equações da reta r e sua distância à origem.
8. Considere as retas reversas

$$r_1 : x = -1 + t, y = -3 + 2t, z = t \quad \text{e} \quad r_2 : x = -2 + s, y = 1 + s, z = s.$$

Determine um ponto A na reta r_1 e um ponto B na reta r_2 , de modo que a reta que passa por A e B intercepta r_1 e r_2 ortogonalmente.

9. Verifique que os planos $\pi_1 : x + 2y - z = 21$ e $\pi_2 : -2x - 4y + 2z = 10$ são paralelos e encontre o plano α eqüidistante de π_1 e π_2 .
10. Encontre o ponto do plano $\alpha : x + 3y - z + 6 = 0$ mais próximo do ponto $A(1, 1, 3)$.
11. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ cuja distância ao plano $x - y = 0$ é igual a 9.
12. Dado um ponto P_0 , a equação $\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} = 0$ representa o plano que passa por P_0 e é normal ao vetor \vec{n} . Identifique o lugar geométrico descrito pela desigualdade $\vec{n} \bullet \overrightarrow{P_0P} > 0$.
13. Determine sob que condições os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ estão do mesmo lado do plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.
14. Seja r a reta interseção dos planos $\alpha : 2x - y + z = 6$ e $\beta : x - y = 1$. Encontre o ponto da reta r mais próximo do ponto $A(1, 2, 1)$ e calcule $\text{dist}(A; r)$.
15. Calcule a altura do tetraedro de vértices $A(1, 6, 2)$, $B(2, 3, 0)$, $C(-2, -3, 4)$ e $D(0, 6, 0)$, baixada do vértice A .
16. Considere o ponto $A(1, 2, -1)$ e determine o ponto B , simétrico de A , em relação:
 - (a) à reta $r : x = 1 + t, y = t, z = 1$
 - (b) ao plano $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$.

17. Seja r a reta determinada pela interseção dos planos $\pi_1 : x + 2y - z = 1$ e $\pi_2 : 2x - y + z = 0$.
Encontre a reta que passa pelo ponto $A(1, 0, 1)$ e intercepta r ortogonalmente.
18. Encontre o ponto P_1 da reta

$$r : \begin{cases} 2x - y + z - 6 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

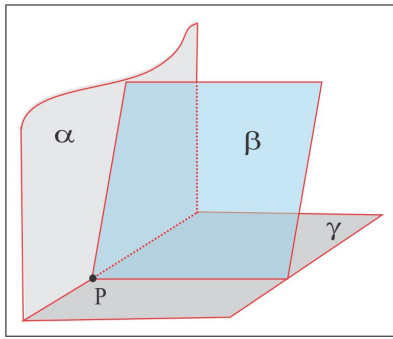
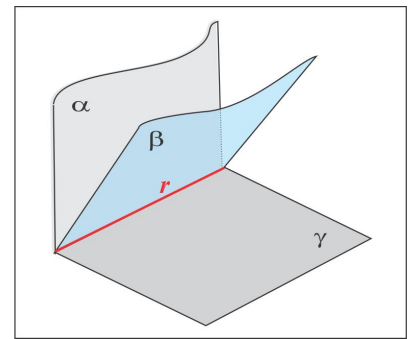
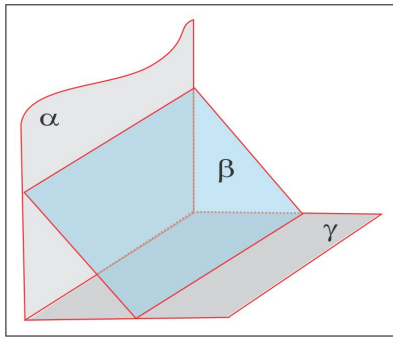
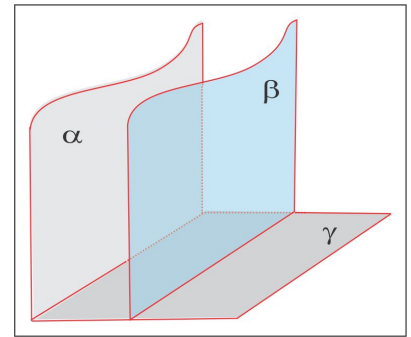
mais próximo de $P_0(1, 2, 1)$ e calcule $\text{dist}(P_0; r)$.

2.4 Interseção de três planos

Consideremos três planos α , β e γ com vetores normais \vec{n}_α , \vec{n}_β e \vec{n}_γ , respectivamente, e suponhamos que esses planos não sejam paralelos (nem coincidentes!). Os planos α , β e γ podem ter um único ponto comum, podem ter uma reta em comum ou podem não ter ponto algum em comum. Há dois casos a considerar:

- (1) Se $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] \neq 0$, então os planos α , β e γ se interceptam em um único ponto P , como ilustra a Figura 2.19, cujas coordenadas podem ser encontradas pela Regra de Cramer, por Escalonamento ou qualquer outro método.
- (2) No caso em que $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0$, então ou eles se interceptam segundo uma reta ou eles não têm ponto em comum. Para verificar se eles têm uma reta em comum, primeiro encontramos, caso exista, a reta r interseção entre dois deles, por exemplo, entre α e β , e em seguida testamos se essa reta está contida no plano γ . Caso afirmativo a reta r será a interseção dos 3 planos, como ilustrado na Figura 2.20.

As Figuras 2.21 e 2.22 ilustram os casos em que $[\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma] = 0$ e os três planos não se interceptam, embora exista uma reta comum a dois deles, esta reta é paralela ao terceiro plano.

Figura 2.22: $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \{P\}$.Figura 2.23: $\alpha \cap \beta \cap \gamma = r$.Figura 2.24: $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$.Figura 2.25: $\alpha \cap \beta \cap \gamma = \emptyset$.

1. Se os planos α , β e γ se interceptam dois a dois segundo uma reta, é verdade que os três planos têm uma reta em comum?

2. Discuta e determine, caso exista, a interseção entre os planos π_1 , π_2 e π_3 .

(a) $\pi_1 : x + y + z = 0$

$\pi_2 : x + 2y + z = 1$

$\pi_3 : x + y + 3z = 2$

(b) $\pi_1 : x + y - 4z = 0$

$\pi_2 : x - y = 0$

$\pi_3 : x + 2y - 6z = 0$

(c) $\pi_1 : x + 2y - z = 0$

$\pi_2 : 2x + 4y - 2z = 2$

$\pi_3 : 3x - y + z = 0$

(d) $\pi_1 : x + 2y + z = 0$

$\pi_2 : 2x + 4y - z = -1$

$\pi_3 : x + 2y = 0$

(e) $\pi_1 : x + y + z = 0$

$\pi_2 : -x + 2y - z = -4$

$\pi_3 : 3x + y + 3z = 0$

(f) $\pi_1 : 2x - y + z = -1$

$\pi_2 : 3x + y + z = 1$

$\pi_3 : 6x + 2y + 2z = 0$

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.1

1. V, V, F, V, V, F, V, V, F.
2. De cima para baixo, a seqüência é: 7, 4, 8, 3, 6, 1, 2 e 5.
3. O plano π intercepta os eixos Ox , Oy e Oz , respectivamente nos pontos $A(5/3, 0, 0)$, $B(0, 5/2, 0)$ e $C(0, 0, -5)$. A interseção com o plano xy é a reta $r_1 : x = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$, $y = t$, $z = 0$; com o plano xz a reta $r_2 : x = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t$, $y = 0$, $z = t$; e com o plano yz a reta $r_3 : x = 0$, $y = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t$, $z = t$.
4. (a) O ponto $A(4, 2, 0)$ corresponde aos valores $\lambda = 0$ e $\mu = 0$.
 (b) Com as escolhas $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, encontramos o ponto $B(3, 3, 3)$ e considerando $\lambda = 0$ e $\mu = 1$, obtemos o ponto $C(6, 2, -1)$.
 (c) $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{k}$, correspondentes construídos com os coeficientes dos parâmetros λ e μ , respectivamente.
 (d) $\pi : x - 5y + 2z + 6 = 0$.
5. (a) o ponto A é obtido com $\lambda = 0$ e $\mu = 0$; (b) com $\lambda = 1$ e $\mu = 0$, obtemos $B(3, 3, 3)$ e com $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ obtemos $C(6, 2, -1)$; (c) $\vec{AB} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{AC} = 2\vec{i} - \vec{k}$; (d) $\pi : x - 5y + 2z + 6 = 0$.
6. (a) paralelo ao eixo Ox ; (b) paralelo ao eixo Oy ; (c) paralelo ao eixo Oz ; (d) paralelo ao plano xy ; (e) passa pela origem.
7. $x - y + z - 4 = 0$ ou $x = 3 + \lambda - \mu$, $y = 1 - 2\lambda - \mu$, $z = 2 - 3\lambda$.
8. (a) paralelo ao eixo x (b) paralelo ao eixo y (c) paralelo ao eixo z (d) paralelo ao plano xy (e) passa pela origem.
9. $\alpha : x - 2y + 3z + 3 = 0$, $B \notin \alpha$ e $C \in \alpha$.
10. Dados A, B, C, D e E em α , construímos : $\vec{v}_1 = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$, $\vec{v}_2 = \frac{2\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}$, $\vec{v}_3 = \frac{3\vec{AD}}{\|\vec{AD}\|}$ e $\vec{v}_4 = \frac{4\vec{AE}}{\|\vec{AE}\|}$.
11. $3x - 4y = 0$.
12. (a) qualquer ponto do tipo $(1, y, z)$ está no plano; (b) $\vec{n}_\alpha = 3\vec{i}$.

13. $x = 1 + 2\lambda + \mu$, $y = 2 + \lambda - \mu$, $z = 2 - \lambda - 2\mu$; ou $x - y + z = 1$.
14. $9x - y + 7z - 40 = 0$.
15. $m = 3$ e o plano não passa pela origem. Um plano que contém a origem é do tipo $ax + by + cz = 0$.
16. Dado $\pi : ax + by + cz + d = 0$, seja $\vec{v} = \frac{\lambda(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
17. $\vec{n} = \frac{15}{\sqrt{35}}(-3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$.
18. $2x - y + z = 1$.
19. $\vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k})$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\vec{i} + \vec{k})$ e $\vec{w} = \frac{1}{3}(-\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k})$.
20. $y + 4z + 10 = 0$.
21. $x = \lambda + 2\mu$, $y = -\lambda - 5\mu$, $z = \lambda$ ou $5x + 2y - 3z = 0$.
22. $\alpha : x - y = 0$.
23. $2x - 4y + z + \frac{15}{2} = 0$.
24. (a) perpendiculares (b) paralelos.
25. (a) $m = 6$ (b) $m + 2n = 9$ (c) $7m - 3n = 2$.
26. (a) $m = 3$, $n = -4$ (b) $m = -2/3$, $n = 3$ (c) $m = -6/5$, $n = -10/3$.
27. o plano $4x - 3y + 5z = 4$ que passa no ponto médio e é ortogonal ao segmento AB .
28. (a) $y + 2 = 0$ (b) $x - 2 = 0$ (c) $9x - 3y - 4z - 20 = 0$ (d) $7x - y - 5z + 10 = 0$.
29. (a) ortogonais, com reta comum $r : x = \frac{9}{13} + \frac{4}{13}t$, $y = -\frac{5}{13} + \frac{5}{13}t$, $z = t$ (b) coincidentes (c) paralelos (d) paralelos.
30. Basta observar que $\vec{u} = (\cos \alpha)\vec{i} + (\cos \beta)\vec{j} + (\cos \gamma)\vec{k}$ e que a equação do plano é: $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.2

1. Teste as coordenadas do ponto A nas equações da reta e do plano.

2. Eixo Ox : $x = t$, $y = 0$, $z = 0$; Eixo Oy : $x = 0$, $y = t$, $z = 0$; Eixo Oz : $x = 0$, $y = 0$, $z = t$.
O eixo Ox pode ser visto como interseção dos planos $y = 0$ e $z = 0$.

3. A reta intercepta os planos xy , xz e yz , respectivamente nos pontos $A(7, 9, 0)$, $B(\frac{17}{5}, 0, \frac{9}{5})$ e $C(0, -\frac{17}{2}, \frac{7}{2})$. Não há interseção com os eixos coordenados.

4. Na forma paramétrica, temos: $r : x = 3 + 2t$, $y = -2 + 3t$ e $z = -1 + 4t$, de modo que:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= (3 + 2t) - 2(-2 + 3t) + (-1 + 4t) \\ &= 2t - 6t + 4t + 6 = 6. \end{aligned}$$

5. (a) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$; (b) $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$, $z = 2 + t$ (c) $\frac{x-1}{3} = 2 - y = z - 2$.

6. $x = 5t$, $y = 2 - 2t$, $z = 3 + 3t$.

7. (a) $x - 1 = 2 - y = z - 3$ (b) $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = 3 + t$.

8. $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$, $0 \leq t \leq 1$ ou $P = (1 - t)A + tB$, $0 \leq t \leq 1$.

9. $\alpha : 7x + 2z + 7 = 0$; $\beta : y = 4$.

10. $\alpha : 7x + 2z + 7 = 0$, $\beta : 18x + 53y - 63z + 71 = 0$.

11. $x = 1 + t$, $y = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}t$, $z = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}t$ e $\overrightarrow{OP} = (1, -4/5, 3/2) + t(\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j} - \frac{1}{6}\vec{k})$.

12. (a) $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-2\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k})$ (b) $\vec{v} = \frac{1}{5\sqrt{2}}(\vec{i} - 7\vec{k})$.

13. $x = 4t$, $y = 16t$, $z = -14t$.

14. $r : x = -4t$, $y = 1 + 3t$, $z = -1 + t$.

15. $r : x = -1 - 4t$, $y = 1 + 4t$, $z = 0$.

16. Além da condição $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$, os vetores \vec{a} , \vec{b} e \vec{v} devem ser coplanares. Considerando $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \frac{20}{17}\vec{i} + \frac{19}{17}\vec{j} + \vec{k}$, encontramos $\vec{v} = -\frac{3}{14}\vec{a} + \frac{17}{14}\vec{b}$.

17. $8x + 5y + 17z - 16 = 0$.

18. $r : x = 1 - t$, $y = 2 + t$, $z = -1 - t$.

19. As retas r_1 e r_2 concorrem no ponto $A(23, 9, 0)$, com vetores diretores $\vec{v}_1 = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ e $\vec{v}_2 = -24\vec{i} + 7\vec{j}$, respectivamente. O vetor:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} + \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$$

é paralelo à reta r bissetriz do ângulo entre r_1 e r_2 , a qual é descrita por:

$$r : \overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{v}.$$

20. (a) $r \subset \pi$ (b) $r \perp \pi$; $A(3, 2, 2)$ (c) $r // \pi$ (d) $r // \pi$.

21. (a) $m = 5$ (b) não existe um tal m (c) $m \neq 5$.

22. $m = -6$, $c = 1$; $A(-1, 1, 4)$.

23. $r : x = 3t$, $y = 6t$, $z = 1 - 4t$.

24. $\lambda = 4$ ou $\lambda = 52$.

25. $r : x = -1 + 2t$, $y = -1$, $z = 4 - 4t$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.3

- Usar os vetores diretores e a distância.
- (a) concorrentes em $A(1, 0, 1)$ e $(r_1, r_2) = \pi/2$ (b) paralelas (c) paralelas (d) reversas e $\cos(r_1, r_2) = \frac{8}{\sqrt{145}}$; (e) concorrentes em $A(1, 5, 1)$ e $\cos(r_1, r_2) = \frac{4}{\sqrt{190}}$.
- $\pi : 2x - 4y + 2z = 0$.
- $\pi : 5x - 4y - 7z = 11$.
- $r_2 : x = t$, $y = 1 + t$, $z = t$; $r_1 : x = 2$, $y = t$, $z = t$.
- $\text{dist}(A; \pi) = 4/\sqrt{46}$.
- $x = 3 - 5t$, $y = -3 - 2t$, $z = 1 + 3t$; $\text{dist}(O; r) = \sqrt{\frac{343}{19}}$.
- $A(7/2, 6, 9/2)$ e $B(3, 6, 5)$.
- $\alpha : x + 2y - z = 8$.

10. $(4/11, -10/11, 40/11)$.
11. Os planos $x - y = \pm 9\sqrt{2}$.
12. O conjunto dos pontos do lado do plano para o qual \vec{n} aponta.
13. As expressões $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ e $ax_2 + by_2 + cz_2 + d$ devem ter o mesmo sinal.
14. $P_1\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\text{dist}(P_0; r) = \sqrt{42}/3$.
15. $15/7$.
16. **(a)** $B(5, 0, 3)$ **(b)** $B(5/3, -4/3, 5/3)$.
17. $x = 1 + 31t$, $y = -23t$, $z = 1 + 20t$.
18. $A(8/3, 5/3, 7/3)$; $\text{dist}(P_0; r) = \text{dist}(P_0; A) = \sqrt{14}/3$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 2.4

1. Não
 2. **(a)** O ponto $P(-2, 1, 1)$ **(b)** A reta $x = 2t$, $y = 2t$, $z = t$. Nos casos **(c)**, **(d)**, **(e)** e **(f)** não há interseção.
-



Introdução

Fixemos em um mesmo plano um eixo L (eixo de rotação) e uma reta g , denominada geratriz, e suponhamos que o ângulo θ entre o eixo L e a geratriz g seja tal que $0 < \theta < \pi/2$. A superfície produzida pela rotação de 2π rad da geratriz g em torno do eixo L recebe o nome de *Cone de Revolução* e está ilustrado na Figura 3.4. O ponto V de interseção do eixo L com a geratriz g é o *Vértice* do cone. As curvas **CIRCUNFERÊNCIA**, **ELIPSE**, **HIPÉRBOLE** e **PARÁBOLA** apresentadas neste capítulo são obtidos como interseção de um cone de revolução com um plano e, por essa razão, denominadas **CÔNICAS**.

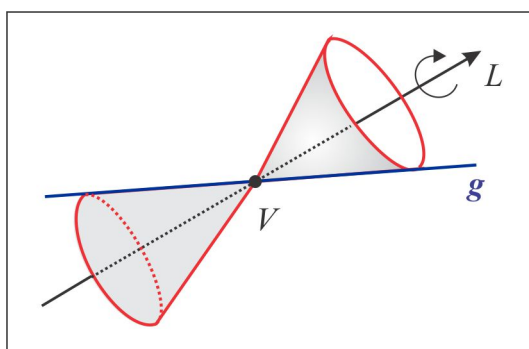


Figura 3.4: O Cone de Revolução.

A cônica resultante da interseção depende da posição do plano. Se o plano é perpendicular ao eixo do cone, a cônica resultante é uma circunferência; se o plano é paralelo ao eixo, a cônica é uma hipérbole; se o plano é paralelo à geratriz, a cônica é uma parábola; finalmente, se o plano não é paralelo nem perpendicular ao eixo e nem paralelo à geratriz, a cônica resultante é uma elipse.

Uma situação particularmente simples é aquela em que o eixo de rotação é o eixo Oy e a geratriz é a reta $y = ax$ do plano xy . A Figura 3.5 ilustra as cônicas determinadas no cone por planos.

- (a) No caso (a), o plano é perpendicular ao eixo de rotação e a cônica interseção é uma circunferência.
- (b) No caso (b), o plano faz com o eixo L um ângulo $0 < \theta < \pi/2$, e a cônica interseção é uma elipse.
- (c) No caso (c), o plano é paralelo à geratriz e a cônica interseção é uma parábola.
- (d) No caso (d), o plano é paralelo ao eixo de rotação e a cônica interseção é uma hipérbole.

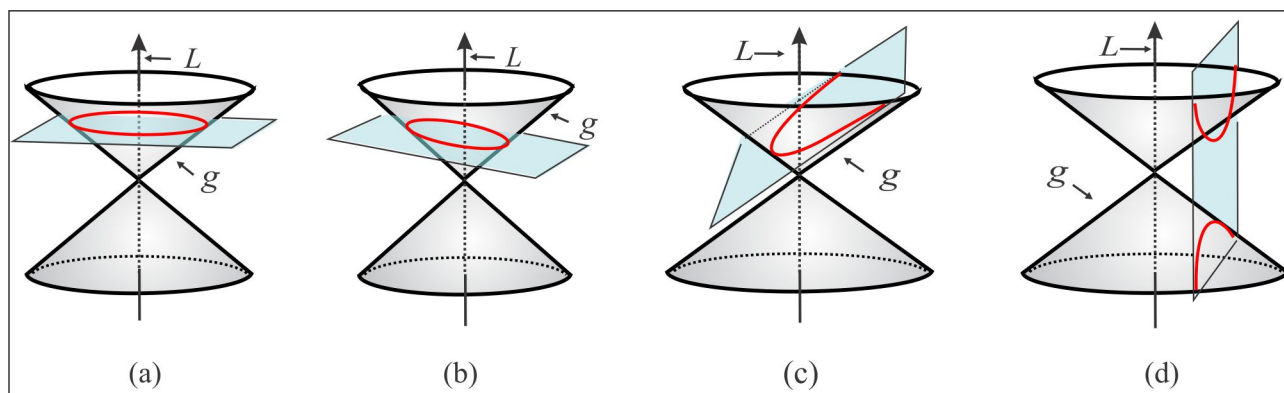


Figura 3.5: As cônicas.

Em Geometria Analítica existem duas questões fundamentais:

- (i) Dada uma equação em duas variáveis

$$F(x, y) = 0 \quad (3.1)$$

determinar sua interpretação ou representação gráfica.

- (ii) Dada uma figura (condição geométrica), determinar sua equação ou representação analítica.

A totalidade dos pontos $P(x, y)$ do plano xy que satisfazem a equação (3.1) leva o nome de *Lugar Geométrico* da equação. Por exemplo, a equação $y = ax + b$ representa no plano xy uma reta, enquanto no espaço \mathbb{R}^3 ela representa um plano paralelo ao eixo Oz , como ilustra a Figura 3.6.

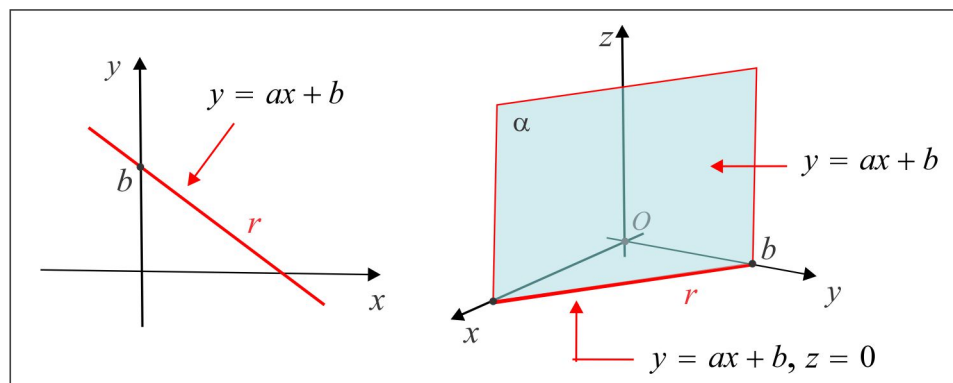


Figura 3.6: O Lugar Geométrico descrito por $y = ax + b$.

Ressaltamos que a mesma equação $y = ax + b$ representa dois entes geométricos distintos, a depender da configuração (\mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3) onde a equação está inserida.

3.1 A circunferência

Uma *Circunferência* no plano xy é o lugar geométrico constituído dos pontos $P(x, y)$, cuja distância a um ponto fixo, denominado *Centro* da circunferência, é constante. Essa constante recebe o nome de *Raio* da circunferência.

Na dedução da *Equação Reduzida*, vamos adotar para centro o ponto $C(x_0, y_0)$ e representar por R o raio da circunferência. Se $P(x, y)$ é um ponto genérico da curva, a equação que traduz o conceito é:

$$\text{dist}(P, C) = R \quad (3.2)$$

e, em coordenadas, a equação (3.2) assume a forma:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (3.3)$$

A Figura 3.7 ilustra graficamente a circunferência de centro $C(x_0, y_0)$, governada pela equação (3.3).

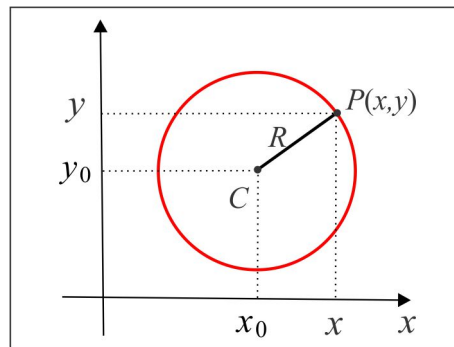


Figura 3.7: A Circunferência $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

EXEMPLO 3.1.1 A circunferência de raio $R = 5$ e centro $C(-2, 1)$ é descrita pela equação:

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20.$$

EXEMPLO 3.1.2 Encontrar o centro e o raio da circunferência descrita pela equação:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0.$$

Solução Observamos que a equação não está na forma reduzida e é necessário ajustá-la usando o processo de completar quadrados, que tem sua origem nos produtos notáveis. Para transformar a expressão $\lambda^2 \pm 2a\lambda$ em uma diferença de quadrados, procedemos da seguinte forma:

$$\lambda^2 \pm 2a\lambda = \lambda^2 \pm 2a\lambda + a^2 - a^2 = (\lambda \pm a)^2 - a^2 \quad (3.4)$$

e, assim, temos:

(i) com $a = 1$ e $\lambda = x$, encontramos: $x^2 - 2x = x^2 - 2 \times 1 \times x = (x - 1)^2 - 1$.

(ii) com $a = 2$ e $\lambda = y$, encontramos: $y^2 + 4y = y^2 + 2 \times 2 \times y = (y + 2)^2 - 4$.

A equação da circunferência, após o completamento dos quadrados, se escreve sob a forma reduzida:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \quad (3.5)$$

e comparando com (3.3), vemos que a circunferência (3.5) tem centro no ponto $C(1, -2)$ e raio $R = 2$.

OBSERVAÇÃO 3.1.3 Qualquer circunferência do plano xy pode ser descrita por uma equação do 2º grau em x e y , da forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0. \quad (3.6)$$

Ressaltamos, contudo, que nem toda equação do tipo (3.6) representa uma circunferência. De fato:

(i) A equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$ é do tipo (3.6), com $a = -4$, $b = -2$ e $c = 5$, e representa o ponto isolado $C(2, 1)$, já que a equação é equivalente a:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0,$$

de onde resulta $x - 2 = 0$ e $y - 1 = 0$ (uma soma de quadrados é zero se, e somente se, cada parcela é igual a zero).

(ii) Já a equação $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 15 = 0$, também do tipo (3.6), com $a = 6$, $b = -2$ e $c = 15$, é equivalente a $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = -5$, a qual não tem solução real e, portanto, não representa lugar geométrico algum do plano xy .

EXEMPLO 3.1.4 (Parametrizando a Circunferência) Dado um ponto $P(x, y)$ na circunferência

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

deixe t representar o ângulo entre o raio CP e o eixo Ox , como ilustra a Figura 3.8.

Usando relações trigonométricas no triângulo retângulo, temos:

$$\begin{cases} x - x_0 = R \cos t \\ y - y_0 = R \sin t \end{cases}$$

e, assim, descrevemos a circunferência na forma parametrizada:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos t \\ y = y_0 + R \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

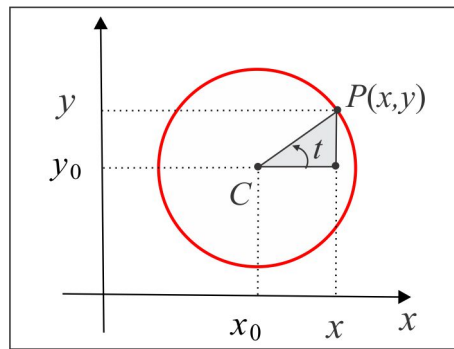


Figura 3.8: A Circunferência do Exemplo 3.1.4.

EXEMPLO 3.1.5 (Reta Tangente) Encontrar a reta tangente à circunferência $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$, no ponto $A(3/2, -2 + \sqrt{3}/2)$.

Solução A Figura 3.9 ilustra a situação gráfica e o raciocínio por trás do método é a ortogonalidade entre a reta tangente T e a reta que passa no centro da circunferência e no ponto de tangência.

A reta r que passa no centro C e no ponto de tangência A tem declividade $m_r = \sqrt{3}$ e a reta tangente, por ser ortogonal à reta r , tem declividade $m_T = -1/\sqrt{3}$ e é descrita por:

$$y = -2 + \sqrt{3}/2 + (-1/\sqrt{3})(x - 3/2) \Leftrightarrow y = -x/\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}.$$

A reta tangente T é governada pela equação

$$T : x + \sqrt{3}y = 3 - 2\sqrt{3}.$$

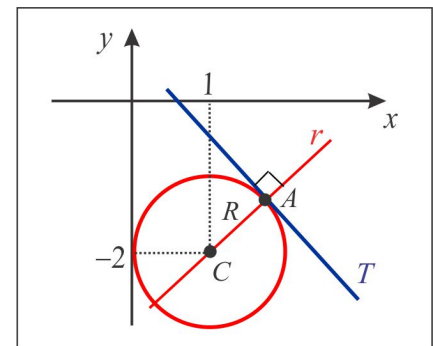


Figura 3.9: Reta Tangente

1. Em cada caso, obtenha a equação e esboce o gráfico da circunferência.

- (a) Centro $C(-2, 1)$ e raio $r = 5$.
- (b) Passa pelos pontos $A(5, 1)$, $B(4, 2)$ e $C(-2, 2)$.
- (c) O centro está sobre a reta $y = x - 1$ e corta o eixo Ox nos pontos $A(-1, 0)$ e $B(3, 0)$.
- (d) Passa pelos pontos $A(1, 2)$ e $B(1, -2)$ e tem raio $R = 2$.

- (e) Circunscrita ao triângulo formado pelas retas $x + y = 8$, $2x + y = 14$ e $3x + y = 22$.
- (f) Um diâmetro é o segmento que une os pontos $A(0, -1)$ e $B(-2, -3)$.
2. Determine a equação da circunferência de raio 5, tangente à reta $3x + 4y = 16$ no ponto $A(4, 1)$.
3. Determine a equação da circunferência de centro $C(1, 2)$ e tangente à reta $r : x - 2y + 8 = 0$.
4. Calcule o comprimento da corda da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ que jaz sobre a reta $x - 7y + 25 = 0$.

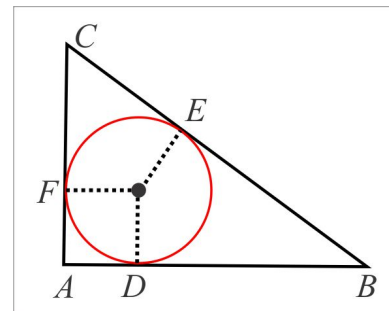
5. **O RAIOS DA CIRCUNFERÊNCIA INSCRITA**

A figura ao lado ilustra uma circunferência inscrita em um triângulo retângulo ABC . Mostre que:

(a) $\|\vec{AD}\| = \|\vec{AF}\|$, $\|\vec{BD}\| = \|\vec{BE}\|$ e $\|\vec{CE}\| = \|\vec{CF}\|$.

(b) O raio da circunferência é:

$$\frac{1}{2} \left(\|\vec{AB}\| + \|\vec{AC}\| - \|\vec{BC}\| \right)$$



6. **O INCENTRO** Considere o triângulo determinado pelas retas $y = x$, $x + y = 2$ e $y = 0$.

- (a) Determine as equações das bissetrizes do triângulo.
- (b) Encontre o ponto de interseção das bissetrizes. Este ponto leva o nome de *Incentro* do triângulo.
- (c) Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo. O centro da circunferência é o incentro do triângulo.

VOCÊ SABIA? Se A , B e C são os vértices de um triângulo, o incentro é o ponto I , determinado a partir da relação:

$$\vec{OI} = \frac{a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC}}{a + b + c}$$

sendo $a = \|\vec{BC}\|$, $b = \|\vec{AC}\|$ e $c = \|\vec{AB}\|$.

7. Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo determinado pelas retas:

$$r_1 : 4x - 3y = 65, \quad r_2 : 7x - 24y + 55 = 0 \quad \text{e} \quad r_3 : 3x + 4y = 5.$$

8. Uma haste de 30cm move-se com seus extremos apoiados em dois fios perpendiculares. Identifique o lugar geométrico descrito pelo ponto médio da haste.

9. Determine o centro e o raio da circunferência descrita na forma paramétrica por:

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos t \\ y = -1 + 3 \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

CURIOSIDADE! A equação da circunferência que passa por três pontos não colineares $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ e $C(x_C, y_C, z_C)$ pode ser posta na forma de determinante:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2 + y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2 + y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2 + y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

e esta forma é muito útil para testar se quatro pontos estão ou não sobre uma mesma circunferência.

3.2 A Elipse

Antes de formalizar o conceito de elipse como lugar geométrico, faremos uma interpretação da equação modelo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0. \quad (3.7)$$

Seja $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e consideremos os pontos $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Se as coordenadas x e y de um ponto móvel $P(x, y)$ satisfazem à equação (3.7), vamos mostrar que a quantidade:

$$\operatorname{dist}(F_1; P) + \operatorname{dist}(F_2; P)$$

é sempre constante e igual a $2a$. De fato, considerando que $b^2 = a^2 - c^2$, (3.7) resulta:

$$\begin{aligned} b^2 x^2 + a^2 y^2 &= a^2 b^2 \Leftrightarrow (a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^4 - a^2 c^2 \\ \Leftrightarrow a^2 x^2 + a^2 c^2 + 2a^2 cx + a^2 y^2 &= 2a^2 cx + a^4 + c^2 x^2 \\ \Leftrightarrow a^2 \left[(x + c)^2 + y^2 \right] &= (a^2 + cx)^2, \end{aligned}$$

e da última igualdade, encontramos:

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a^2 + cx. \quad (3.8)$$

Procedendo de forma similar, substituindo $2a^2cx$ por $-2a^2cx$, obtemos:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (3.9)$$

Adicionando membro a membro as equações (3.8) e (3.9), obtemos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Leftrightarrow \boxed{\text{dist}(F_1, P) + \text{dist}(F_2, P) = 2a.}$$

3.2.1 Conceito & Equação Reduzida

Uma *Elipse* no plano xy é o lugar geométrico constituído dos pontos $P(x, y)$, cuja soma das distâncias a dois ponto fixos F_1 e F_2 , denominados *Focos* da elipse, é constante.

$$\|\vec{F_1P}\| + \|\vec{F_2P}\| = \text{cte}.$$

Os raios F_1P e F_2P são os *Raios Focais* do ponto P e o ponto médio dos focos é o *Centro* da elipse. A distância entre os focos recebe o nome de *Distância Focal* da elipse.

Na dedução da *Equação Reduzida* vamos considerar duas situações dentro do mesmo modelo padrão.

■ **MODELO 1** Neste primeiro modelo, vamos considerar os focos $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ sobre o eixo Ox e admitir que a soma dos raios focais seja igual $2a$, isto é:

$$\boxed{\text{dist}(F_1; P) + \text{dist}(F_2; P) = 2a.} \quad (3.10)$$

Com esses dados, mostraremos que a elipse é descrita pela equação (3.7). Observando a Figura 3.10

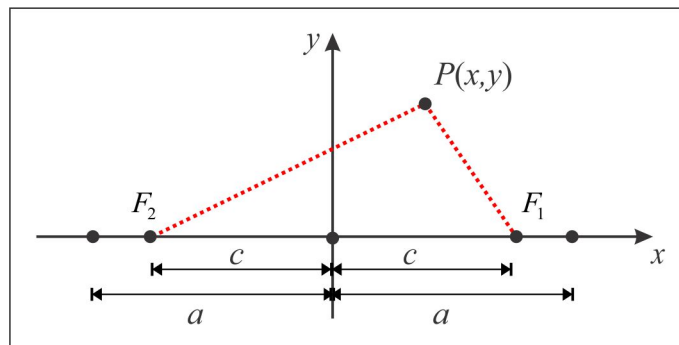


Figura 3.10: Os Focos da Elipse.

vemos, como consequência da Desigualdade Triangular, que:

$$2c = \text{dist}(F_1; F_2) \leq \text{dist}(F_1; P) + \text{dist}(F_2; P) = 2a,$$

de onde resulta que $c \leq a$. A partir da equação (3.10) que traduz o conceito, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{dist}(F_1; P) + \text{dist}(F_2; P) &= 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow (cx + a^2)^2 &= a^2 \left[(x+c)^2 + y^2\right] \\ \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

e se fizermos $b^2 = a^2 - c^2$, obteremos da última igualdade a equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.} \quad (3.11)$$

■ **MODELO 2** Agora, suponhamos que os focos sejam os pontos $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$ do eixo Oy , e que a soma dos raios focais seja $2a$. Procedendo como no primeiro caso, considerando $b^2 = a^2 - c^2$, obtemos a equação reduzida:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.} \quad (3.12)$$

3.2.2 Gráficos & Elementos Principais

No traçado do gráfico devemos observar alguns itens e como referência vamos adotar a elipse descrita pela equação (3.11).

► **SIMETRIA** Se em (3.11) trocarmos x por $-x$ ou y por $-y$ a equação permanece inalterada. Graficamente isto significa que a elipse é simétrica em relação aos eixos coordenados e em relação à origem.

► **INTERSEÇÃO COM OS EIXOS**

(a) A interseção com o eixo Ox é determinada considerando $y = 0$ na equação. Encontramos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a.$$

Assim, a elipse intercepta o eixo Ox nos pontos: $A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0)$.

(b) De modo similar, considerando $x = 0$, obtemos:

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2 \Leftrightarrow y = \pm b.$$

Assim, a elipse toca o eixo Oy nos pontos $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$.

► **POSIÇÃO DA ELIPSE** A posição da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é determinada comparando-se os denominadores dos termos x^2 e y^2 . O maior denominador é associado à variável correspondente ao eixo sobre o qual estão os focos.

► **GRÁFICOS** A Figura 3.11 abaixo ilustra os gráficos das elipses nas duas situações.

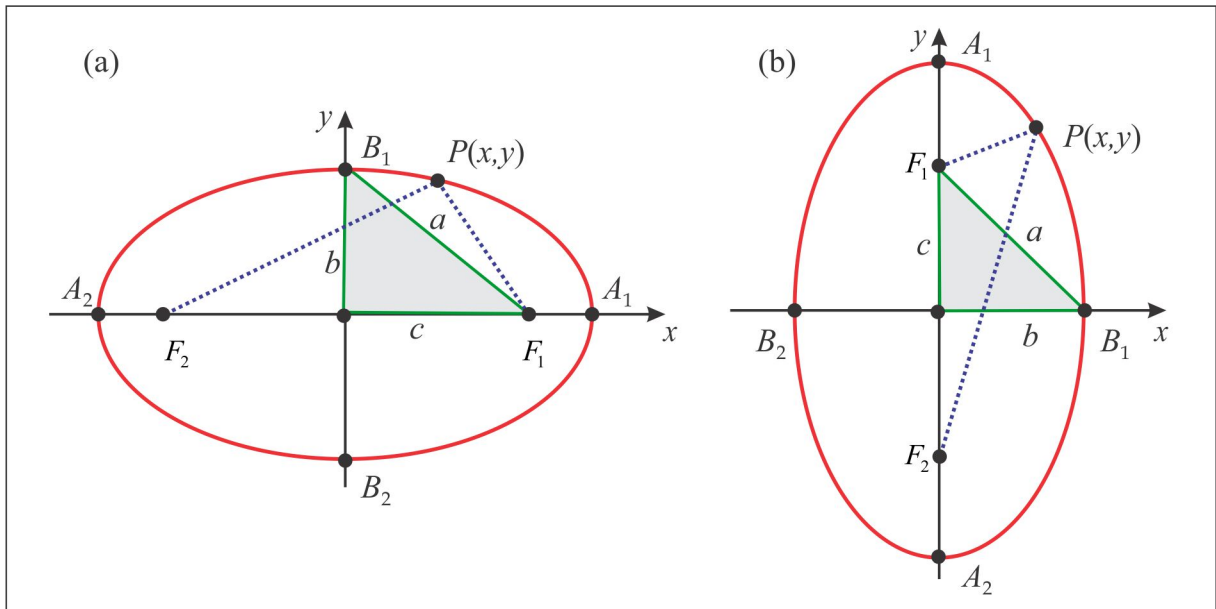


Figura 3.11: A Elipse: (a) Focos $F(\pm c, 0)$ (b) Focos $F(0, \pm c)$.

► **ELEMENTOS PRINCIPAIS** Em uma elipse, os seguintes elementos devem ser destacados:

- (a) Os Focos: $F(\pm c, 0)$ ou $F(0, \pm c)$.
- (b) O Centro: ponto médio dos focos: $C(0, 0)$.
- (c) Os Vértices: $A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0)$; $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$.
- (d) O Eixo maior: A_1A_2 de comprimento $2a$, onde estão localizados os Focos.
- (e) O Eixo menor: B_1B_2 de comprimento $2b$.

(f) O Eixo Focal: reta que contém os focos.

(g) Os Raios Focais do ponto $P(x, y)$: os segmentos de reta F_1P e F_2P .

(h) A Excentricidade: $e = c/a$. Observamos que $0 < e < 1$, já que $b < a$, e a excentricidade mede o *achatamento* da cônica. De fato:

(i) $e \simeq 1 \Leftrightarrow c \simeq a \Leftrightarrow b \simeq 0$ (elipse é mais *achatada*).

(ii) $e \simeq 0 \Leftrightarrow c \simeq 0 \Leftrightarrow b \simeq a$ (elipse é menos *achatada*). Uma circunferência é uma elipse de excentricidade $e = 0$.

3.2.3 Translação da Elipse

Assim como ocorre com a circunferência, no caso em que o centro da elipse é o ponto $C(x_0, y_0)$, sua equação assume a forma:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (3.13)$$

e as coordenadas dos focos e dos vértices também sofrem alterações. A mudança de variável (translação): $\bar{x} = x - x_0$ e $\bar{y} = y - y_0$ leva a equação (3.13) à forma padrão:

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

de uma elipse com focos $\bar{F}(\pm c, 0)$ e vértices $\bar{A}(\pm a, 0)$ e $\bar{B}(0, \pm b)$. Imaginemos $a > b$, de modo que os focos estarão sobre a reta horizontal $y = y_0$, paralela ao eixo Ox , como ilustra a Figura 3.12.

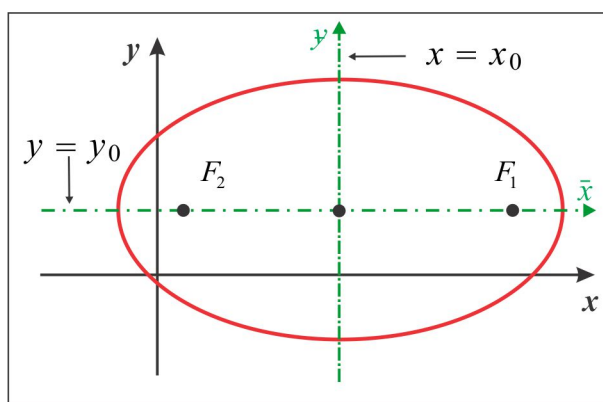


Figura 3.12: Translação da Elipse.

Neste caso, a elipse tem os seguintes elementos:

$$\text{Focos: } F(x_0 \pm c, y_0) \quad | \quad \text{Vértices: } A(x_0 \pm a, y_0) \quad \text{e} \quad B(x_0, y_0 \pm b)$$

No caso em que $a < b$, o que indica que o eixo focal é a reta vertical $x = x_0$, teremos:

$$\text{Focos: } F(x_0, y_0 \pm c) \quad | \quad \text{Vértices: } A(x_0 \pm a, y_0) \quad \text{e} \quad B(x_0, y_0 \pm b).$$

EXEMPLO 3.2.1 *Suponhamos que certa elipse tenha centro $C(1, 2)$ e que seus focos estejam sobre a reta $x = 1$, distantes 4 unidades um do outro. Temos que $2c = 4$, de modo que $c = 2$, e considerando que $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$, deduzimos que os focos são $F_1(1, 4)$ e $F_2(1, 0)$ e a equação é da forma:*

$$\frac{(x-1)^2}{b^2} + \frac{(y-2)^2}{a^2} = 1.$$

Se, por exemplo, a cônica tem um vértice no ponto $A_1(3, 2)$, então $b = 2$ e da relação $a^2 = b^2 + c^2$, deduzimos que $a^2 = 8$. A equação da elipse é:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1.$$

Os outros vértices são: $A_2(-1, 2)$, $B_1(1, 2 + \sqrt{8})$ e $B_2(1, 2 - \sqrt{8})$

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.2

1. Encontre a equação, os elementos principais (*focos, vértices, excentricidade, centro e eixos*) e esboce o gráfico da elipse caracterizada por:
 - (a) Focos $F_1(3, 0)$, $F_2(-3, 0)$ e soma dos raios focais igual a 12.
 - (b) Dois vértices em $B_1(3, -4)$ e $B_2(3, 4)$ e distância focal igual a 4.
 - (c) Vértices em $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -4)$ e $B_2(0, 4)$.
 - (d) Focos sobre o eixo y , distância focal igual a 8 e excentricidade $e = 2/3$.
 - (e) Centro $C(2, -1)$ e passa nos pontos $A(-3, -1)$ e $B(2, 3)$.
 - (f) Focos $F_1(-2, -2)$, $F_2(2, 2)$ e soma dos raios focais igual a 12.

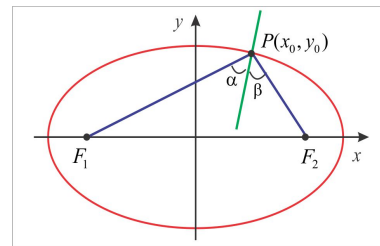
2. Determine a equação e a excentricidade da elipse que tem seu centro na origem, um dos vértices no ponto $B_1(0, -7)$ e passa no ponto $A(\sqrt{5}, 14/3)$.

3. Determine as retas tangentes à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com declividade $m = 1$.
4. Um arco tem a forma de uma semi-elipse com 48 metros de largura na base e 20 metros de altura. Determine o comprimento de uma viga colocada a 10 metros da base, paralelamente a mesma.
5. O teto de um corredor de 20 m de largura tem a forma de uma semi-elipse e a altura no centro é 18 m. Se a altura das paredes laterais é 12 m, determine a altura do teto a 4 m de uma das paredes.
6. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ cuja soma das distâncias aos pontos $F_1(4, -1)$ e $F_2(4, 7)$ é igual a 12.
7. Determine a equação da elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados e que passa nos pontos $A(-6, 4)$, $B(-8, 1)$, $C(2, -4)$ e $D(8, -3)$.
8. Determine o centro e os focos da elipse $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$.
9. Determine a interseção entre a elipse de vértices $(\pm 5, 0)$ e $(0, \pm 1)$ e a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.
10. Determine os focos e o centro da elipse descrita pelo par de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

11. **PROPRIEDADE FOCAL DA ELIPSE**

A figura ao lado mostra a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com focos nos pontos F_1 e F_2 . Sabendo que a declividade da reta normal no ponto $P(x_0, y_0)$ vem dada por $m_N = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$, mostre que a reta normal à elipse no ponto $P(x_0, y_0)$ é bissetriz do ângulo formado pelos raios focais do ponto P .



12. Determine as retas tangentes traçadas do ponto $A(3, -1)$ à elipse $2x^2 + 3y^2 + x - y = 5$.
13. Sejam F_1 e F_2 os focos da elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, $a < b$, e seja r uma reta tangente à elipse. Mostre que

$$\text{dist}(F_1; r) \cdot \text{dist}(F_2; r) = a^2.$$

3.3 A Hipérbole

Assim como fizemos no estudo da elipse, agora faremos uma interpretação da equação modelo da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0. \quad (3.14)$$

Seja $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e consideremos os pontos $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Se $P(x, y)$ é um ponto móvel cujas coordenadas x e y satisfazem à equação (3.14), mostremos que a quantidade:

$$|\text{dist}(F_1, P) - \text{dist}(F_2, P)|$$

é sempre constante e igual a $2a$. Inicialmente observamos que a variável x que figura na equação (3.14) não pode assumir valores entre $-a$ e a . De fato, se $|x| < a$, então $x^2 < a^2$ e teríamos:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 < 0,$$

que não possui solução real para y . Logo, devemos ter $|x| \geq a$ e, portanto, há dois casos a considerar:

(i) Se $x \geq a$, então $cx \geq a^2$, já que $c > a$, e considerando que $b^2 = c^2 - a^2$, segue de (3.14) que:

$$\begin{aligned} b^2 x^2 - a^2 y^2 &= a^2 b^2 \Leftrightarrow (c^2 - a^2) x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2) \\ \Leftrightarrow -a^2 x^2 - a^2 c^2 + 2a^2 cx - a^2 y^2 &= 2a^2 cx - a^4 - c^2 x^2 \\ \Leftrightarrow a^2 [(x - c)^2 + y^2] &= (a^2 - cx)^2, \end{aligned}$$

e da última igualdade, resulta:

$$a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = |a^2 - cx| = cx - a^2. \quad (3.15)$$

Procedendo de forma similar, substituindo $2a^2 cx$ por $-2a^2 cx$, encontramos:

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = |a^2 + cx| = a^2 - cx \quad (3.16)$$

e subtraindo membro a membro as equações (3.15) e (3.16), obtemos:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = -2a. \quad (3.17)$$

(ii) Se $x \leq -a$, então $a^2 + cx \leq 0$ e, neste caso, encontramos:

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a. \quad (3.18)$$

Combinando (3.17) e (3.18), obtemos: $|\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| = 2a$.

3.3.1 Conceito & Equação Reduzida

Uma *Hipérbole* no plano xy é o lugar geométrico constituído dos pontos $P(x, y)$, cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 , denominados *Focos* da hipérbole, é, em valor absoluto, constante. Os raios F_1P e F_2P são os *Raios Focais* do ponto P e o ponto médio dos focos é o *Centro* da hipérbole. A distância entre os focos recebe o nome de *Distância Focal* da hipérbole. Em símbolos, temos:

$$|\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| = \text{cte.} \quad (3.19)$$

Vamos deduzir a *Equação Reduzida* em duas situações particulares.

■ **MODELO 1:** Neste primeiro modelo, vamos considerar os focos $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ sobre o eixo Ox e admitir que a diferença dos raios focais seja, em valor absoluto, igual a $2a$, isto é:

$$|\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| = 2a. \quad (3.20)$$

Inicialmente observamos que $c > a$, tendo em vista que:

$$2a = |\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| \leq \text{dist}(F_1; F_2) = 2c$$

e de (3.20), resulta:

$$\begin{aligned} |\text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P)| &= 2a \\ \Leftrightarrow \text{dist}(F_1; P) - \text{dist}(F_2; P) &= \pm 2a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow -cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow (cx + a^2)^2 &= a^2 [(x+c)^2 + y^2] \\ \Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2). \end{aligned}$$

Se fizermos $b^2 = c^2 - a^2$, obteremos da última igualdade a equação reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.21)$$

■ **MODELO 2:** Agora, vamos considerar os focos $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$, sobre o eixo Oy , e diferença dos raios focais, em valor absoluto, igual a $2a$. Procedemos de forma similar ao caso anterior e encontramos a equação reduzida:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad (3.22)$$

com $c^2 = a^2 + b^2$.

3.3.2 Gráficos & Elementos Principais

Assim como ocorreu com a elipse, para o traçado do gráfico da hipérbole vamos observar algumas características da cônica.

► **SIMETRIA** O gráfico da hipérbole é simétrico em relação aos eixos Ox e Oy e também em relação à origem. A equação não é alterada por uma mudança no sinal das variáveis x ou y .

► **INTERSEÇÃO COM OS EIXOS** A hipérbole (3.21) não intercepta o eixo Oy , tendo em vista que:

$$x = 0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1$$

e esta última equação não tem solução real para y . Já a hipérbole (3.22) não intercepta o eixo Ox , já que a equação $-x^2/a^2 = 1$ não tem solução real para x .

(a) A interseção da hipérbole definida por (3.21) com o eixo Ox , é determinada considerando $y = 0$ na equação. Encontramos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \pm a.$$

Assim, a hipérbole intercepta o eixo Ox nos vértices: $A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0)$.

(b) Já a hipérbole definida por (3.22) intercepta o eixo Oy nos vértices $B_1(0, a)$ e $B_2(0, -a)$, determinados considerando $x = 0$ na equação:

$$-\frac{0^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = a^2 \Leftrightarrow y = \pm a.$$

► **POSICÃO DA HIPÉRBOLE** Em uma hipérbole pode ocorrer $a > b$, $a < b$ ou $a = b$ e a posição é determinada pelos sinais dos coeficientes nas variáveis x e y . A variável com sinal positivo corresponde ao eixo sobre o qual estão os focos.

► **GRÁFICOS** As Figuras 3.13 e 3.14 abaixo ilustram os gráficos das hipérbolas nas duas situações.

► **ELEMENTOS PRINCIPAIS** Em uma hipérbole, destacamos os seguintes elementos:

(a) Os Focos: $F(\pm c, 0)$, no caso (3.21), e $F(0, \pm c)$, no caso (3.22).

(b) O Centro: $C(0, 0)$, nos dois casos. (ponto médio dos focos)

(c) Os Vértices: $A(\pm a, 0)$, no caso (3.21), e $B(0, \pm a)$, no caso (3.22).

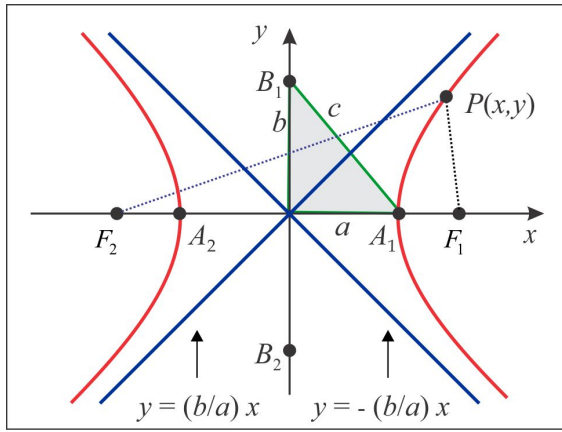


Figura 3.13: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

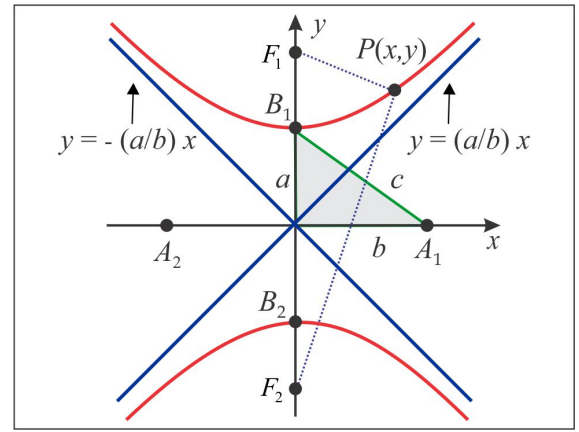


Figura 3.14: $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

- (d) O Eixo Focal: O segmento F_1F_2 .
- (e) O Eixo Transverso: a porção do Eixo Focal entre os vértices (o segmento A_1A_2 ou B_1B_2).
- (f) O Eixo Conjugado: segmento B_1B_2 perpendicular ao Eixo Transverso, na hipérbole (3.21) e A_1A_2 na hipérbole (3.22).
- (f) Os Raios Focais do ponto $P(x, y)$: F_1P e F_2P .
- (g) A Excentricidade: O número $e = c/a$ é maior que 1 mede o *achatamento* da cônica. No caso em que $e \approx 1$, a hipérbole aproxima-se das semiretas com origem nos focos.

► COMPORTAMENTO NO INFINITO Para maior clareza, vamos nos concentrar na hipérbole (3.21) e vejamos como se comporta o gráfico, à medida que a variável x aumenta ou diminui arbitrariamente (este comportamento do x é indicado simbolicamente por: $x \rightarrow +\infty$, no deslocamento para a direita, ou $x \rightarrow -\infty$, no deslocamento para a esquerda). Temos:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 \leq \frac{b^2}{a^2}x^2 \Rightarrow |y| \leq \frac{b}{a}|x| \Leftrightarrow -\frac{b}{a}|x| \leq y \leq \frac{b}{a}|x|.$$

Isto nos diz que o gráfico da hipérbole jaz entre as retas $y = \pm(b/a)x$. Além disso, se $P(x, y)$, $y \geq 0$, é um ponto móvel sobre a hipérbole, se deslocando para direita ($x \rightarrow +\infty$) e r é a reta de equação $y = (b/a)x$, então de acordo com a fórmula (??), da distância de ponto à reta, temos:

$$\text{dist}(P; r) = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{c} \left| bx - b\sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{b}{c} \left| x - \sqrt{x^2 - a^2} \right| = \frac{a^2b}{c} \left| \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right|. \quad (3.23)$$

Um fato básico é que uma fração, com numerador constante, aproxima-se de zero à medida em que o denominador cresce arbitrariamente; com isto em mente, deduzimos a partir de (3.23) que a hipérbole aproxima-se da reta $y = (b/a)x$, quando $x \rightarrow +\infty$. Da mesma forma, quando $x \rightarrow -\infty$ a hipérbole aproxima-se da reta $y = -(b/a)x$. No caso em que $y < 0$, a hipérbole aproxima-se da reta $y = (b/a)x$, quando $x \rightarrow -\infty$, e da reta $y = -(b/a)x$, quando $x \rightarrow +\infty$. Por esta razão, as retas $y = \pm(b/a)x$ recebem o nome de *Assíntotas da Hipérbole*. No caso da hipérbole (3.22), as assíntotas são as retas $x = \pm(b/a)y$, o que nos dá $y = \pm(a/b)x$.

EXEMPLO 3.3.1 Qual a equação da hipérbole com focos $F_1(2, 0)$ e $F_2(-2, 0)$ e um vértice no ponto $A_1(1, 0)$?

Solução: O centro da hipérbole é a origem e o eixo focal é o eixo Ox . Como $a = 1$ e $c = 2$, segue que $b^2 = c^2 - a^2 = 3$ e a equação é:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1.$$

EXEMPLO 3.3.2 Identificar a cônica descrita pela equação:

$$-9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 29.$$

Solução: O primeiro passo é escrever a equação na forma padrão (3.21) ou (3.22). Efetuando o completamento dos quadrados, encontramos:

$$-9(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 36 \quad \text{ou} \quad -\frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$

e a translação: $\bar{x} = x + 1$ e $\bar{y} = y - 2$, de centro $\bar{O}(-1, 2)$, nos remete ao padrão (3.22):

$$-\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

com $a = 2$ e $b = 3$, ilustrada no Figura 3.15.

Temos $c = \sqrt{13}$ e na tabela abaixo mostramos os elementos da hipérbole no sistema auxiliar $\bar{x} \bar{y}$ e no sistema original xy . A passagem de um sistema para o outro é por meio das equações de translação.

Elementos	Sistema $\bar{x} \bar{y}$	Sistema xy
Centro	$\bar{C}(0, 0)$	$C(-1, 2)$
Vértices	$\bar{V}(0, \pm 3)$	$B_1(-1, 5)$ e $B_2(-1, -1)$
Focos	$\bar{F}(0, \pm\sqrt{13})$	$F_1(-1, 2 + \sqrt{13})$ e $B_2(-1, 2 - \sqrt{13})$
Assíntotas	$\bar{y} = \pm(3/2)\bar{x}$	$3x - 2y = -7$ e $3x + 2y = 1$
Eixo Focal	$\bar{x} = 0$	$x = -1$

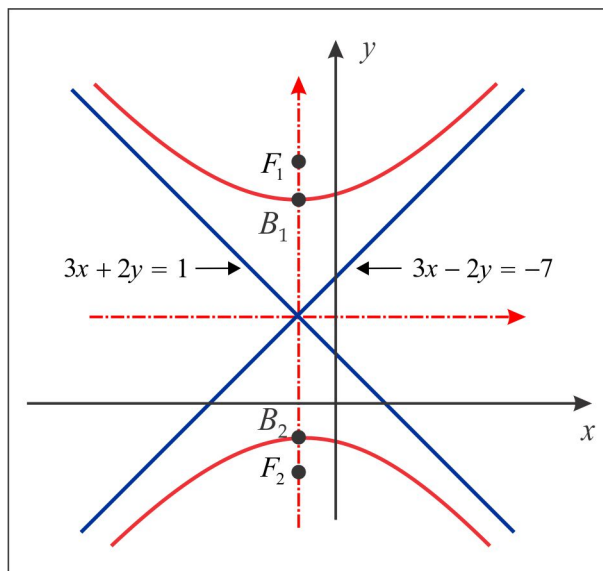


Figura 3.15: Hipérbole do Exemplo 3.3.2

EXEMPLO 3.3.3 (hipérbole transladada) O centro de uma hipérbole está no ponto $C(x_0, y_0)$ e a distância focal é igual a $2c$. Considerando o comprimento do eixo transversal igual a $2a$, há dois casos a considerar:

(i) O eixo focal é paralelo ao eixo Ox e, neste caso, a equação da hipérbole é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

com assíntotas:

$$\pm bx - ay = \pm bx_0 - ay_0$$

obtidas de $\bar{y} = \pm (b/a)\bar{x}$, a partir da mudança de variável: $\bar{x} = x - x_0$ e $\bar{y} = y - y_0$.

(ii) O eixo focal é paralelo ao eixo Oy e, neste caso, a equação da hipérbole é:

$$-\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

com assíntotas:

$$\pm ax - by = \pm ax_0 - by_0$$

obtidas de $\bar{y} = \pm (a/b)\bar{x}$, a partir da mudança de variável: $\bar{x} = x - x_0$ e $\bar{y} = y - y_0$.

► HIPÉRBOLES CONJUGADAS As hipérboles:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em que o eixo transverso de uma coincide com o eixo conjugado da outra denominam-se *Hipérboles Conjugadas*. Elas possuem as mesmas assíntotas e na Figura 3.16 ilustramos duas hipérboles conjugadas, em que iniciamos a construção desenhando o retângulo de lados $2a$ e $2b$, cujas diagonais se encontram ao longo das assíntotas das hipérboles.

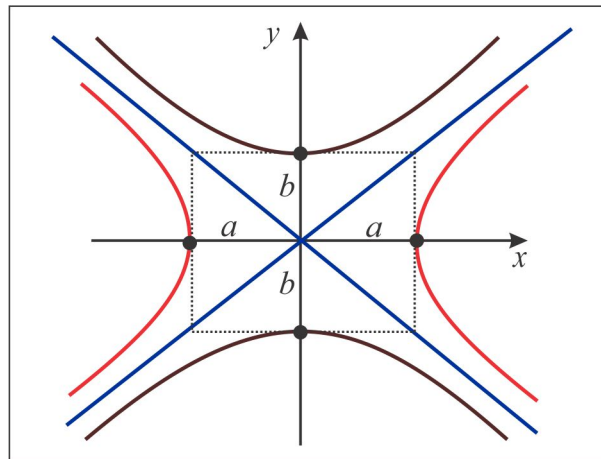


Figura 3.16: Hipérboles Conjugadas.

3.3.3 Hipérbole Equilátera

Agora, vamos considerar hipérboles descritas por uma equação do tipo:

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{ou} \quad -x^2 + y^2 = b^2, \quad (3.24)$$

inserida no Modelo 1 ou Modelo 2, com $a = b$, e denominadas *Hipérboles Equiláteras*.

Como motivação, vamos considerar a hipérbole de focos $F_1(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $F_2(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e vértices $V_1(1, 1)$ e $V_2(-1, -1)$, ilustrada na Figura 3.17, cujo eixo focal é a reta $y = x$ e eixo conjugado de comprimento $2a = 2\sqrt{2}$. A partir da definição obtemos, após as simplificações:

$$|\text{dist}(F_1, P) - \text{dist}(F_2, P)| = 2a \Leftrightarrow xy = 1.$$

A equação $xy = 1$ pode ser inserida no modelo (3.24) por meio da mudança de variável:

$$\begin{cases} \bar{x} = (\frac{\sqrt{2}}{2})x + (\frac{\sqrt{2}}{2})y \\ \bar{y} = -(\frac{\sqrt{2}}{2})x + (\frac{\sqrt{2}}{2})y \end{cases} \quad (3.25)$$

De fato, resolvendo (3.25) encontramos: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}$ e daí resulta:

$$xy = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1. \quad (3.26)$$

A última equação em (3.26) é do tipo (3.24), com $a = \sqrt{2}$, e a mudança de variável (3.25) corresponde a uma rotação do sistema xy de um ângulo de $\pi/4$ rad ou 45° , como ilustra a Figura 3.17.

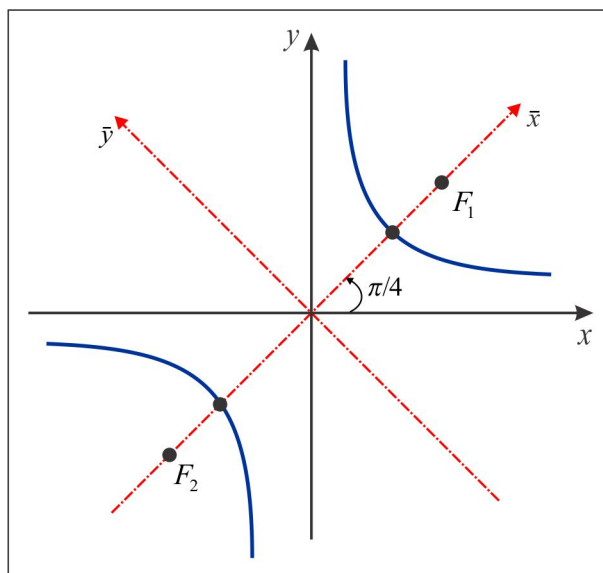


Figura 3.17: Hipérbole Equilátera $xy = 1$.

Considerando como motivação a hipérbole equilátera $xy = 1$, vamos estudar o lugar geométrico descrito pela equação:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad (3.27)$$

sendo a , b , c e d parâmetros constantes e $x \neq -d/c$. Faremos uma análise do comportamento da cônica a partir da noção intuitiva de limite. Adotaremos como modelo a equação

$$y = \frac{k}{x}, \quad x \neq 0 \quad (3.28)$$

sendo k uma constante não nula. Há dois casos a considerar, dependendo do sinal da constante k .

► 1º CASO $k > 0$: Neste caso, x e y têm mesmo sinal e isto indica que a hipérbole é constituída de um ramo no primeiro quadrante ($x > 0$, $y > 0$) e outro no terceiro quadrante ($x < 0$, $y < 0$). Para esboçar o gráfico com alguma precisão, é necessário estudar como se comporta a variável y , à medida que x se aproxima de zero (indicamos $x \rightarrow 0$), quando x cresce arbitrariamente, com valores positivos (indicamos $x \rightarrow +\infty$) e quando x decresce arbitrariamente, com valores negativos (indicamos $x \rightarrow -\infty$). A aproximação de x para zero pode ocorrer com valores positivos, isto é, pela direita ($x \rightarrow 0^+$) ou pela esquerda, com valores negativos ($x \rightarrow 0^-$).

Vejam os comportamentos da fração k/x em várias situações, levando em conta o sinal de x e da fração k/x , onde aproveitamos o momento para apresentar a notação simbólica para o limite.

(a) Como $x \neq 0$ e $y \neq 0$, o gráfico da hipérbole $y = k/x$ não toca o eixo Ox nem o eixo Oy .

(b) Quando $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow 0^+$. Traduzimos esta afirmação da seguinte forma: quando x cresce arbitrariamente, com valores positivos, então a fração $y = k/x$ é positiva, mas, arbitrariamente próxima de zero. Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{x} \right) = 0^+.$$

(c) Quando $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow 0^-$. Aqui a fração $y = k/x$ é negativa e próxima de zero.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{k}{x} \right) = 0^-.$$

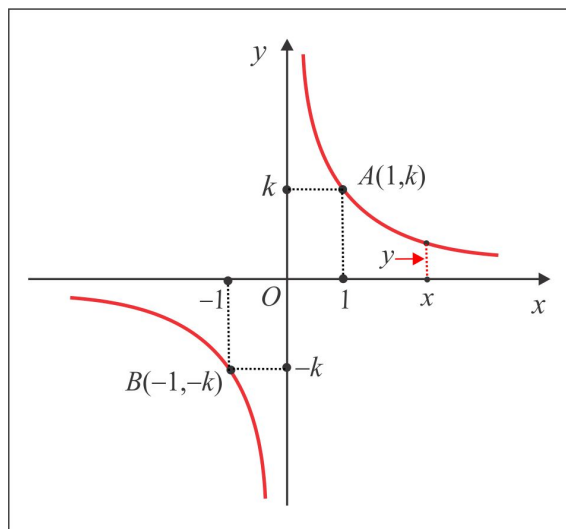
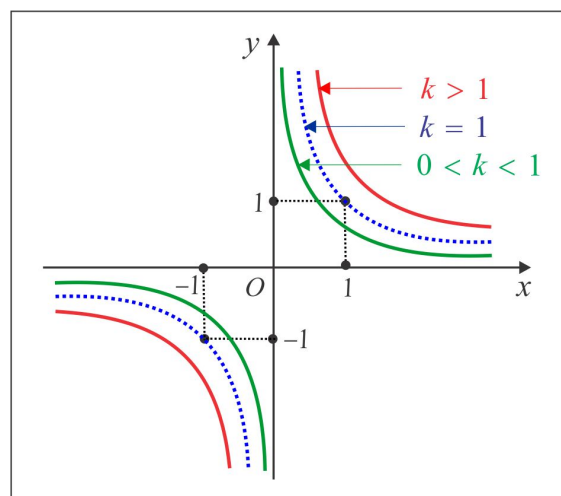
(d) Quando $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow +\infty$, ao longo do eixo vertical. Quando x é positivo e próximo de zero, a fração $y = k/x$ é arbitrariamente grande.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{k}{x} \right) = +\infty.$$

(e) Quando $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow -\infty$, ao longo do eixo vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{k}{x} \right) = -\infty.$$

Com estas informações, vamos esboçar o gráfico da hipérbole $y = k/x$, $x \neq 0$, $k > 0$, que se assemelha ao da hipérbole de equação $xy = 1$, como ilustrado nas Figuras 3.18 e 3.19.

Figura 3.18: $xy = k$, $k > 0$.Figura 3.19: $xy = k$, $k > 0$.

Quando $x \rightarrow 0$ ou $x \rightarrow \pm\infty$, vemos que o gráfico da hipérbole aproxima-se do eixo Oy ou do eixo Ox e, portanto, o eixo Ox , de equação $y = 0$, e o eixo Oy , de equação $x = 0$, são as assíntotas da hipérbole.

► **2º CASO** $k < 0$: Este é o caso em que x e y têm sinais opostos e o gráfico da hipérbole tem um ramo no 2º quadrante ($x < 0$, $y > 0$) e outro no 4º quadrante ($x > 0$, $y < 0$). O comportamento do y segue o mesmo ritual do 1º Caso, com algumas modificações nos sinais.

- (a) Como $x \neq 0$ e $y \neq 0$, o gráfico da hipérbole $y = k/x$ não toca o eixo Ox nem o eixo Oy .
 (b) Quando $x \rightarrow +\infty$, então $y \rightarrow 0^-$. Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{x} \right) = 0^-.$$

- (c) Quando $x \rightarrow -\infty$, então $y \rightarrow 0^+$. Em símbolos, escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{k}{x} \right) = 0^+.$$

- (d) Quando $x \rightarrow 0^+$, então $y \rightarrow -\infty$, ao longo do eixo vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{k}{x} \right) = -\infty.$$

(e) Quando $x \rightarrow 0^-$, então $y \rightarrow +\infty$, ao longo do eixo vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{k}{x} \right) = +\infty.$$

Os eixos Ox e Oy são as assíntotas da hipérbole e o gráfico está ilustrado nas Figuras 3.20 e 3.21.

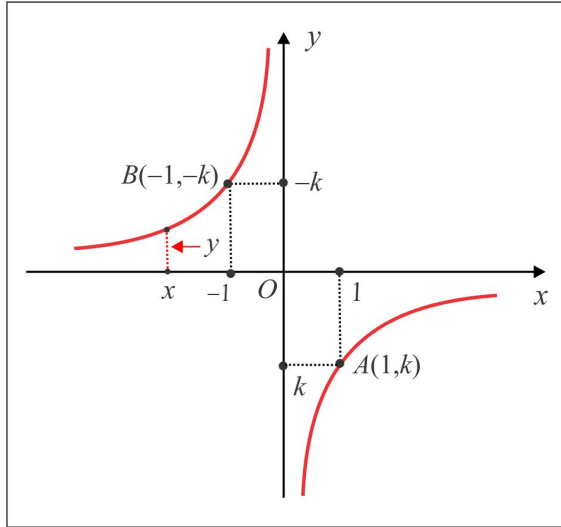


Figura 3.20: $xy = k$, $k < 0$.

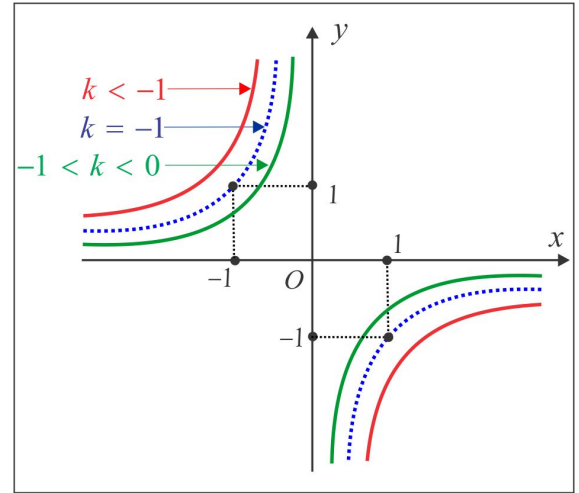


Figura 3.21: $xy = k$, $k < 0$.

CASO GERAL: O caso geral (3.27) se reduz ao Caso 1 ou 2, por meio de uma mudança de variável (translação). Vejamos o passo-a-passo até à equação final $\bar{y} = k/\bar{x}$. Temos:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} \left(\frac{x + b/a}{x + d/c} \right) = \frac{a}{c} \left[\frac{(x + d/c) + b/a - d/c}{x + d/c} \right] = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{b/a - d/c}{x + d/c} \right).$$

Daí resulta a equivalência:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow y - \frac{a}{c} = \frac{k}{x + d/c} \Leftrightarrow \bar{y} = \frac{k}{\bar{x}}$$

com $\bar{x} = x + d/c$, $\bar{y} = y - a/c$ e $k = (bc - ad)/c^2$.

EXEMPLO 3.3.4 Vamos identificar a hipérbole governada pela equação:

$$y = \frac{2x - 4}{x - 1}.$$

Inicialmente observamos que $x \neq 1$ e que a equação da hipérbole é equivalente a:

$$y - 2 = \frac{-2}{x - 1}$$

e com a translação $\bar{x} = x - 1$ e $\bar{y} = y - 2$ a equação assume a forma do Caso 2, com $k = -2$:

$$\bar{y} = -\frac{2}{\bar{x}}.$$

As assíntotas são as retas $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = 0$, isto é, $x = 1$ e $y = 2$. As interseções com os eixos Ox e Oy são os pontos $A(2, 0)$ e $B(0, 4)$, respectivamente. O gráfico tem o aspecto da Figura 3.22.

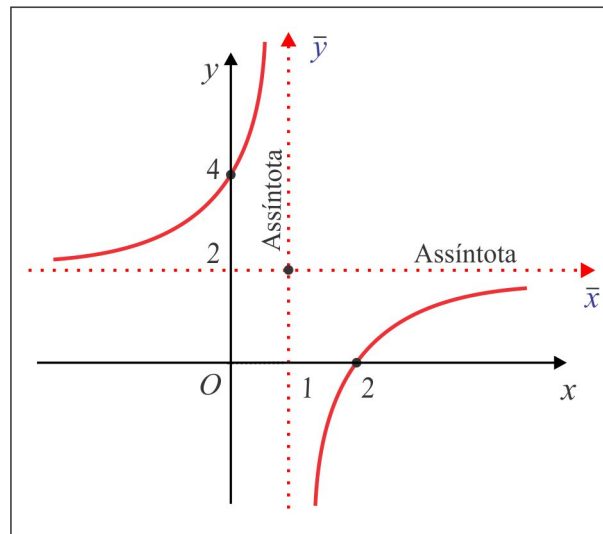


Figura 3.22: Hipérbole Equilátera $y = \frac{2x - 4}{x - 1}$.

► **SOBRE A NOTAÇÃO DE LIMITE** Vamos destacar alguns aspectos decorrentes da expressão:

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b.$$

- (i) Lê-se: "limite de y , quando x tende para a , é igual a b ."
- (ii) Na expressão não está especificado se x está á direita ou à esquerda de \underline{a} ; ela relata que x está arbitrariamente próximo de a , sem contudo, atingir o valor \underline{a} .
- (iii) Para especificar que x tende para \underline{a} da esquerda para a direita, isto é, com valores menores do que a , anotamos: $x \rightarrow a^-$. A expressão $\lim_{x \rightarrow a^-} y = b$ indica um *limite lateral à esquerda*. Da mesma forma, $\lim_{x \rightarrow a^+} y = b$ indica que y estará arbitrariamente próximo de \underline{b} , quando x estiver à direita (maior do que) e arbitrariamente próximo de \underline{a} e indica um *limite lateral à direita*.

- (iv) Por fim, o limite de y quando $x \rightarrow a$ existe e tem valor \underline{b} se, e somente se, os limites laterais no ponto \underline{a} forem iguais a \underline{b} , isto é:

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} y = b \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} y = b. \quad (3.29)$$

A equivalência (3.29) é um argumento bastante utilizado na investigação da existência de limite.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.3

1. Encontre a equação, os elementos principais (*focos, vértices, excentricidade, centro, eixos e assíntotas*) e esboce o gráfico da hipérbole caracterizada por:
 - (a) Focos $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$ e diferença dos raios focais igual a 6.
 - (b) Focos $F_1(2, -7)$, $F_2(2, 5)$ e diferença dos raios focais igual a 5.
 - (c) Vértices em $A_1(2, -1)$, $A_2(2, 7)$ e excentricidade $e = 3/2$.
 - (d) Vértices em $A_1(0, -2)$, $A_2(0, 2)$, não corta o eixo x e tem assíntotas $y = \pm 2x$.
 - (e) Focos $F_1(-2, 2)$, $F_2(2, -2)$ e vértices $V_1(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $V_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
2. Calcule a área do triângulo determinado pela reta $9x + 2y = 24$ e pelas assíntotas da hipérbole $9x^2 - 4y^2 = 36$.
3. Um triângulo tem a base fixa e o produto das inclinações dos lados variáveis é sempre igual a
 4. Se a base é o segmento que une os pontos $A(3, 0)$ e $B(-3, 0)$, identifique o lugar geométrico descrito pelo vértice oposto à base.
4. Determine a equação da hipérbole com centro na origem, um vértice no ponto $V_1(6, 0)$ e tendo a reta $4x - 3y = 0$ como uma das assíntotas.
5. Ache a excentricidade, o centro, os focos e as assíntotas da hipérbole $4y^2 - 9x^2 + 16y + 18x = 29$.
6. Se e é a excentricidade da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, mostre que os raios focais de um ponto $P_0(x_0, y_0)$ da hipérbole têm comprimento $|ex_0 \pm a|$. Determine os comprimentos dos raios focais do ponto $P_0(6, 5)$ sobre a hipérbole $5x^2 - 4y^2 = 80$.
7. O centro de uma hipérbole está na origem, seu eixo transversal jaz sobre o eixo y e um dos focos é o ponto $F_1(5, 0)$. Se a excentricidade da hipérbole é $e = 3$, determine sua equação e suas assíntotas.

8. Se α é o ângulo agudo de inclinação de uma assíntota da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, mostre que a excentricidade da hipérbole é $\sec \alpha$.
9. Esboce no mesmo sistema de coordenadas as curvas $x^2 - y^2 = k$ para os seguintes valores de k : -2 , -1 , 0 , 1 e 2 .
10. Esboce o gráfico e encontre as assíntotas da hipérbole equilátera: $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$.

3.4 A Parábola

Iniciamos com a parábola de equação $y = ax^2$, $a \neq 0$, cujo gráfico é tangente ao eixo Ox na origem. A concavidade do gráfico (para cima ou para baixo) depende do sinal do coeficiente a , como ilustram as Figuras 3.23 e 3.24. No caso $a > 0$, temos $y = ax^2 \geq 0$, $\forall x$, e a origem é um ponto de mínimo do gráfico, enquanto no caso $a < 0$ ocorre $y = ax^2 \leq 0$, $\forall x$, e a origem é um ponto de máximo do gráfico.

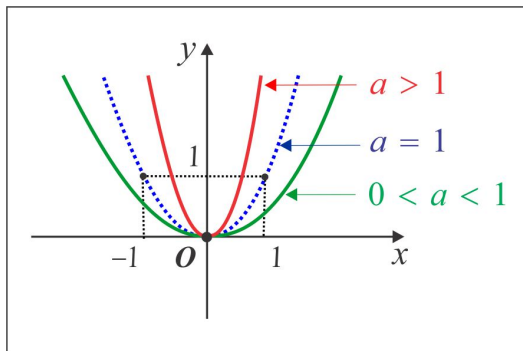


Figura 3.23: $y = ax^2$, $a > 0$

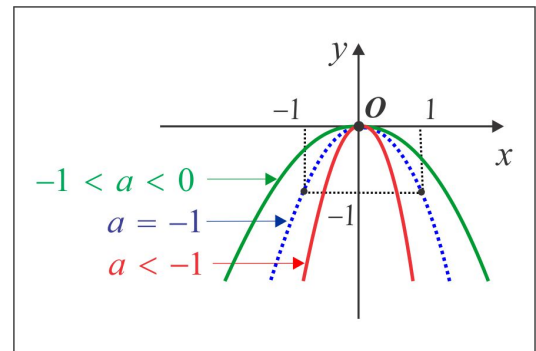


Figura 3.24: $y = ax^2$, $a < 0$

O caso geral $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, será reduzido ao caso apresentado por meio de uma simples translação. Vejamos um exemplo como modelo.

EXEMPLO 3.4.1 Esboçar o gráfico da parábola descrita pela equação: $y = 2x^2 - 4x + 4$.

Solução: Efetuando o completamento do quadrado, obtemos a equação:

$$y = 2(x - 1)^2 + 2$$

e por meio da mudança $\bar{x} = x - 1$ e $\bar{y} = y - 2$ chegamos à equação reduzida: $\bar{y} = 2\bar{x}^2$. O ponto de mínimo do gráfico é a nova origem $\bar{O}(1, 2)$ e para dar maior fidelidade ao gráfico ilustrado na Figura 3.25, é aconselhável determinar as possíveis interseções com os eixos Ox e Oy .

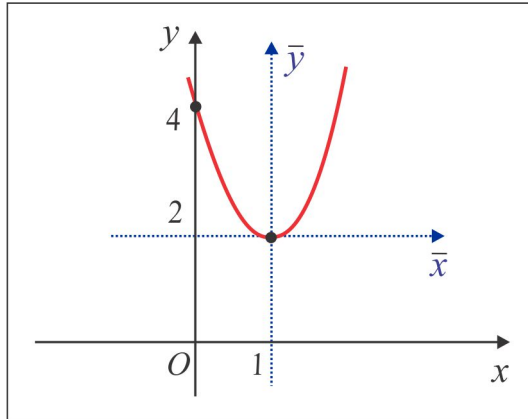


Figura 3.25: Parábola $y = 2x^2 - 4x + 4$.

- (i) Interseção com o eixo Oy : Considerando na equação original $x = 0$ (recorde-se que nos pontos do eixo Oy tem-se $x = 0$), encontramos $y = 4$ e a interseção com o eixo Oy é o ponto $A(0, 4)$.
- (ii) Interseção com o eixo Ox : Fazendo $y = 0$ na equação original (recorde-se que nos pontos do eixo Ox tem-se $y = 0$), chegamos à equação do 2º grau $2x^2 - 4x + 4 = 0$, sem raiz real, já que o discriminante é $\Delta = -16 < 0$. Portanto, o gráfico não toca o eixo Ox .

EXEMPLO 3.4.2 No caso geral da parábola $y = ax^2 + bx + c$, imitando o que foi feito no Exemplo 3.4.1, encontramos:

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}, \quad (3.30)$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante. Se fizermos $x = -b/2a$ em (3.30), obtemos $y = -\Delta/4a$ e o ponto extremo (máximo ou mínimo) $V(-b/2a, -\Delta/4a)$ é o vértice da parábola (nova origem). A parábola intercepta o eixo Oy no ponto $B(0, c)$ e com o eixo Ox pode haver interseção ou não. Se o discriminante $\Delta < 0$, não há interseção com o eixo Ox ; se $\Delta = 0$ a parábola intercepta o eixo Ox no ponto $A(-b/2a, 0)$; se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(x, 0)$ de abscissa $x = \left(-b \pm \sqrt{\Delta} \right) / 2a$, que são precisamente as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

EXEMPLO 3.4.3 (Rotação da Parábola) A equação $x = ay^2$, $a \neq 0$, também representa parábolas. Houve uma permuta entre as variáveis x e y e, graficamente, essa permuta corresponde a uma rotação de 90° ($\pi/2$ rad) no sistema de coordenadas. A Figura 3.26 ilustra os gráficos, nos casos $a = \pm 1$.

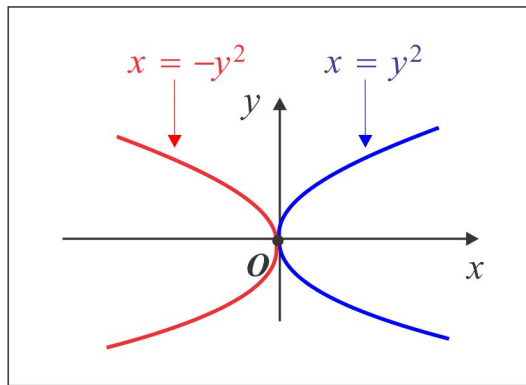


Figura 3.26: Parábolas $x = \pm y^2$.

3.4.1 O Foco e a Diretriz da Parábola

Fixemos no plano xy um ponto F e uma reta r . Denomina-se *Parábola de Foco F e Diretriz r* ao lugar geométrico constituído dos pontos $P(x, y)$ equidistantes do ponto F e da reta r , isto é:

$$\text{dist}(F; P) = \text{dist}(P; r). \quad (3.31)$$

A reta que passa no foco e é perpendicular à diretriz recebe o nome de *Eixo Focal*. A partir da equação geral (3.31) vamos encontrar a equação cartesiana da parábola, em alguns casos especiais. Para isto, fixemos um parâmetro real $p > 0$.

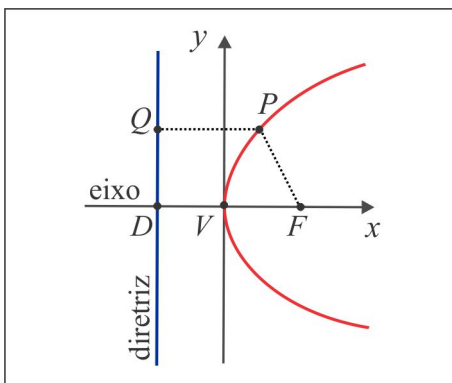
■ **MODELO 1:** O foco é o ponto $F(p, 0)$ e a diretriz é a reta $x = -p$, ortogonal ao eixo Ox . A Figura 3.27 ilustra graficamente a situação, onde destacamos os pontos:

- (i) $F(p, 0)$ e $P(x, y)$ respectivamente, o foco e um ponto genérico da parábola.
- (ii) $Q(-p, y)$ o pé da perpendicular baixada do ponto P à diretriz.
- (iii) $D(-p, 0)$ ponto de interseção do eixo da parábola (eixo Ox) com a diretriz.

O vértice da parábola é o ponto médio do segmento DF que, neste caso, coincide com a origem.

Notando que $\text{dist}(P; r) = \text{dist}(P, Q)$, obtemos a partir de (3.31):

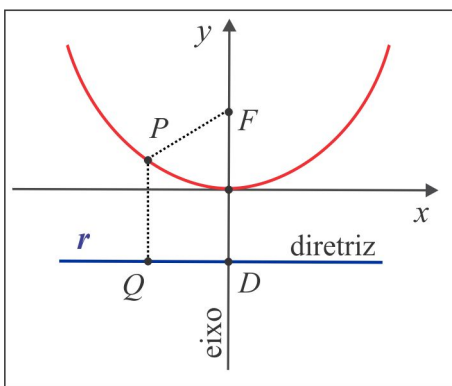
$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

Figura 3.27: Parábola $y^2 = 4px$.

e após as simplificações chegamos à equação cartesiana da parábola.

$$y^2 = 4px$$

■ **MODELO 2:** O foco é o ponto $F(0, p)$ e a diretriz é a reta $y = -p$, orthogonal ao eixo Oy .

Figura 3.28: Parábola $x^2 = 4py$.

A Figura 3.28 ilustra graficamente este caso, onde destacamos os pontos $Q(x, -p)$ e $D(0, -p)$. Mais uma vez o vértice é a origem e a equação (3.31) neste caso é:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = \sqrt{(y + p)^2}.$$

Simplificando a última equação, obtemos:

$$x^2 = 4py.$$

Nas Figuras 3.29 e 3.30 ilustramos as variantes dos Modelos 1 e 2, onde trocamos p por $-p$:

(i) Foco $F(-p, 0)$ e diretriz $x = p$. Neste caso, a parábola é descrita por: $y^2 = -4px$.

(ii) Foco $F(0, -p)$ e diretriz $y = p$. Neste caso, a parábola é descrita por: $x^2 = -4py$.

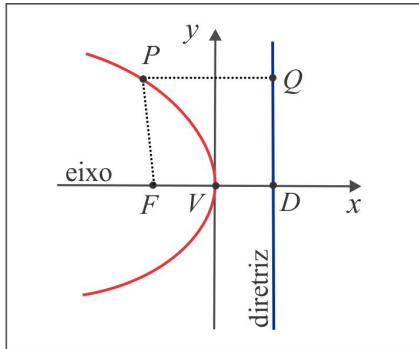


Figura 3.29: $y^2 = -4px$, $p > 0$

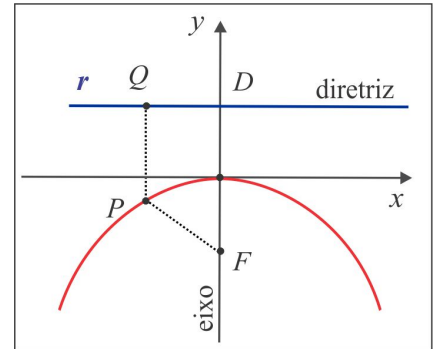


Figura 3.30: $x^2 = -4py$, $p > 0$

EXEMPLO 3.4.4 Olhando a parábola $y^2 = x$ sob a forma padrão:

$$y^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot x$$

com $p = 1/4$, deduzimos que ela tem foco no ponto $F(1/4, 0)$, vértice está na origem e a diretriz é a reta vertical $y = -1/4$.

3.4.2 Translação da Parábola

Com a mudança de variável

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

a equação quadrática:

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0), \quad p > 0 \quad (3.33)$$

torna-se $\bar{x}^2 = \pm 4p\bar{y}$ e representa a parábola do Modelo 1 e sua variante, ilustradas na Figura 3.31 e caracterizadas por:

(a) vértice $V(x_0, y_0)$, Foco $F(x_0, y_0 + p)$ e diretriz $r : y = y_0 + p$.

(b) vértice $V(x_0, y_0)$, Foco $F(x_0, y_0 - p)$ e diretriz $r : y = y_0 - p$.

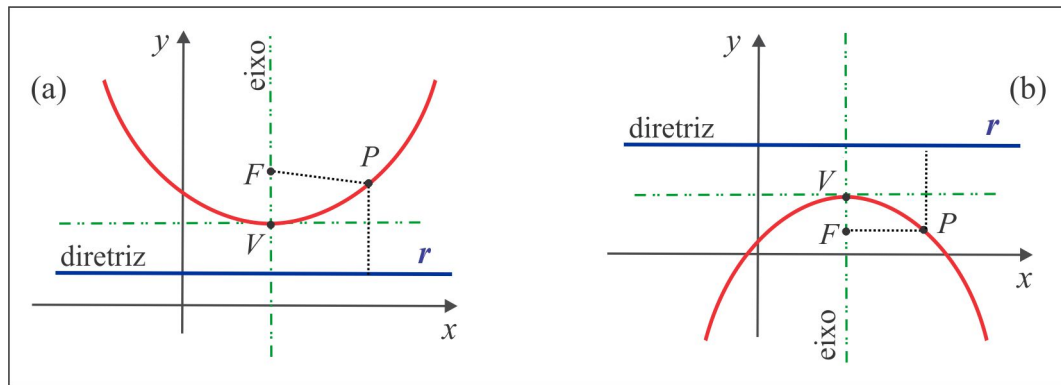


Figura 3.31: Parábola Transladada: $(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)$.

Com a mesma mudança de variável (3.32) a equação:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0), \quad p > 0$$

torna-se $\bar{y}^2 = 4p\bar{x}$ e representa a parábola do Modelo 2 e sua variante, ilustradas na Figura 3.32 e caracterizadas:

- (a) vértice $V(x_0, y_0)$, Foco $F(x_0 + p, y_0)$ e diretriz $r : x = x_0 - p$.
 (b) vértice $V(x_0, y_0)$, Foco $F(x_0 - p, y_0)$ e diretriz $r : x = x_0 + p$.

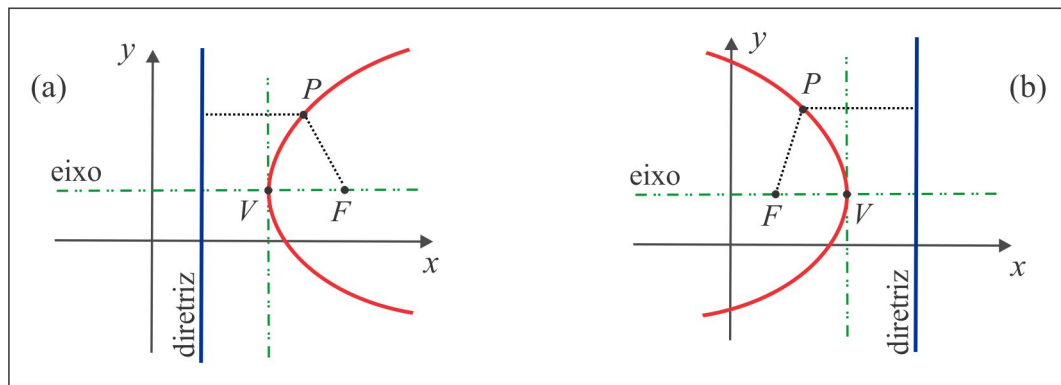


Figura 3.32: Parábola Transladada: $(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$.

EXEMPLO 3.4.5 Encontrar o foco e a diretriz da parábola: $y = 2x^2 - 4x + 4$.

Solução: Vamos enquadrar a parábola em um dos modelos apresentados. Temos:

$$y - 2 = 2(x - 1)^2 \Leftrightarrow \bar{y} = 2\bar{x}^2 \quad \text{ou} \quad \bar{x}^2 = 4(1/8)\bar{y}$$

Vemos que a parábola é do Modelo 2, com $p = 1/8$ e assim, no sistema $\bar{x} \bar{y}$, a parábola tem foco $\bar{F}(0, 1/8)$ e diretriz $\bar{y} = -1/8$. Notando que $y = \bar{y} + 2$ e $x = \bar{x} + 1$, deduzimos que no sistema original xy , a parábola tem foco $F(1, 17/8)$ e diretriz $y = -17/8$.

EXEMPLO 3.4.6 (A diretriz não é horizontal nem vertical) Determinar a equação da parábola com foco $F(0, 0)$ e diretriz $r : x + y = 2$. Qual o vértice da parábola?

Solução: A Figura 3.33 ilustra a situação gráfica, onde $P(x, y)$ é um ponto genérico da parábola.

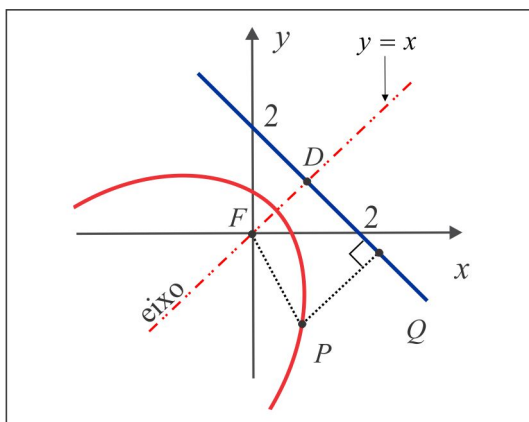


Figura 3.33: Parábola do Exemplo 3.4.6

Usando a fórmula da distância (??) e o conceito (3.31), obtemos:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|x + y - 2|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{(x + y - 2)^2}{2}$$

e, após as simplificações, encontramos:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y = 4.$$

O eixo da parábola é a reta $y = x$, que intercepta a diretriz $x + y = 2$ no ponto $D(1, 1)$ e como o vértice o ponto médio do segmento DF , encontramos $V(1/2, 1/2)$.

1. Encontre a equação, os elementos principais (*foco, vértice, excentricidade, eixo e diretriz*) e esboce o gráfico da parábola caracterizada por:

(a) Foco $F(3, 0)$ e diretriz $r : x + 3 = 0$.

- (b) Foco $F(0, -2)$ e diretriz $r : y = 2$.
 - (c) Foco $F(-2, 0)$ e diretriz $r : x = 4$.
 - (d) Foco $F(-4, 1)$ e diretriz $r : y = 3$.
 - (e) Vértice $V(2, 0)$ e foco $F(0, 0)$.
 - (f) Vértice $V(4, -1)$, eixo focal $r : y = -1$ e passa no ponto $P(3, -3)$.
 - (g) Foco $F(0, 0)$ e diretriz $r : x + y = 2$.
 - (h) Vértice $V(-2, 3)$ e foco $F(1, 3)$.
 - (i) Eixo paralelo ao eixo y e passa nos pontos $A(4, 5)$, $B(-2, 11)$ e $C(-4, 21)$.
 - (j) Vértice na reta $2y - 3x = 0$, eixo paralelo ao eixo x e passa nos pontos $A(3, 5)$ e $B(6, -1)$.
2. Mostre que a circunferência com centro no ponto $C(4, -1)$ e que passa no foco da parábola $x^2 + 16y = 0$ é tangente à diretriz da parábola.
3. Identifique a trajetória de uma partícula em movimento, em que a distância da partícula à reta $r : x + 3 = 0$ é sempre duas unidades maior que sua distância ao ponto $(1, 1)$.

3.5 Equação Geral do 2º Grau em Duas Variáveis

A equação geral do 2º grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.34}$$

pode representar qualquer uma das cônicas (circunferência, elipse, hipérbole ou parábola) mas, também, pode representar um reta ou um par de retas. Tudo depende dos valores dos coeficientes A , B , C , D , E e F . Para identificar a natureza da cônica podemos usar a regra prática do *identificador* Δ . De fato: suponhamos que uma determinada cônica seja descrita pela equação (3.1) e seja $\Delta = b^2 - 4ac$.

- (a) Se $\Delta = 0$, então a cônica é uma parábola;
- (b) Se $\Delta < 0$, então a cônica é uma elipse;
- (c) Se $\Delta > 0$, então a cônica é uma hipérbole.

A única informação que essa regra nos dá é sobre a natureza da cônica. Uma maneira mais eficiente de identificá-la consiste em efetuar mudanças de coordenadas (translação e/ou rotação) e escrever a equação na forma padrão:

$$\begin{array}{ll} \text{Circunferência:} & (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \\ \text{Elipse:} & \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \\ \text{Parábola:} & x^2 = 4py \quad \text{ou} \quad y^2 = 4px \\ \text{Hipérbole:} & \pm \frac{(x - x_0)^2}{a^2} \mp \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \end{array}$$

De forma geral, podemos dizer que a translação "elimina" os termos Dx e Ey do 1º grau, enquanto a rotação tem a finalidade de "eliminar" o termo Bxy da equação. A seguir apresentamos, de modo sucinto, como essas operações atuam na equação da cônica.

Do ponto de vista geométrico, são necessários 5 pontos para se determinar uma cônica e, no caso da parábola, 4 pontos são suficientes, tendo em vista que, nesse caso, $B^2 - AC = 0$. Se, por exemplo, $A \neq 0$ então a equação (3.34) se reduz a

$$x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

onde $B' = B/A$, $C' = C/A$... etc, e essa última equação contém 5 coeficientes a determinar. No caso em que a cônica tem seus eixos paralelos aos eixos coordenados, temos $B = 0$ e, neste caso, quatro pontos são suficientes.

3.5.1 Translação de Eixos

A Figura 3.34 ao lado mostra as coordenadas de um ponto $P(x, y)$ em dois sistemas de coordenadas: o sistema original xOy e o sistema $\bar{x}\bar{O}\bar{y}$, obtido após a translação. Considerando o ponto $\bar{O}(x_0, y_0)$, é fácil deduzir que as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do ponto P , no novo sistema de coordenadas, são determinadas pelas equações:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0. \end{cases}$$

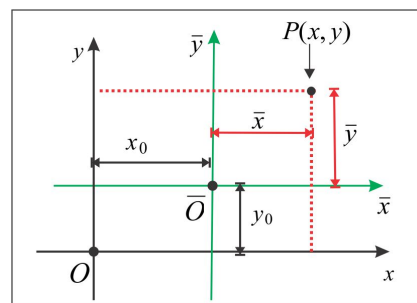


Figura 3.34: Translação de Eixos

EXEMPLO 3.5.1 (Identificando uma Cônica) Consideremos a cônica de equação

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 32y + 37 = 0.$$

Completando os quadrados, a equação se escreve:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 2x + 1) - 9 + 4(y^2 + 8x + 16) - 64 + 37 &= 0 \iff \\ 9(x-1)^2 + 4(y+4)^2 &= 36 \iff \\ \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, a equação representa a elipse com focos $F(0, \pm\sqrt{5})$ e centro no ponto $\bar{O}(1, -4)$.

Teorema 3.5.2 (Translação da Elipse) Se A e C têm mesmo sinal e $\lambda = AE^2 + CD^2 - 4ACF > 0$, a equação do segundo grau:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.35)$$

representa uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados Ox e Oy .

Demonstração Não há perda de generalidade em admitir que os coeficientes A e C são ambos positivos e, sendo assim, a equação (3.35) é equivalente a:

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) + F = 0$$

ou ainda:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4AC}. \quad (3.36)$$

A última equação se expressa sob a forma padrão da elipse:

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{a^2} + \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{b^2} = 1$$

considerando $a^2 = \lambda/4A^2C$ e $b^2 = \lambda/4AC^2$. ■

Teorema 3.5.3 (Translação da Hipérbole) Se A e C têm sinais opostos, a equação do segundo grau:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (3.37)$$

ou representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados Ox e Oy ou representa um par de retas concorrentes.

Demonstração: Não há perda de generalidade em admitir $A > 0$ e $C < 0$. Completando os quadrados em (3.37) chegamos à equação:

$$\frac{(x + D/2A)^2}{1/A} - \frac{(y + E/2C)^2}{-1/C} = \lambda, \quad (3.38)$$

com $\lambda = \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4C^2} - F$ Supondo $\lambda > 0$, a equação (3.38) se escreve sob a forma:

$$\frac{(x + D/2A)^2}{a^2} - \frac{(y + E/2C)^2}{b^2} = 1,$$

com $a^2 = \lambda/A$ e $b^2 = -\lambda/C$ e representa uma hipérbole do Modelo 1. Se $\lambda = 0$, a equação (3.38) representa um par de retas concorrentes. ■

3.5.2 Rotação de Eixos

A Figura 3.35 ao lado mostra as coordenadas \bar{x} e \bar{y} de um ponto $P(x, y)$ após uma rotação no sentido positivo (*anti-horário*) do sistema de coordenadas xy . Representemos por θ o ângulo de rotação e observando a figura, vamos determinar as relações entre as coordenadas do ponto P nos dois sistemas. Temos:

$$\begin{cases} x = OA = OB - AB = \bar{x} \cos \theta - y \sin \theta \\ y = AP = AD + DP = \bar{x} \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

e invertendo o sistema, encontramos:

$$\begin{cases} \bar{x} = x \cos \theta + y \sin \theta \\ \bar{y} = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{cases}$$

Com a notação matricial, o sistema se expressa sob a forma:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

onde a matriz $A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ é conhecida por *Matriz de Rotação*.

EXEMPLO 3.5.4 Após uma rotação de $\theta = \pi/4$, as coordenadas \bar{x} e \bar{y} do ponto $P(1, 1)$ são tais que:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e daí resulta $\bar{x} = \sqrt{2}$ e $\bar{y} = 0$.

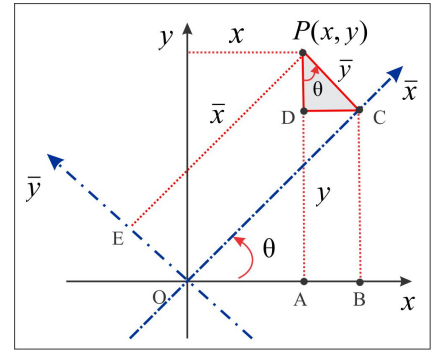


Figura 3.35: Rotação de Eixos

EXEMPLO 3.5.5 (Uma Hipérbole Equilátera) Vejamos como atua uma rotação de $\pi/4$ sobre a equação $xy = 1$. A Figura 3.17 ilustra o gráfico e usando a matriz de rotação, com $\theta = \pi/4$, encontramos:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y} \quad e \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{y}$$

e a equação $xy = 1$ se transforma em:

$$\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{y}^2}{2} = 1$$

que representa, no sistema $\bar{x} \bar{y}$, a hipérbole com focos $\bar{F}(\pm 2\sqrt{2}, 0)$. No sistema xy , os focos são:

$$F_1(2, 2) \quad e \quad F_2(-2, -2)$$

3.5.3 O ângulo de rotação

Analisemos a equação geral do 2º grau (3.34) em duas situações.

■ SITUAÇÃO 1 $B = 0$ e A ou C não nulo

Neste caso, a equação (3.34) se reduz a

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{3.39}$$

e uma simples translação (completamento de quadrados) leva a equação à forma padrão. Note que em (3.39) um dos coeficientes A ou C é não nulo, de modo que a equação pode representar qualquer uma das cônicas.

■ SITUAÇÃO 2 $B \neq 0$

Este é o caso onde é necessário efetuar uma rotação no sistema de coordenados, de modo a eliminar o termo Bxy da equação original. A partir daí, o problema se reduz ao caso anterior.

A rotação de um ângulo θ nos leva às relações já estabelecidas:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta, \end{cases}$$

e levando os valores de x e y na equação (3.34), obtemos:

$$A'\bar{x}^2 + B'\bar{x}\bar{y} + C'\bar{y}^2 + R(\theta, \bar{x}, \bar{y}) = 0 \tag{3.40}$$

onde em (3.40) o termo $R(\theta, \bar{x}, \bar{y})$ não envolve \bar{x}^2 , \bar{y}^2 ou $\bar{x}\bar{y}$ e A' , B' e C' são dados por:

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + C \sin^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta \\ B' &= -2A \sin \theta \cos \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \sin \theta \cos \theta \\ C' &= A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Para eliminarmos o termo misto $\bar{x}\bar{y}$ na expressão (3.40) é suficiente considerarmos $B' = 0$, isto é:

$$-2A \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2C \operatorname{sen} \theta \cos \theta = 0 \quad (3.41)$$

e usando as identidades $\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ e $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$, segue de (3.41):

$$(-A + C) \operatorname{sen}(2\theta) + B \cos(2\theta) = 0$$

e a partir daí deduzimos que o ângulo θ de rotação é tal que:

$$\cotg(2\theta) = \frac{A - C}{B}. \quad (3.42)$$

EXEMPLO 3.5.6 Quando consideramos no exemplo precedente o ângulo de rotação $\theta = \pi/4$ para identificar a cônica $xy = 1$, tínhamos em mente a expressão (3.42). Na equação $xy = 1$, temos $B = 1$, $F = -1$ e os outros coeficientes A , C , D e E iguais a zero e, portanto, $\cotg 2\theta = 0$. Logo, $2\theta = \pi/2$ e $\theta = \pi/4$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.5

1. Por meio de uma translação escreva a equação da cônica na forma padrão e identifique seus elementos principais.

- | | |
|------------------------------------|---|
| (a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 20$ | (a circunferência $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 25$) |
| (b) $y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$ | (a parábola $\bar{y}^2 = 4\bar{x}$) |
| (c) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y = 4$ | (a hipérbole $3\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 = 12$) |
| (d) $2x^2 + 3y^2 - 42x + 12y = 20$ | (a elipse $2\bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = 34$) |
| (e) $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y = 8$ | (a elipse $2\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 33$) |
| (f) $3x^2 - 4y^2 + 12x + 8y = 4$ | (a hipérbole $3\bar{x}^2 - 4\bar{y}^2 = 12$) |

2. Identifique as cônicas abaixo, escrevendo suas equações na forma padrão.

- | | |
|--|-------------|
| (a) $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x = 32$ | (hipérbole) |
| (b) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 68x + 24y = 12$ | (elipse) |
| (c) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 6$ | (elipse) |
| (d) $xy + x - 2y + 3 = 0$ | (hipérbole) |

$$(e) \quad xy = k \quad k \neq 0 \quad \text{(hipérbole)}$$

3. Identifique a cônica que passa nos pontos $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, -1)$, $D(-3, 2)$ e $E(-2, -1)$.
4. Por meio de uma rotação de $\theta = \arctg(4/3)$, simplifique a equação $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$. Identifique a cônica e esboce seu gráfico.

3.6 O Foco e a Diretriz de uma Cônica

No Exercício 2 da Seção 3.6 consideramos a reta $l : x = 2$ e o ponto $F(-1, 0)$ e vimos que a equação

$$\left\| \overrightarrow{FP} \right\| = e \cdot \text{dist}(P; l) \quad (3.4)$$

descreve: uma parábola, quando $e = 1$; uma elipse, quando $e = 1/2$; e uma hipérbole, quando $e = 2$.

De forma geral, dados uma reta l , denominada *Diretriz*, um ponto F fora da reta l , denominado *Foco*, o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem a equação (3.4) representa:

- (a) uma parábola, se $e = 1$;
- (b) uma elipse, se $0 < e < 1$;
- (c) uma hipérbole, se $e > 1$.

O número e denomina-se *Excentricidade* da cônica e, intuitivamente, ele mede o *achatamento* da curva. Por exemplo, em uma elipse quando e se aproxima de 0, a curva se aproxima de uma circunferência (uma elipse sem achatamento).

Para identificar a natureza da cônica descrita por (3.4), seja D o pé da perpendicular baixada do ponto P à reta l , de modo que $\text{dist}(P; l) = \|\overrightarrow{PD}\|$. Efetuando uma translação seguida de uma rotação, se necessário for, podemos admitir que a reta l é o eixo y e que o foco está sobre o eixo x . Assim, o foco é $F(c, 0)$ e a equação (3.4) nos dá $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e|x|$, isto é,

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2cx + c^2 = -c^2. \quad (3.5)$$

De acordo com o valor de e , a equação (3.5) pode representar uma parábola, uma elipse ou uma hipérbole. Por exemplo, a cônica com um foco $F(0, 0)$, diretriz $l : x = -5/2$ e excentricidade $e = 2/3$ é a elipse de equação:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2}{3} |x + 5/2|,$$

isto é, $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.6

- Determine os valores de m e q de modo que a equação $x^2 + qy^2 + 2mx = 1$ represente:
 - uma circunferência
 - uma elipse
 - uma parábola
 - uma hipérbole
 - uma reta
 - duas retas
 - o conjunto vazio
 - um ponto
- Seja l a reta de equação $x = 2$ e considere o ponto $F(-1, 0)$. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tais que $\|\overrightarrow{FP}\| = e \cdot \text{dist}(P; l)$, sendo:
 - $e = 1$
 - $e = 1/2$
 - $e = 2$.

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.1

- $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.
 - $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
 - $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.
 - $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.
 - $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 12$ ou $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.
 - $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$.
- $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25$ e $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.
- $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.
- $5\sqrt{2}$.
- Consequência direta do Teorema de Pitágoras.
 - Decorre de (a).
- Os vértices do triângulo são $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(2, 0)$.

- (a) As bissetrizes são as retas: $x = 1$, $x - (1 + \sqrt{2})y = 0$ e $x + (1 + \sqrt{2})y = 2$.
- (b) O incentro do triângulo é o ponto $I(1, \sqrt{2} - 1)$.
- (c) A circunferência inscrita tem equação: $x^2 + y^2 - 2x - 2(1 - \sqrt{2})y + 1 = 0$.
7. Os vértices do triângulo são $A(23, 9)$, $B(11, -7)$ e $C(-1, 2)$ e o incentro do triângulo é o ponto $I(10, 0)$. A circunferência inscrita é governada pela equação:

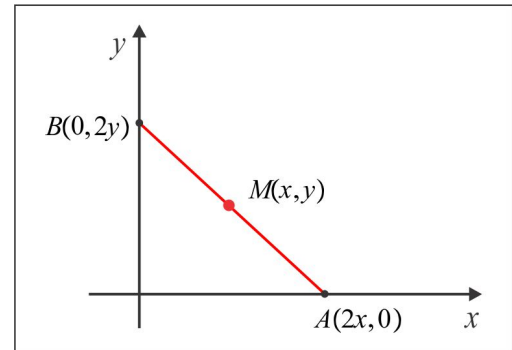
$$x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0.$$

8. Na figura abaixo ilustramos a situação gráfica, onde $M(x, y)$ representa o ponto médio da haste.

As extremidades são os pontos $A(2x, 0)$ e $B(0, 2y)$ e do Teorema de Pitágoras, resulta:

$$30^2 = (2x)^2 + (2y)^2 \implies x^2 + y^2 = 225$$

e, sendo assim, o ponto médio M descreve um arco da circunferência de centro na origem e raio $R = 15$.



9. Centro $C(2, -1)$ e raio $R = 3$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.2

1. (a) $x^2/36 + y^2/27 = 1$; $A(\pm 6, 0)$, $B(0 \pm \sqrt{27})$, $C(0, 0)$; $e = 1/2$.
- (b) Considerando os focos sobre a reta $x = 3$, temos:
- $$\frac{(x - 3)^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad A(3 \pm \sqrt{12}, 0), \quad F(3, \pm 2), \quad C(3, 0) \quad e \quad e = 1/2.$$
- (c) $x^2/25 + y^2/16 = 1$; $F(\pm 3, 0)$, $C(0, 0)$; $e = 3/5$.
- (d) $x^2/20 + (y - y_0)^2/36 = 1$.
- (e) $(x - 2)^2/25 + (y + 1)^2/16 = 1$; $A_1(7, -1)$, $A_2(-3, -1)$, $B_1(2, 3)$, $B_2(2, -5)$, $F_1(5, -1)$, $F_2(-1, -1)$, $C(2, -1)$; $e = 3/5$.
- (f) $4x^2 + 4y^2 - xy = 126$.
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$; $e = \frac{\sqrt{40}}{7}$.

3. $y = x \pm \sqrt{a^2 + b^2}$
4. $24\sqrt{3}$.
5. $84/5$ m.
6. A elipse $\frac{(x-4)^2}{20} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$.
7. $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$.
8. Centro $C(2, -3)$ e Focos $F(2 \pm \sqrt{7}, -3)$.
9. Os pontos $A(5/\sqrt{8}, \sqrt{7/8})$, $B(-5/\sqrt{8}, \sqrt{7/8})$, $C(-5/\sqrt{8}, -\sqrt{7/8})$ e $A(5/\sqrt{8}, -\sqrt{7/8})$.
10. Focos $F_1(0, \sqrt{7})$ e $F_1(0, -\sqrt{7})$; Centro $C(0, 0)$.
11. Se α e β são os ângulos determinados no vértice P pela normal, mostre que $\tan \alpha = \tan \beta = cy_0/b^2$.
12. $x + y = 2$ e $9x - 191y - 218 = 0$.
13. O primeiro passo é encontrar a equação da reta tangente à elipse, no ponto $P_0(x_0, y_0)$:

$$r_T : (b^2x_0)x + (a^2y_0)y = a^2y_0^2 + b^2x_0^2$$

e em seguida usar a fórmula (2.19) da distância de ponto à reta no plano xy , lembrando que os focos são $F(0, \pm c)$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.3

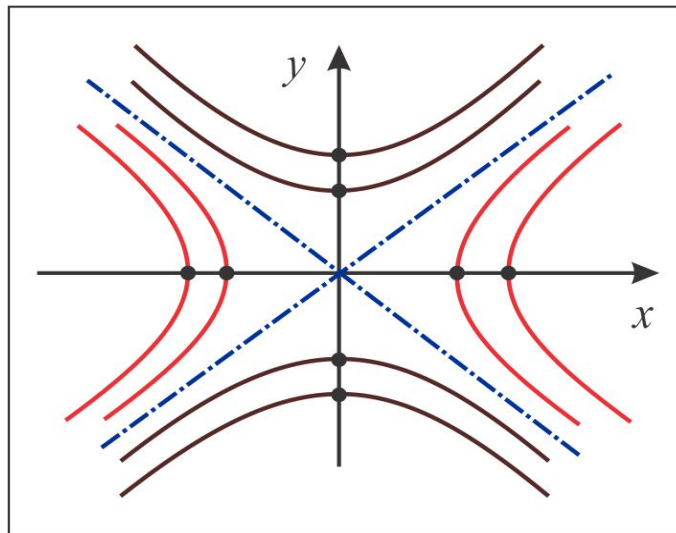
1. (a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; $V(\pm 3, 0)$; $C(0, 0)$; $e = 5/3$; $y = \pm 4x/3$.
 (b) $\frac{4(y+1)^2}{25} - \frac{4(x-2)^2}{119} = 1$; $V_1(2, \frac{3}{2})$; $V_2(2, -\frac{7}{2})$; $C(2, -1)$; $e = \frac{12}{5}$; $y = -1 \pm 5(x-2)/\sqrt{119}$.
 (c) $\frac{(y-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{20} = 1$; $F_1(2, -3)$; $F_2(2, 9)$; $C(2, 3)$; $y = 3 \pm (x-2)/5$.
 (d) $y^2 - 4x^2 = 4$; $F(0, \pm\sqrt{5})$; $C(0, 0)$; $e = \sqrt{5}/2$
 (e) $xy = -2$.
2. $A = 12$.
3. A hipérbole $4x^2 - y^2 = 36$.

4. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

5. $e = \sqrt{13}/3$, $C(1, -2)$, $F(1, -2 \pm \sqrt{13})$ e assíntotas: $3x + 2y = -1$ e $3x - 2y = 7$.

6. 13 e 5.

7. $\frac{9x^2}{25} - \frac{9y^2}{200} = 1$; $y = \pm 2\sqrt{2}x$.

8. Use a relação $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sec \alpha$, lembrando que $\tan \alpha = b/a$.9. No caso $k = 0$, temos o par de retas $y = \pm x$.10. Note que a hipérbole é descrita por $\bar{y} = \frac{7}{\bar{x}}$, sendo $\bar{x} = x - 3$ e $\bar{y} = y - 2$.**ESCREVENDO PARA APRENDER 3.4**

1. (a) $y^2 = 12x$, $V(0, 0)$.

(b) $x^2 = -8y$, $V(0, 0)$.

(c) $y^2 = -12(x - 1)$, $V(1, 0)$.

(d) $(x + 4)^2 = -4(y - 2)$, $V(-4, 2)$.

(e) $y^2 = -8(x - 2)$, diretriz $x = 4$.

(f) $(y + 1)^2 = -4(x - 4)$, Foco $F(3, -1)$, diretriz $x = 5$.

(g) $x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 4y - 4 = 0$.

(h) $y^2 - 6y - 12x - 15 = 0$.

(i) $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

(j) $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$.

2. O foco da parábola é $F(0, -4)$ e a diretriz é a reta $l : y = 4$. A equação da circunferência é $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$ e para concluir que esta circunferência é tangente à diretriz l , basta observar que $\text{dist}(C; l) = 5$.
3. A parábola $(y - 1)^2 = 4x$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.5

1. Admita a cônica sob a forma:

$$x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

e por substituição dos pontos na equação obtenha a hipérbole $9x^2 + 8xy - 13y^2 - x + 19y = 22$.

4. A parábola
- $\bar{x}^2 = 4\bar{y}$
- .

ESCREVENDO PARA APRENDER 3.6

1. (a) Se $q = 1$ a equação representa a circunferência $(x + m)^2 + y^2 = 1 + m^2$.
- (b) Se $q > 0$ a equação representa a *família* de elipses $(x + m)^2 + qy^2 = (1 + m^2)$.
- (c) Fazer
- (d) Se $q < 0$ a equação representa a *família* de hipérbolas $(x + m)^2 - |q|y^2 = (1 + m^2)$.
- (e) Fazer
- (f) Se $q = 0$ a equação representa o par de retas $x = -m \pm \sqrt{1 + m^2}$.

Os lugares geométricos: reta, ponto e parábola, como também o conjunto vazio, não podem ser representados pela equação dada.

- (a) a parábola $y^2 = -6x + 3$.
- (b) a elipse $3(x + 2)^2 + 4y^2 = 12$.
- (c) a hipérbole $3(x - 3)^2 - y^2 = 42$.



Introdução

No Capítulo 3 vimos que as cônicas no plano xy são governadas por uma equação do 2º grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F \quad (4.0)$$

a qual pode ser posta na forma cartesiana implícita:

$$f(x, y) = 0. \quad (4.1)$$

Neste capítulo estenderemos ao espaço tridimensional \mathbb{R}^3 alguns conceitos básicos considerados em conexão com a equação (4.1) e abordaremos alguns lugares geométricos, conhecidos por *Superfícies*, descritos por uma equação cartesiana implícita em três variáveis:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (4.2)$$

em especial os lugares geométricos governados por uma equação geral do 2º grau:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz = J. \quad (4.3)$$

A equação (4.2) de algumas superfícies podem conter apenas uma ou duas variáveis, como é o caso da equação $x = 1$, que representa um plano paralelo ao plano yz . Neste caso, temos $F(x, y, z) = x - 1$. Já a equação $x^2 + y^2 = 1$, quando considerada no espaço \mathbb{R}^3 , representa um *Cilindro Circular Reto*, como veremos adiante. Aliás, é oportuno ressaltar que no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 as equações que descrevem as cônicas do plano xy são acompanhadas da informação adicional $z = 0$. O mesmo ocorre com as cônicas do plano xz ($y = 0$) e do plano yz ($x = 0$). Assim, a equação da circunferência do plano xy de centro na origem e raio R é descrita, no espaço \mathbb{R}^3 , por:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0. \quad (4.4)$$

Nem toda equação do tipo (4.3) representa uma superfície; por exemplo a equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

não é satisfeita para valores reais de x , y e z , de modo que ela não representa superfície alguma do espaço \mathbb{R}^3 . Já a equação:

$$x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 0$$

tem $x = y = z = 0$ como uma única solução real e tem como lugar geométrico um ponto isolado, a origem. Dois problemas típicos que serão abordados neste capítulo:

► **PROBLEMA 1:** Uma reta desliza sobre a circunferência $x^2 + y^2 = R^2$ do plano xy , paralelamente ao eixo Oz , produzindo o cilindro de equação: $x^2 + y^2 = R^2$, ilustrado na Figura 4.4.

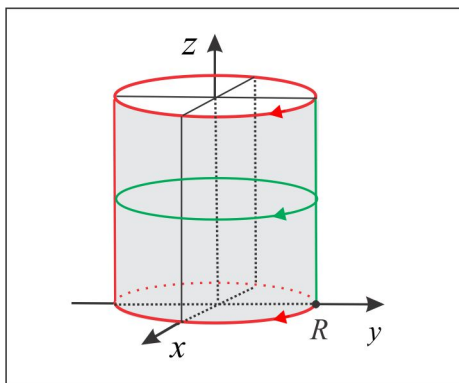


Figura 4.4: Cilindro: $x^2 + y^2 = R^2$.

► **PROBLEMA 2:** A superfície obtida por rotação, em torno do eixo Oz , do arco de circunferência $\gamma : y^2 + z^2 = R^2$, $y \geq 0$, $x = 0$, é a *Esfera* de equação $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ilustrada na Figura 4.5.

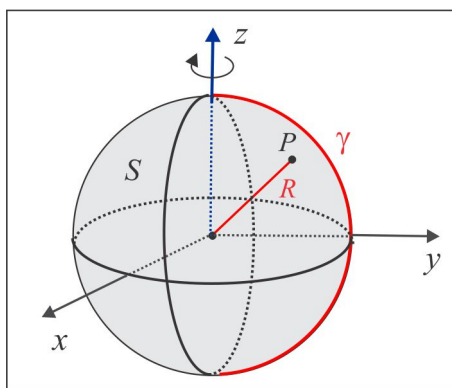


Figura 4.5: Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

4.1 Superfície Cilíndrica

Uma *Superfície Cilíndrica* (ou simplesmente *Cilindro*) é a superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana, denominada *diretriz*, paralelamente a uma reta fixa, denominada *geratriz*. Se a geratriz é ortogonal ao plano que contém a diretriz o cilindro denomina-se *Cilindro Reto*; além disso, se a diretriz é uma circunferência o cilindro diz-se *Circular Reto*.

Se \vec{v} é um vetor paralelo à reta geratriz, então para que um ponto $P(x, y, z)$ esteja sobre o cilindro S é necessário e suficiente que a reta que passa por P , paralela ao vetor \vec{v} , intercepte a curva diretriz γ . Em símbolos, temos:

$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \gamma \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

A Figura 4.6 ilustra uma superfície cilíndrica S com diretriz γ e geratriz g .

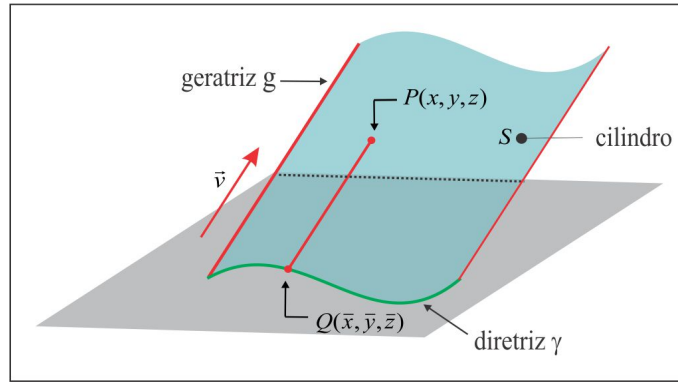


Figura 4.6: Superfície Cilíndrica.

EXEMPLO 4.1.1 Suponha que a geratriz do cilindro S seja a reta $g : x = t, y = t, z = t$, com vetor diretor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, e que a diretriz seja a parábola γ do plano xy dada por $y = x^2, z = 0$, como ilustra a Figura 4.7. Temos:

$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q(\bar{x}, \bar{y}, 0) \in \gamma \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \vec{0},$$

de modo que $\overrightarrow{PQ} = (\bar{x} - x)\vec{i} + (\bar{y} - y)\vec{j} - z\vec{k}$ e a relação $\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \vec{0}$ nos dá:

$$\bar{x} = x - z; \quad \bar{y} = y - z \quad \text{e} \quad \bar{x} - x - \bar{y} + y = 0. \quad (4.5)$$

Como o ponto $Q(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ está sobre a curva γ , segue que $\bar{y} = \bar{x}^2$ e de (4.5) resulta $(x - z)^2 = y - z$ e, assim, temos a equação do cilindro:

$$S : x^2 + z^2 - 2xz + z - y = 0.$$

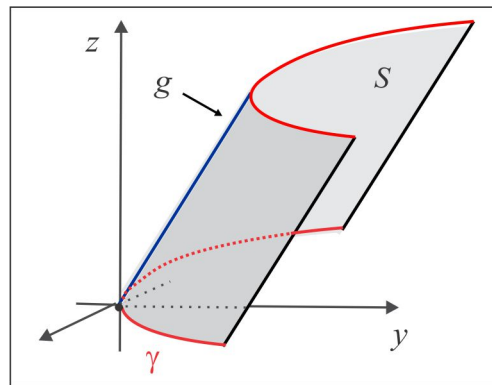


Figura 4.7: Cilindro do Exemplo 4.1.1.

EXEMPLO 4.1.2 (Cilindro Reto) A diretriz $\gamma : f(x, y) = 0, z = 0$, é uma curva do plano xy e a geratriz g é o eixo Oz . Neste caso, o cilindro S é gerado por uma reta paralela ao eixo Oz , que desliza ao longo da curva γ . Temos

$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q(x, y, 0) \in \gamma \Leftrightarrow f(x, y) = 0.$$

Logo, a equação do cilindro S é $f(x, y) = 0$. Observamos que a descrição do cilindro S e da diretriz g parecem ser a mesma, mas, há uma diferença substancial. Enquanto no cilindro a variável z é livre e, portanto, assume qualquer valor real, na curva g a variável z assume apenas o valor $z = 0$, já que γ é uma curva do plano xy , como ilustra a Figura 4.8.

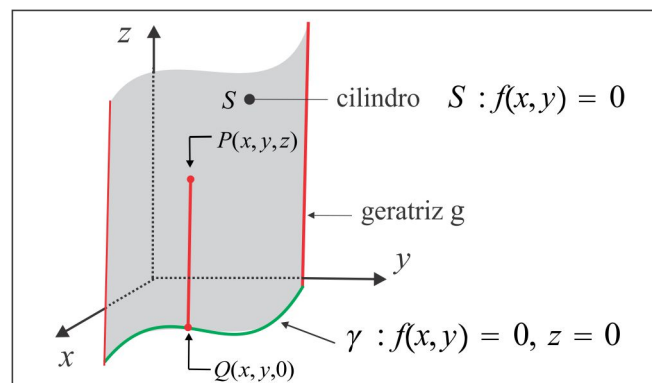


Figura 4.8: Cilindro Reto.

Uma equação onde figuram apenas duas das três variáveis cartesianas define um cilindro reto, com geratriz paralela ao eixo correspondente à variável que não figura na equação. Assim, temos:

- (a) a equação $F(x, y) = 0$ ou $y = f(x)$, na forma explícita, representa um cilindro com reta geratriz paralela ao eixo Oz e diretriz $\gamma : F(x, y) = 0, z = 0$;
- (b) a equação $G(x, z) = 0$ ou $x = g(z)$, na forma explícita, representa um cilindro com reta geratriz paralela ao eixo Oy e diretriz $\gamma : G(x, z) = 0, y = 0$;
- (c) a equação $H(y, z) = 0$ ou $z = h(y)$, na forma explícita, representa um cilindro com reta geratriz paralela ao eixo Ox e diretriz $\gamma : H(y, z) = 0, x = 0$.

EXEMPLO 4.1.3 A Figura 4.9 ilustra parte dos cilindros retos: (a) $S_1 : x = y^2$ (b) $S_2 : y = \sin z$. Observe a disposição dos eixos coordenados.

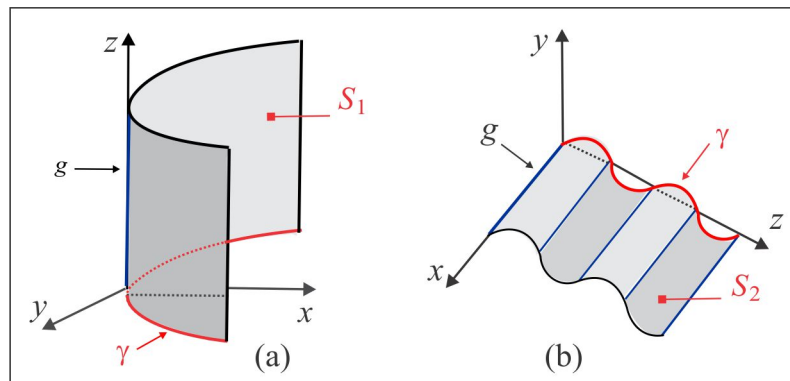


Figura 4.9: Cilindros Retos: (a) $x = y^2$ e (b) $y = \sin z$.

1. Esboce o gráfico das seguintes superfícies cilíndricas:

(a) $z = y^2$ (b) $y = |z|$ (c) $z^2 = x^3$ (d) $(z - 2)^2 + x^2 = 1$ (e) $x^2 - y + 1 = 0$.

2. Considere no plano xy a curva $\gamma : y - x^3 - 2 = 0$. Sob que condições o ponto $P(x, y, z)$ está no cilindro de diretriz γ e geratriz paralela ao eixo z ?

3. Em cada caso, determine a equação da superfície cilíndrica.

(a) Diretriz $x^2 = 4y$; $z = 0$ e geratriz $x = y = z/3$.

(b) Diretriz $x^2 + y = 1$; $z = 0$ e geratriz $x = 2z$; $y = 1$.

- (c) Diretriz $x^2 - z^2 = 1$; $y = 0$ e geratriz paralela ao vetor $\vec{v} = -\vec{j} + 2\vec{k}$.
4. Os cilindros $S_1 : z^3 = x$ e $S_2 : x^2 = y$ cortam-se segundo uma curva γ . Encontre a equação do cilindro S_3 com diretriz γ e geratriz paralela ao eixo x .

4.2 Superfície Cônica

Uma *Superfície Cônica* (ou simplesmente *Cone*) é a superfície gerada por uma reta (*geratriz*) que se move de modo que sempre passa por uma curva plana fixa γ (*diretriz*) e por um ponto fixo V (*vértice*) não situado no plano da curva. Quando a geratriz for perpendicular ao plano que contém a curva diretriz o cone será denominado *Cone Reto*. Na Figura 4.10 ilustramos uma superfície cônica S com diretriz γ e vértice V , onde vemos um ponto $P(x, y, z)$ sobre a superfície S e a reta que passa por P e V interceptando a diretriz γ no ponto $Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

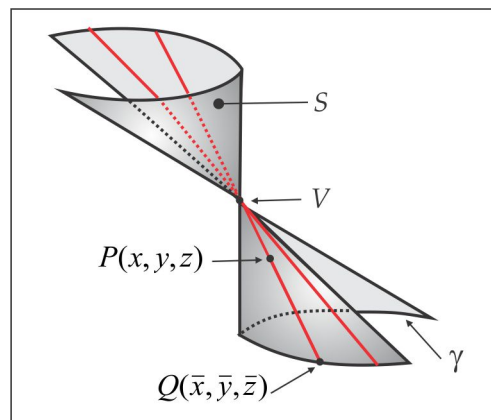


Figura 4.10: Superfície Cônica.

Assim, a equação do cone S é deduzida observando que:

$$P(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \gamma \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PV} \times \overrightarrow{QV} = \vec{0}.$$

EXEMPLO 4.2.1 Se a diretriz de um cone S de vértice $V(0, 0, 1)$ é a parábola no plano xy dada por

$\gamma : y = x^2, z = 0$, usando a relação $\overrightarrow{PV} \times \overrightarrow{QV} = \vec{0}$ e notando que $\bar{y} = \bar{x}^2$ e $\bar{z} = 0$, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} y + \bar{x}^2(z - 1) = 0 \\ x + \bar{x}(z - 1) = 0 \\ x\bar{x}^2 - \bar{x}y = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

e resolvendo (4.6), encontramos $x^2 + yz - y = 0$, que é a equação do cone S .

4.2.1 Cone de Revolução

Uma superfície cônica particular é aquela gerada pela rotação de uma reta g (*geratriz*) em torno de uma reta L (*eixo*), onde as retas g e L se interceptam em um ponto V que é o vértice do cone. A Figura 4.11 ilustra um cone de revolução S , onde observamos que a interseção do cone com um plano perpendicular ao eixo é uma circunferência. Representando por \vec{v}_L e \vec{v}_g os vetores diretores do eixo L e da geratriz g , respectivamente, então uma condição necessária e suficiente para que um ponto $P(x, y, z)$ esteja sobre o cone S é que:

$$|\cos(\vec{v}_L, \vec{v}_g)| = |\cos(\vec{v}_L, \overrightarrow{VP})| \quad (4.7)$$

e a equação (4.7) descreve o cone S .

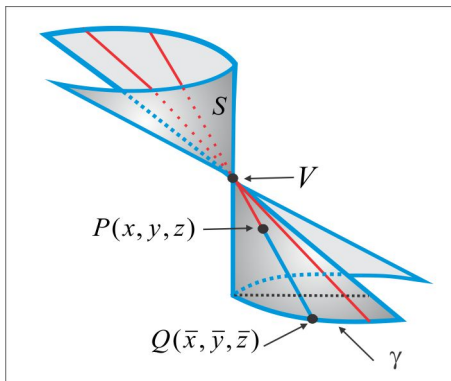


Figura 4.11: Cone de Revolução.

1. Determine a equação do cone obtido por rotação da reta $y = ax + b, z = 0$, em torno do eixo Oy .
2. Determine a equação do cone de revolução gerado pela rotação da reta $x = t, y = 2t, z = 3t$ em torno da reta $-x = y = z/2$.

3. Determine a equação do cone de revolução com eixo x , vértice na origem e geratriz formando com o eixo um ângulo de $\pi/3$ rad.

4.3 Superfície de Revolução

A Figura 4.12 ao lado ilustra uma superfície de revolução S obtida pela rotação de uma curva γ (*geratriz*), em torno de um eixo L (*eixo de revolução*). Para chegar à equação da superfície S , deixe-nos considerar por um ponto $P(x, y, z)$ de S um plano perpendicular ao eixo de rotação, cuja interseção com a superfície S é uma circunferência. Sejam C e Q as interseções desse plano com o eixo L e com a geratriz γ , respectivamente, de modo que a equação que descreve a superfície S é:

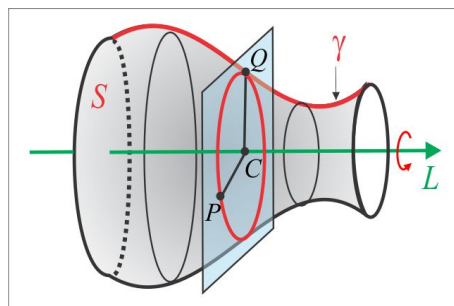


Figura 4.12: Superfície de Revolução

$$\|\vec{CP}\| = \|\vec{CQ}\|. \quad (4.8)$$

Do ponto de vista gráfico, o que caracteriza uma superfície ser de revolução são as seções circulares determinadas nela por planos perpendiculares ao eixo de rotação.

A equação cartesiana de S será determinada em um caso particular e deixaremos as variantes desse caso para o leitor. Suponhamos, então, que a geratriz seja uma curva γ do plano yz descrita por uma equação do tipo $F(y, z) = 0$ ou, como é mais comum, na forma explícita $y = f(z)$, e que o eixo de rotação seja o eixo Oz . Então, as interseções C e Q são: $C(0, 0, z)$ e $Q(0, \bar{y}, z)$ e da equação vetorial (4.8) resulta $\sqrt{x^2 + y^2} = |\bar{y}|$, isto é $\bar{y} = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Como o ponto $Q(0, \bar{y}, z)$ está sobre a geratriz, temos $F(\bar{y}, z) = 0$ e, conseqüentemente, a equação da superfície S é:

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (4.9)$$

4.3.1 Geratriz na Forma Explícita

Como consequência da equação geral (4.9), vamos identificar a superfície de revolução S em situações particulares.

► **SITUAÇÃO 1:** A curva geratriz γ é o gráfico de uma função contínua $y = f(z)$ e o eixo de rotação é o eixo Oz , como ilustra a Figura 4.13. Pelo ponto $P(x, y, z)$ da superfície consideramos o plano α ortogonal ao eixo de rotação Oz , o qual intercepta a superfície e o eixo de rotação nos pontos Q e C , respectivamente. Os pontos P , Q e C estão sobre o plano α e, portanto, têm a mesma coordenada z . Temos, então, $C(0, 0, z)$ e $Q(0, \bar{y}, z)$, com $\bar{y} = f(z)$, e da equação vetorial (4.8), resulta:

$$S : x^2 + y^2 = [f(z)]^2 \quad (4.10)$$

que é a equação que descreve, neste caso, a superfície de revolução S .

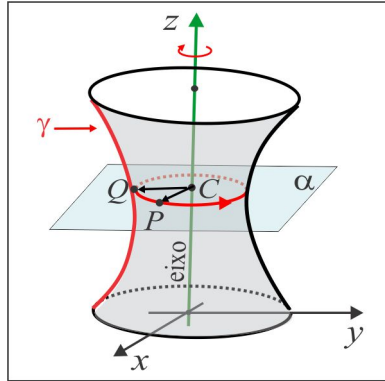


Figura 4.13: Superfície $S : x^2 + y^2 = [f(z)]^2$.

► **SITUAÇÃO 2:** Se a geratriz γ é o gráfico de uma função contínua $z = f(y)$ e a rotação é processada em torno do eixo Oy , então a superfície S é descrita pela equação:

$$S : x^2 + z^2 = [f(y)]^2 \quad (4.11)$$

► **SITUAÇÃO 3:** No caso em que a geratriz γ do plano xy é identificada com o gráfico de uma bijeção contínua $y = f(x)$, e o eixo de rotação é o eixo Oy , primeiro invertemos a função f e escrevemos a geratriz sob a forma $\gamma : x = f^{-1}(y)$ e, assim, a equação da superfície de revolução S é:

$$S : x^2 + z^2 = [f^{-1}(y)]^2 \quad (4.12)$$

EXEMPLO 4.3.1 Sejam S_1 e S_2 as superfícies geradas pela rotação da curva $z = \sqrt{y}$, $y \geq 0$, $x = 0$, em torno do eixo Oz e em torno do eixo Oy , respectivamente, ilustradas graficamente na Figura 4.14.

(a) A geratriz da superfície S_1 é a curva $\gamma_1 : y = f_1(z) = z^2$, $x = 0$, e, de acordo com (4.10), a superfície S_1 é governada pela equação: $S_1 : x^2 + y^2 = z^4$.

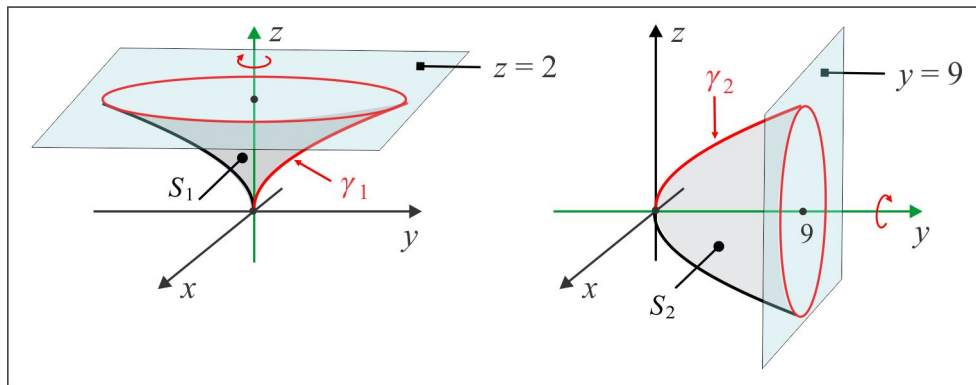


Figura 4.14: Superfícies S_1 e S_2 do Exemplo 4.3.1

A interseção da superfície S_1 com o plano (horizontal) $z = 2$ é a circunferência $x^2 + y^2 = 16$, situada no plano $z = 2$, de centro $C(0, 0, 2)$ e raio $R = 4$.

(b) A geratriz da superfície S_2 é a curva $\gamma_2 : z = f_2(y) = \sqrt{y}$, $x = 0$, e, de acordo com (4.11), a superfície S_2 é governada pela equação: $S_2 : x^2 + z^2 = y$.

A interseção da superfície S_2 com o plano (vertical) $y = 9$ é a circunferência $x^2 + z^2 = 9$, situada no plano $y = 9$, de centro $C(0, 9, 0)$ e raio $R = 3$.

EXEMPLO 4.3.2 A Figura 4.15 ilustra a superfície de revolução S gerada pela rotação da curva $\gamma : z = f(y) = y^3$, em torno do eixo Oz .

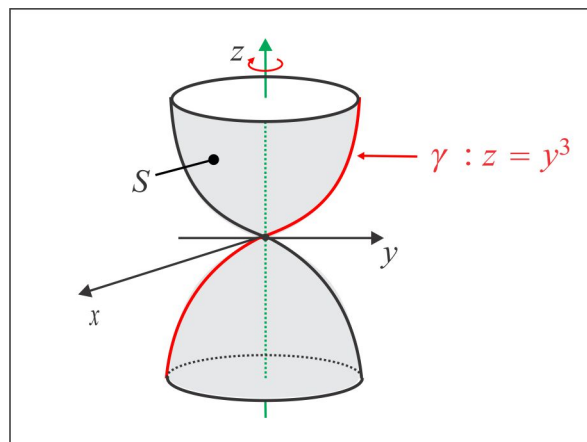


Figura 4.15: Superfície S do Exemplo 4.3.2

A teoria nos ensina que, neste caso, devemos inverter a função f e escrever a geratriz γ sob a forma $\gamma : y = z^{1/3}$. De acordo com (4.12) a equação da superfície S é: $S : x^2 + y^2 = z^{2/3}$.

OBSERVAÇÃO 4.3.3 A equação $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$ representa uma superfície de revolução em torno do eixo Ox . O problema de encontrar uma geratriz consiste em "zerar" uma das variáveis do termo quadrático $y^2 + z^2$. Por exemplo, com $z = 0$, encontramos a geratriz $y = \pm f(x)$.

4.3.2 Quádricas de Revolução

Denomina-se *Quádrlica* à superfície que pode ser descrita por uma equação do 2º grau nas variáveis x, y e z , do tipo (4.3). Antes de apresentarmos as quádrlicas num contexto um pouco mais geral, vejamos por meio de exemplos algumas quádrlicas de revolução.

EXEMPLO 4.3.4 (A Esfera) O arco de circunferência $y^2 + z^2 = R^2$, $y \geq 0$, $x = 0$, gira em torno do eixo Oz produzindo a superfície S conhecida por *Esfera*. A geratriz é dada por $\gamma : y = f(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$ e usando (4.10) encontramos a equação da esfera S :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

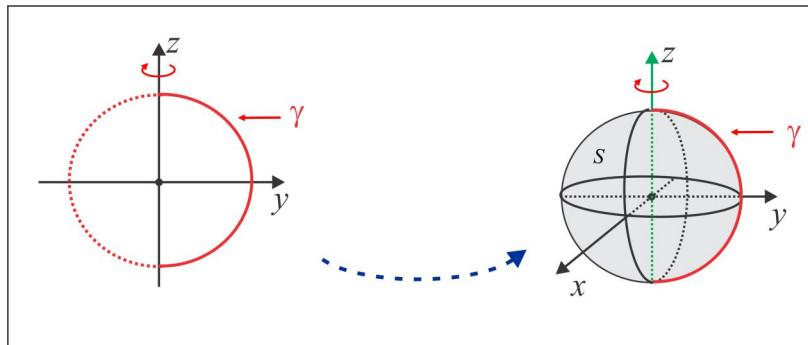


Figura 4.16: A Esfera.

EXEMPLO 4.3.5 (O Elipsoide de Revolução) A superfície S obtida pela rotação da elipse

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad x = 0,$$

em torno do eixo Oy recebe o nome *Elipsoide de Revolução* e está ilustrado na Figura 4.17.

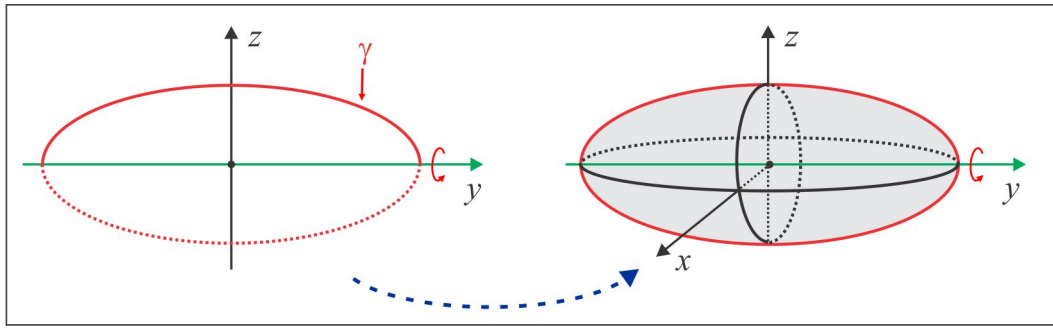


Figura 4.17: O Elipsóide de Revolução.

A geratriz é a elipse $F(y, z) = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$, de modo que a equação do Elipsóide de Revolução é $F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$, isto é:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (4.13)$$

Olhando a geratriz sob a forma $z = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2} = f(y)$ usamos o modelo padrão $x^2 + z^2 = [f(y)]^2$ e chegamos à equação (4.13).

EXEMPLO 4.3.6 (Os Hiperbolóides de Revolução) A hipérbole $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$, $x = 0$, do plano yz , gira em torno do eixo Oz . A superfície resultante é conhecida por Hiperbolóide de Revolução de uma Folha, ilustrado na Figura 4.18. A geratriz g é descrita por $F(x, y) = \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$ ou, sob forma explícita $y = (a/b)\sqrt{b^2 + z^2} = f(z)$. A equação da superfície é $F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$, ou $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$. Uma substituição direta nos dá:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

No caso em que a rotação é realizada em torno do eixo Oy , a superfície resultante recebe o nome de Hiperbolóide de Revolução de duas Folhas, ilustrada na Figura 4.19. Neste caso, olhamos a geratriz g sob a forma $z = (b/a)\sqrt{y^2 - a^2} = f(y)$ e usamos a forma padrão $x^2 + z^2 = [f(y)]^2$ e chegamos à equação da superfície:

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

OBSERVAÇÃO 4.3.7 (Sobre os Hiperbolóides) Assim como no Elipsóide, nos Hiperbolóides duas das três variáveis têm o mesmo denominador, o que indica se tratar de uma superfície de revolução. No

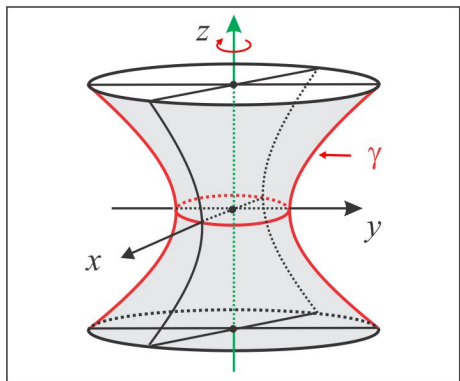


Figura 4.18: Hiperboloide de uma Folha.

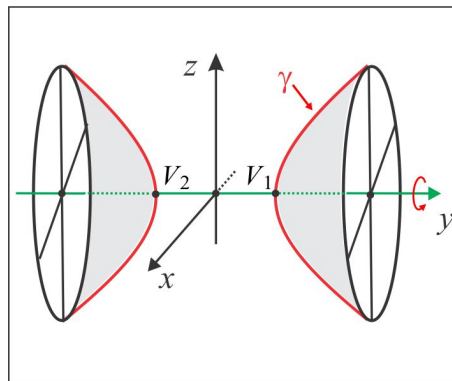


Figura 4.19: Hiperboloide de duas Folhas

Hiperboloide de uma folha o termo com sinal negativo corresponde ao eixo de rotação; no Hiperboloide de duas folhas, o eixo de rotação corresponde à variável com o sinal positivo. Outra diferença entre os dois hiperboloides diz respeito às interseções com os eixos coordenados. Enquanto o hiperboloide de uma folha não toca o eixo de rotação (no Exemplo 4.3.6 o eixo Oz), o hiperboloide de duas folhas toca o eixo de rotação Oy nos pontos $V_1(0, a, 0)$ e $V_2(0, -a, 0)$.

EXEMPLO 4.3.8 (O Paraboloides de Revolução) A superfície S obtida pela rotação da parábola $y^2 = 4pz, x = 0$, em torno do eixo Oz é conhecida por Paraboloides de Revolução, ilustrado na Figura 4.20. Neste caso, a geratriz é dada por: $F(y, z) = y^2 - 4pz = 0$, e a equação da superfície S é, portanto,

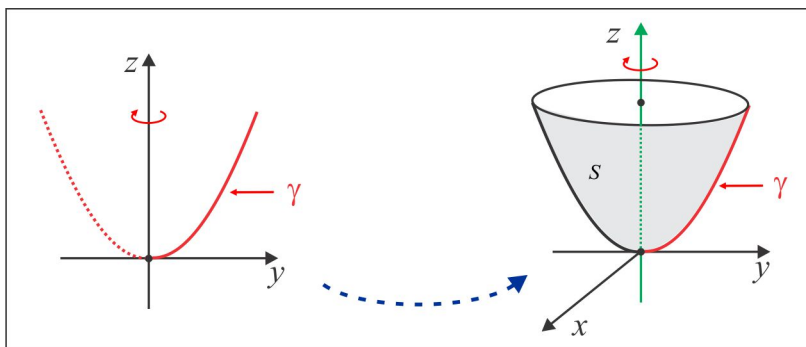
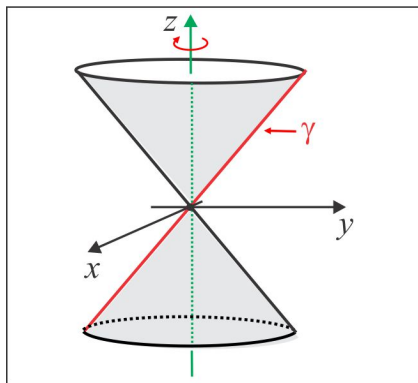
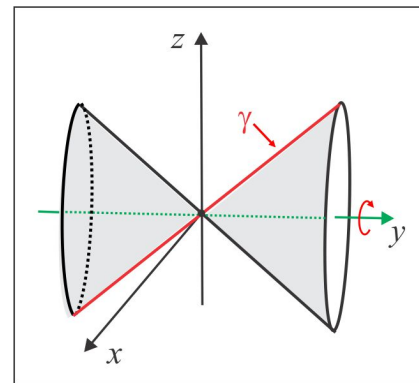


Figura 4.20: O Paraboloides de Revolução.

$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, isto é:

$$x^2 + y^2 = 4pz.$$

EXEMPLO 4.3.9 (O Cone de Revolução) A reta $g : y = az, x = 0$, gira em torno do eixo Oz produzindo o Cone de Revolução, com vértice na origem, ilustrado na Figura 4.3.9. A geratriz está na

Figura 4.21: Cone: $x^2 + y^2 = a^2 z^2$.Figura 4.22: Cone: $a^2 x^2 + a^2 z^2 = y^2$.

forma explícita $y = f(z) = az$ e a equação do Cone é $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$, isto é:

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Se a rotação da reta g fosse em torno do eixo Oy , como ilustra a Figura 4.22, a equação do Cone resultante seria $x^2 + z^2 = [f^{-1}(y)]^2$, isto é, $x^2 + z^2 = y^2/a^2$, ou seja:

$$a^2 x^2 + a^2 z^2 = y^2,$$

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.3

1. Em cada caso, determine a equação da esfera que atende à condição especificada.
 - (a) Diâmetro AB , sendo $A(-1, 3, 4)$ e $B(1, 1, 3)$.
 - (b) Centro $C(4, -1, -2)$ e tangente ao plano xy .
 - (c) Centro $C(-2, 3, 4)$ e tangente ao eixo z .
 - (d) Centro $C(1, 0, 4)$ e tangente ao plano $x + 2y + 2z = 0$.

2. Em cada caso, determine a equação e esboce o gráfico da superfície de revolução gerada pela rotação da curva γ em torno do eixo indicado.
 - (a) $\gamma : x^2 + 2y = 6, z = 0$; eixo Oy .
 - (b) $\gamma : y^2 = 2z, x = 0$; eixo Oy .
 - (c) $\gamma : y^2 - 2z^2 + 4z = 6, x = 0$; eixo Oz .

- (d) $\gamma : y = x^3, z = 0$; eixo Ox .
- (e) $\gamma : z = e^x, y = 0$; eixo Oz .
- (f) $\gamma : yz = 1, x = 0$; eixo Oz .
- (g) $\gamma : y = R, x = 0$; eixo Oz .
- (h) $\gamma : x^2 = 4y, z = 0$; eixo Oy .
- (i) $\gamma : x^2 + 4z^2 = 16, y = 0$; eixo Ox .
- (j) $\gamma : y = \text{sen } x, z = 0$; eixo Ox .
3. Em cada caso, encontre a geratriz γ e o eixo de rotação L da superfície de revolução S .
- (a) $S : x^2 + y^2 - z^2 = 4$.
- (b) $S : x^2 + y^2 = |z|$.
- (c) $S : x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$.
4. A superfície de revolução S , gerada pela rotação da circunferência $\gamma : x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0, z = 0$, em torno do eixo Ox , recebe o nome de *Toro de Revolução*. Encontre a equação de S e faça um esboço do gráfico.
5. Repita o exercício precedente com a circunferência no plano yz de centro $C(0, 4, 0)$ e raio $R = 2$, que gira em torno do eixo z .
6. Identifique e esboce o gráfico do conjunto dos pontos $P(x, y, z)$ do \mathbb{R}^3 , cujas coordenadas satisfazem às condições sugeridas:
- (a) $x^2 + 4z^2 = 1, y = 1$.
- (b) $x^2 + z^2 = 4, y = 2$.
- (c) $x^2 + y^2 = 1$.
- (d) $x^2 - z^2 = 1, y = 1$.
- (e) $x^2 + 4z^2 = y, z = 1$.
7. Os eixos Oy e Oz sofrem uma rotação de um ângulo $\theta = \pi/4$, no plano yz , enquanto o eixo Ox permanece fixo. Determine as coordenadas dos pontos $P(1, 2, \sqrt{2})$ e $Q(3, \sqrt{2}, -1)$ no novo sistema de coordenadas.

8. Determine os valores de k , de modo que a interseção do plano $x + ky = 1$ com o hiperbolóide de duas folhas $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ seja:
- (a) uma elipse (b) uma hipérbole.

4.4 Equações & Gráficos

As quádricas de revolução apresentadas nos Exemplos 4.3.4, ..., 4.3.9 são superfícies particulares descritas por uma equação do 2º grau nas variáveis x , y e z . Para associarmos uma superfície a uma equação ou vice-versa, é fundamental observarmos dois aspectos: primeiro a equação padrão da quádrica e, segundo, a disposição dos eixos coordenados. Na visualização gráfica de uma dada superfície S governada pela equação:

$$S : F(x, y, z) = 0 \quad (4.14)$$

devemos observar os seguintes itens:

► **INTERSEÇÃO COM OS EIXOS COORDENADOS:** As interseções com os eixos coordenados, se houver alguma, são os pontos:

(i) No eixo Ox : $P(x, 0, 0)$, sendo x solução da equação $F(x, 0, 0) = 0$.

(ii) No eixo Oy : $Q(0, y, 0)$, sendo y solução da equação $F(0, y, 0) = 0$.

(ii) No eixo Oz : $R(0, 0, z)$, sendo x solução da equação $F(0, 0, z) = 0$.

► **TRAÇOS SOBRE OS PLANOS COORDENADOS:** Os traços sobre os planos coordenados, se houver, são as curvas:

(i) $\gamma_1 : F(x, y, 0) = 0$, no plano xy

(ii) $\gamma_2 : F(x, 0, z) = 0$, o plano xz

(iii) $\gamma_3 : F(0, y, z) = 0$, no plano yz .

► **SIMETRIA EM RELAÇÃO À ORIGEM, AOS PLANOS E EIXOS COORDENADOS:** Dois pontos no espaço P e Q são *simétricos* em relação a um plano α se, e somente se, o segmento PQ é ortogonal ao plano α e é dividido ao meio por este plano. Uma superfície S é simétrica em relação a um plano

α se dado um ponto P na superfície, existe um ponto Q na superfície S , simétrico de P em relação ao plano α . A simetria em relação a uma reta e em relação à origem se estabelece de modo similar. Por exemplo, o ponto Q é o simétrico do ponto P em relação à reta r se, e somente se, a reta r divide o segmento PQ ao meio e ortogonalmente.

- (a) Os pontos $Q_1(x, y, -z)$, $Q_2(x, -y, z)$ e $Q_3(-x, y, z)$ são os simétricos de um dado ponto $P(x, y, z)$ em relação aos planos coordenados xy , xz e yz , respectivamente.

Se a equação de uma superfície permanece inalterada ao mudar o sinal de uma das variáveis, então a superfície é simétrica em relação ao plano coordenado a partir do qual aquela variável é medida.

- (b) Os pontos simétricos de um dado ponto $P(x, y, z)$ em relação aos eixos coordenados Ox , Oy e Oz são, respectivamente, $Q_4(x, -y, -z)$, $Q_5(-x, y, -z)$ e $Q_6(-x, -y, z)$

Se a equação de uma superfície permanece inalterada ao mudar os sinais de duas das variáveis, então a superfície é simétrica em relação ao eixo coordenado correspondente à variável não modificada.

- (c) O simétrico do ponto $P(x, y, z)$ em relação à origem é o ponto $Q(-x, -y, -z)$.

Se a equação de uma superfície permanece inalterada ao mudar o sinal das tres variáveis, então a superfície é simétrica em relação à origem.

► **SEÇÕES POR PLANOS PARALELOS AOS PLANOS COORDENADOS:** As seções por planos paralelos aos planos coordenados, por exemplo os planos $z = k$, paralelos ao plano xy , são as possíveis curvas descritas por:

$$F(x, y, k) = 0, \quad z = k.$$

► **EXTENSÃO DA SUPERFÍCIE:** A extensão da superfície S descrita pela equação (4.14) é estabelecida ao explicitar uma das variáveis, por exemplo z , em função de x e y . Obtemos uma equação do tipo $z = f(x, y)$ e o domínio da função f nos dá os valores reais que as variáveis x e y podem assumir.

EXEMPLO 4.4.1 Vamos discutir a superfície S descrita pela equação:

$$S: x + z^2 - 1 = 0.$$

Já sabemos se tratar de um cilindro reto com diretriz $\gamma: x = 1 - z^2, y = 0$, do plano xz , e geratriz o eixo Oy . A equação $x + z^2 - 1 = 0$ não tem solução real, se $x = z = 0$, de modo que a superfície não toca o eixo Oy . As interseções com os eixos Ox e Oz são os pontos $Q_2(1, 0, 0)$ e $Q_1(0, 0, \pm 1)$, respectivamente. Os planos $y = k$, interceptam a superfície na parábola

$$x = 1 - z^2, \quad y = k$$

e os traços nos planos xy e yz são, respectivamente, a reta $x = 1, z = 0$ e o par de retas $x = 0, z = \pm 1$. A equação não é alterada ao trocar os sinais das variáveis y ou z e isto indica que a superfície é simétrica em relação ao eixo Ox e em relação aos planos xy e xz . Por fim, vemos que não há restrições aos valores assumidos pelas variáveis y e z , enquanto a variável x não pode assumir valores maiores do que 1, isto é, a superfície está situada abaixo do plano $x = 1$ e não tem extensão definida. A Figura 5.k ilustra graficamente uma porção da superfície S .

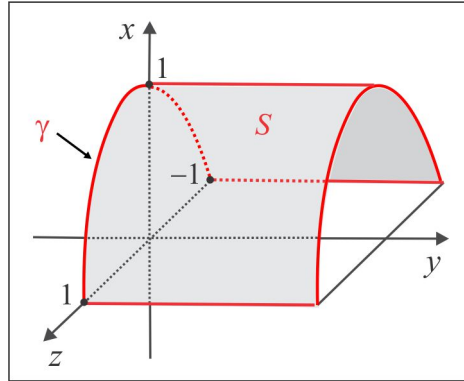


Figura 4.23: Superfície $S : x + z^2 - 1 = 0$.

As quádricas de revolução dos Exemplos 4.3.4, 4.3.5 e 4.3.6 estão inseridas no modelo mais geral:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.15)$$

onde a, b e c são números reais positivos, conhecidas por *Quádricas Cêntricas*. A ilustração gráfica de cada quádrica será, agora, consequência da discussão da respectiva equação.

► **O ELIPSOIDE:** Todos os coeficientes em (4.15) são positivos. A forma padrão do Elipsoide é, portanto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.16)$$

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O elipsoide (4.16) intercepta os eixos Ox , Oy e Oz nos pontos $A(\pm a, 0, 0)$, $B(0, \pm b, 0)$ e $C(0, 0, \pm c)$, respectivamente.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando na equação (4.16) $z = 0$, vemos que o traço do elipsoide no plano xy é a elipse:

$$\gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Os traços nos planos xz e yz são determinados de forma similar e encontramos, com $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente, as elipses:

$$\gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_3 : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.16) não é alterada ao trocar o sinal de x , y ou z . Isto indica que o elipsoide é simétrico em relação à origem, aos planos e eixos coordenados.

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos $z = k$, com $|k| < c$, são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2(1 - k^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - k^2/c^2)} = 1, \quad z = k,$$

As seções pelos planos $x = m$, com $|m| < a$, são as elipses:

$$\frac{y^2}{b^2(1 - m^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - m^2/a^2)} = 1, \quad x = m,$$

e pelos planos $y = n$, com $|n| < b$, são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2(1 - n^2/b^2)} + \frac{z^2}{c^2(1 - n^2/b^2)} = 1, \quad y = n.$$

A Figura 4.24 ilustra o elipsoide (4.16), o qual se assemelha ao elipsoide de revolução (4.13).

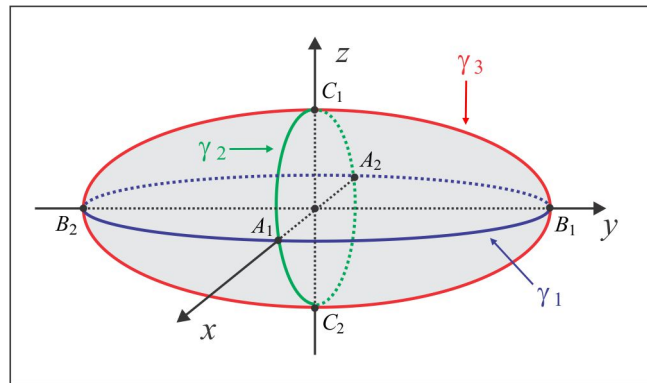


Figura 4.24: O Elipsoide.

(v) **Extensão da Superfície:** Da equação (4.16), deduzimos que:

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b \quad \text{e} \quad |z| \leq c$$

e o elipsoide está contido no paralelepípedo determinado pelos planos $x = \pm a$, $y = \pm b$ e $z = \pm c$ e a superfície não se expande além desses planos.

► **O HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA:** Dois coeficientes em (4.15) são positivos e um é negativo. Existem várias possibilidades e vamos comentar o caso da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4.17)$$

que servirá de modelo para os outros dois casos:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O hiperboloide (4.17) não intercepta o eixo Oz , tendo em vista que a substituição de x e y por 0 em (4.17) nos conduz à equação $z^2 = -c^2$, sem solução real para z . Por outro lado, com os eixos Ox , Oy as interseções são os pontos nos pontos $A(\pm a, 0, 0)$ e $B(0, \pm b, 0)$, respectivamente.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando na equação (4.17) $z = 0$, vemos que o traço do hiperboloide no plano xy é a elipse:

$$\gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Os traços nos planos xz e yz são determinados de forma similar e encontramos, com $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente, as hipérbolas:

$$\gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_3 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.17) não é alterada ao trocar o sinal de x , y ou z . Isto indica que o hiperboloide é simétrico em relação à origem, aos planos e eixos coordenados.

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos $z = k$, com $|k| < c$, são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2(1+k^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1+k^2/c^2)} = 1, \quad z = k,$$

As seções pelos planos $x = m$, com $|m| < a$, são as hipérbolas:

$$\frac{y^2}{b^2(1-m^2/a^2)} - \frac{z^2}{c^2(1-m^2/a^2)} = 1, \quad x = m,$$

e pelos planos $y = n$, com $|n| < b$, são as hipérbolas:

$$\frac{x^2}{a^2(1+n^2/b^2)} - \frac{z^2}{c^2(1+n^2/b^2)} = 1, \quad y = n.$$

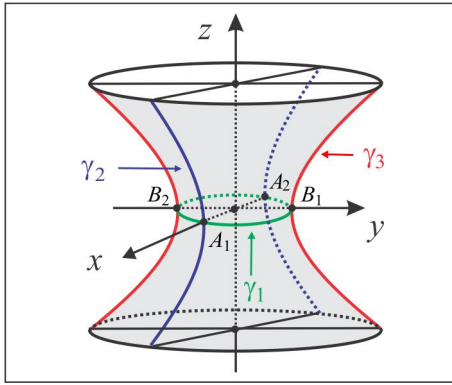


Figura 4.25: O Hiperboloide de uma Folha.

A Figura 4.25 ilustra graficamente uma porção do hiperboloide (4.17), o qual se assemelha ao hiperboloide de revolução da Figura 4.18, onde se tem $a = b$.

(v) **Extensão da Superfície:** Da equação (4.17), deduzimos que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2},$$

de modo que, à medida que $|z| \rightarrow \infty$, o hiperboloide se expande arbitrariamente.

► **O HIPERBOLOIDE DE DUAS FOLHA:** Dois coeficientes em (4.15) são negativos e um é positivo. Existem várias possibilidades e como forma representativa vamos comentar o caso da equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.18)$$

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O hiperboloide (4.18) intercepta apenas o eixo Ox , nos pontos $A(\pm a, 0, 0)$.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando na equação (4.18) $z = 0$, vemos que o traço do hiperboloide no plano xy é a hipérbole:

$$\gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

O traço no plano xz é determinado considerando $y = 0$ na equação (4.18). Encontramos a hipérbole:

$$\gamma_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Não há traço sobre o plano yz , tendo em vista que considerando $x = 0$ em (4.18), a equação resultante não tem solução real para y e z .

(iii) **Simetria:** A equação (4.18) não é alterada ao trocar o sinal de x , y ou z . Isto indica que o hiperboloide de duas folhas é simétrico em relação à origem, aos planos e eixos coordenados.

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos $x = k$, com $|k| > a$, paralelo ao plano yz , são as elipses:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 + k^2/a^2, \quad x = k.$$

Os planos $x = k$, com $|k| < a$, não interceptam o hiperboloide (4.18) e isto indica que o hiperboloide é composto de duas partes distintas, as folhas.

(v) **Extensão da Superfície:** Vemos da última equação que à medida que $k \rightarrow \infty$ o hiperboloide de duas folhas se expandem arbitrariamente.

A Figura 4.26 ilustra graficamente uma porção do hiperboloide de duas folhas (4.18), o qual se assemelha ao hiperboloide de revolução da Figura 4.19, onde se tem $a = b$.

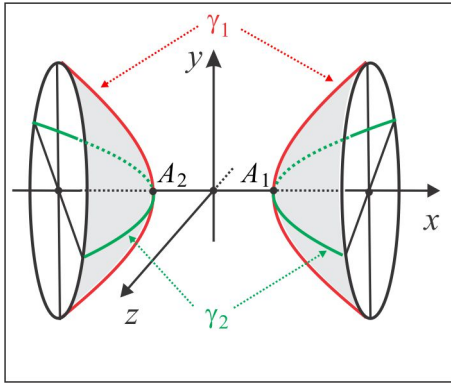


Figura 4.26: O Hiperboloide de duas Folha.

► **O CONE QUÁDRICO:** A quádrlica descrita pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (4.19)$$

é conhecida por *Cone Quádrico* e a equação (4.19) será usada como modelo representativo para os outros dois casos:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O cone (4.19) intercepta os eixos Ox , Oy e Oz na origem, o vértice do cone.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Sobre o plano xy o traço é a origem. Considerando $y = 0$ na equação (4.19), vemos que o traço do cone no plano xz é o par de retas:

$$\gamma_1 : z = \pm(c/a)x.$$

e no plano yz consideramos $x = 0$ na equação (4.19) e encontramos o par de retas como traço:

$$\gamma_2 : z = \pm(c/b)y.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.18) não é alterada ao trocar o sinal de x , y ou z . Isto indica que o hiperboloide de duas folhas é simétrico em relação à origem, aos planos e eixos coordenados.

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos $z = k$, paralelos ao plano xy , são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2/c^2, \quad z = k. \quad (4.20)$$

Os planos $x = k$ e $y = k$ interceptam o cone (4.19), respectivamente, nas hipérbolas:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2/b^2, \quad y = k \quad \text{e} \quad -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2/a^2, \quad x = k.$$

(v) **Extensão da Superfície:** A partir da equação (4.20) deduzimos que à medida que $k \rightarrow \infty$ a elipse tem seus eixos aumentados e, conseqüentemente, o cone se expande arbitrariamente.

A Figura 4.27 ilustra graficamente uma porção do cone (4.19), o qual se assemelha ao cone de revolução da Figura 4.3.9, onde se tem $a = b$.

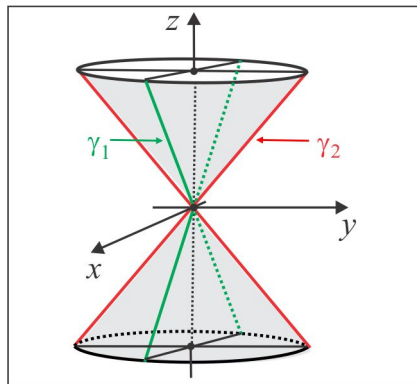


Figura 4.27: O Cone Quádrico.

OBSERVAÇÃO 4.4.2 (Cone x Hiperboloide 1) Vamos fazer uma comparação entre a equação (4.17) do hiperboloide de uma folha com a equação representativa do Cone Quádrico (4.19). A seção no cone pelo plano $\alpha : y = mx$ é o par de retas concorrentes:

$$\sqrt{(1/a^2 + m^2/b^2)} x = \pm z/c, \quad y = mx \quad (4.21)$$

que são as assíntotas da hipérbole γ cortada do hiperboloide de uma folha (4.17) pelo plano α . Em relação ao hiperboloide o cone (4.19) desempenha o mesmo papel das assíntotas (4.21) em relação à hipérbole γ , de modo que o hiperboloide aproxima-se cada vez mais do cone, à medida que as superfícies aumentam de tamanho, como sugere a Figura 4.28. A equação (4.17) pode ser fatorada e vista sob a forma:

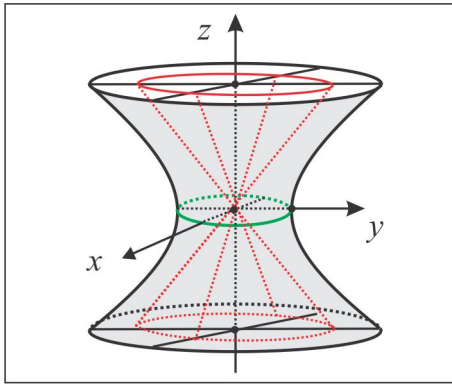


Figura 4.28: O Cone Assintótico.

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (4.22)$$

e recuperada por eliminação do parâmetro λ em qualquer dos sistemas seguintes de equações lineares:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = \lambda \left(1 + \frac{y}{b}\right) \quad e \quad \lambda \left(\frac{x}{a} \mp \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}.$$

OBSERVAÇÃO 4.4.3 (Cone x Hiperboloide 2) Como ocorre com o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas (4.18) também possui um cone assintótico, descrito por:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (4.23)$$

A Figura 4.29 ilustra o hiperboloide de duas folhas (4.18) e o respectivo cone assintótico (4.23).

As quádricas não cêntricas são aquelas governadas por uma equação canônica do tipo:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (4.24)$$

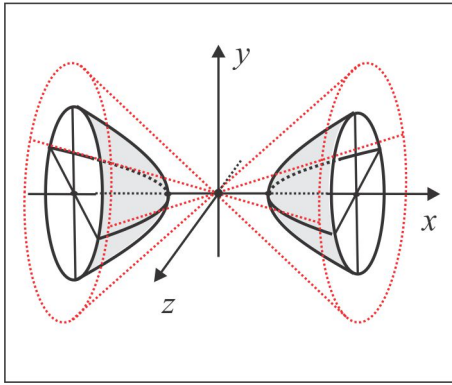


Figura 4.29: O Cone Assintótico.

com cada um dos coeficientes a , b e c não nulo. Identificamos em (4.24) dois planos de simetria (plano xz e plano yz) e um eixo de simetria (eixo Oz), mas, a quádrlica não tem um centro de simetria.

► **O PARABOLOIDE ELÍPTICO:** Os coeficientes dos termos quadráticos em (4.24) têm mesmo sinal. Como caso representativo, vamos discutir a quádrlica de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (4.25)$$

em que c e z são positivos. As outras formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx$$

e cada forma tem duas variações a depender do sinal do coeficiente c .

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O parabolóide elíptico (4.25) intercepta os eixos Ox , Oy e Oz na origem, o vértice do parabolóide elíptico.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando $z = 0$ na equação (4.25), encontramos $x = 0$ e $y = 0$ e, assim, sobre o plano xy , o traço é a origem. Fazendo $y = 0$, vemos que o traço do parabolóide elíptico no plano xz é a parábola:

$$\gamma_1 : x^2 = (a^2 c)z.$$

O traço no plano yz é determinado considerando $x = 0$ na equação (4.25) e encontramos a parábola:

$$\gamma_2 : y^2 = (b^2 c)z.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.25) não é alterada ao trocar o sinal de x ou y . Isto indica que o parabolóide elíptico é simétrico em relação aos planos xz e yz .

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos $z = k$, $k > 0$, paralelos ao plano xy , são as elipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck, \quad z = k. \quad (4.26)$$

(v) **Extensão da Superfície:** De (4.26) deduzimos que à medida que $k \rightarrow \infty$ a elipse tem seus eixos aumentados e, conseqüentemente, o parabolóide elíptico se expande arbitrariamente.

A Figura 4.30 ilustra graficamente uma porção do parabolóide elíptico (4.25), o qual se assemelha ao parabolóide de revolução da Figura 4.20, onde se tem $a = b$.

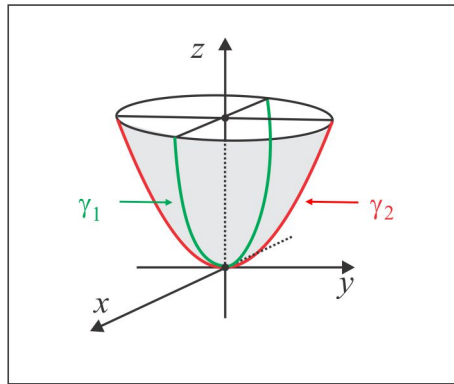


Figura 4.30: O Parabolóide Elíptico.

► **O PARABOLOIDE HIPERBÓLICO (SELA):** Os coeficientes dos termos quadráticos em (4.24) têm sinais opostos. Como caso representativo, vamos discutir a quádrlica de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \quad (4.27)$$

em que c é negativo. As outras formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cx$$

e cada forma tem duas variações a depender do sinal do coeficiente c .

(i) **Interseção com os eixos coordenados:** O parabolóide hiperbólico (4.27) intercepta os eixos Ox , Oy e Oz na origem.

(ii) **Traços nos planos coordenados:** Considerando $y = 0$ na equação (4.27), vemos que o traço do parabolóide hiperbólico no plano xz é a parábola:

$$\gamma_1 : x^2 = (a^2c)z, \quad y = 0.$$

O traço no plano yz é determinado considerando $x = 0$ na equação (4.25) e encontramos a parábola:

$$\gamma_2 : y^2 = (-b^2c)z, \quad x = 0.$$

Sobre o plano xy , o traço é o par de retas concorrentes:

$$\gamma_3 : bx + ay = 0, \quad z = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_4 : bx - ay = 0, \quad z = 0.$$

(iii) **Simetria:** A equação (4.27) não é alterada ao trocar o sinal de x ou y . Isto indica que o parabolóide hiperbólico é simétrico em relação aos planos xz e yz .

(iv) **Seções por planos paralelos aos planos coordenados:** As seções pelos planos $z = k$, $k > 0$, paralelos ao plano xy , são as hipérboles:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck, \quad z = k. \quad (4.28)$$

As seções por planos paralelos aos planos xz e yz são, respectivamente, as parábolas:

$$x^2 = (a^2c)z + \frac{k^2}{b^2}, \quad y = k \quad \text{e} \quad y^2 = (-b^2c)z + \frac{k^2}{a^2}, \quad x = k$$

(v) **Extensão da Superfície:** À medida que $k \rightarrow \infty$, deduzimos de (4.28) que os ramos da hipérbole afaztam-se do eixo Oz e, portanto, o parabolóide hiperbólico (4.27) se expandem arbitrariamente.

A Figura 4.31 ilustra graficamente uma porção do parabolóide hiperbólico (4.27).

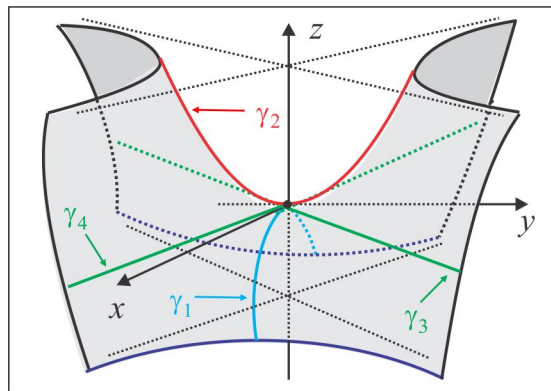
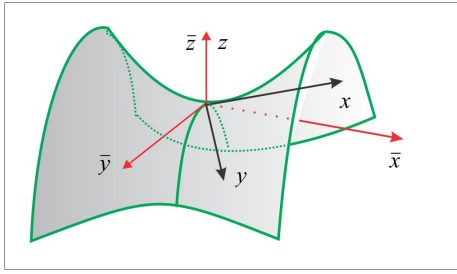
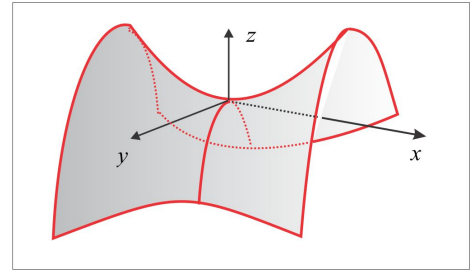


Figura 4.31: O Parabolóide Hiperbólico.

OBSERVAÇÃO 4.4.4 Nas Figuras 4.32 e 4.33 apresentamos a mesma quádrlica (Sela) correspondendo às equações $z = x^2 - y^2$ e $z = xy$. No caso da Figura 4.32, poderíamos ter girado a quádrlica de 45° , que é o ângulo de rotação que transforma a equação $z = xy$ em $2z = \bar{x}^2 - \bar{y}^2$. Para uma melhor visualização gráfica, deixamos a quádrlica e o eixo Oz fixos e giramos os eixos Ox e Oy de 45° .

Figura 4.32: A Sela $z = xy$ Figura 4.33: A Sela $z = x^2 - y^2$

Como fonte de referência, exibimos abaixo as formas representativas das principais Quádricas, sendo as quatro primeiras cêntricas e as duas últimas não cêntricas.

(a) Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. (Figura 4.24)

(b) Hiperbolóide de Uma Folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Figura 4.25)

(c) Hiperbolóide de Duas Folhas: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Figura 4.26)

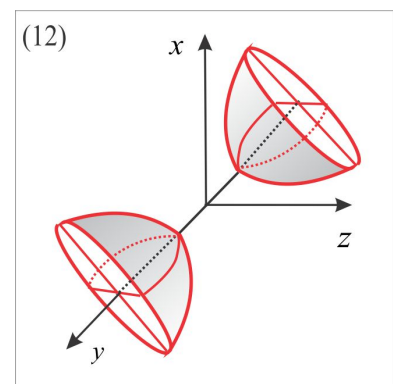
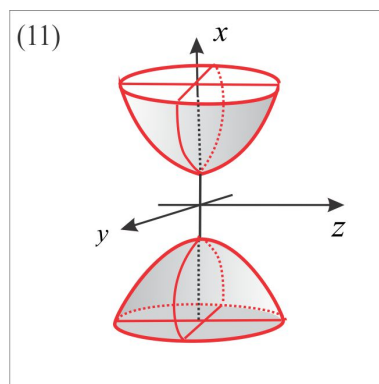
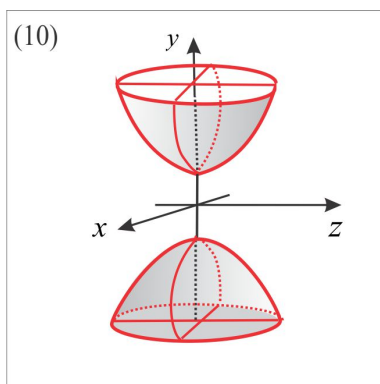
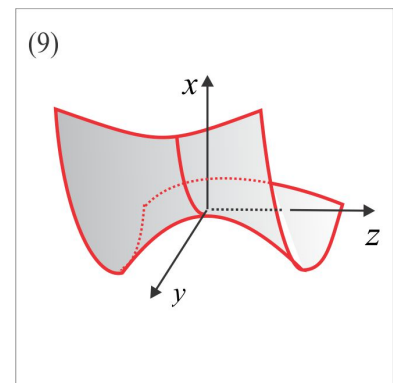
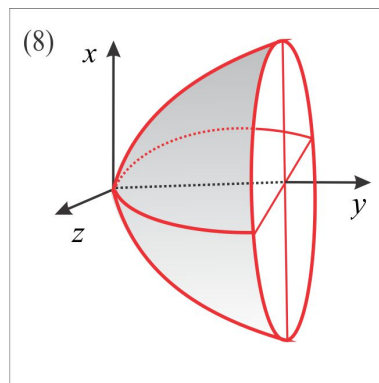
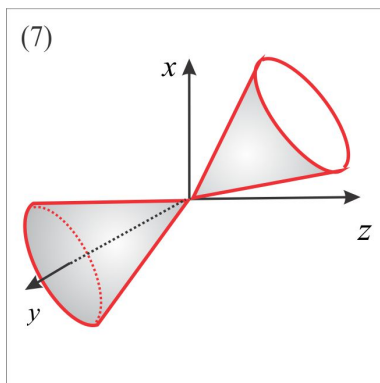
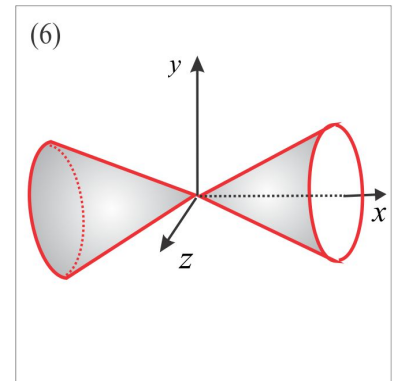
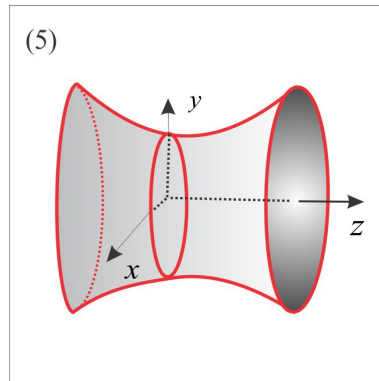
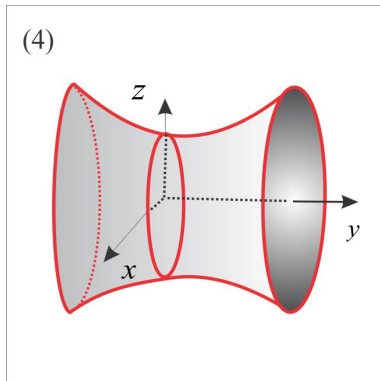
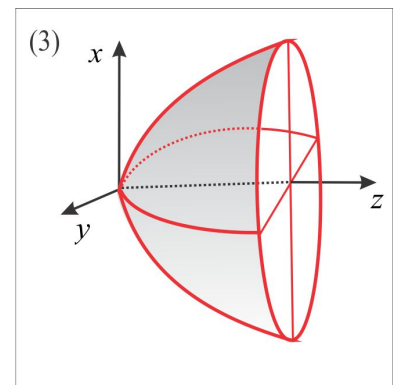
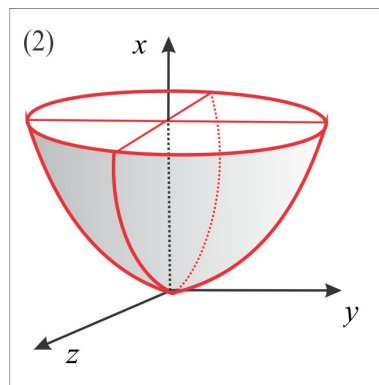
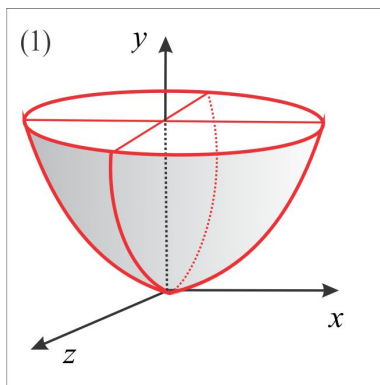
(d) Cone Quádrico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$ (Figura 4.27)

(e) Paraboloide Elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$ (Figura 4.30)

(f) Paraboloide Hiperbólico (sela): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ (Figura 4.31)

Agora, como parte do processo de treinamento, faça a associação entre o gráfico e a equação. Note que efetuamos mudanças no posicionamento dos eixos coordenados.

$$\begin{array}{llll}
 () \frac{x}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 & () y - \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 & () x + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 & () \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\
 () \frac{x^2}{a^2} - y + \frac{z^2}{c^2} = k & () x - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 & () \frac{x^2}{a^2} - y^2 + \frac{z^2}{c^2} = 0 & () \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\
 () z - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k & () x^2 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 & () \frac{x}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 & () \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1
 \end{array}$$



1. Determine o vértice e o foco da parábola interseção do plano $y = 2$ com o parabolóide hiperbólico $9y^2 - 36x^2 = 16z$.

2. Determine os vértices e os focos da elipse interseção do plano $y = 3$ com o elipsoide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

3. Determine a interseção do parabolóide $4y^2 - 9x^2 = 36z$ com o plano $3x + 2y - z = 0$.

4. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$, tais que $\|\overrightarrow{AP}\|^2 + \|\overrightarrow{BP}\|^2 = 9$, sendo $A(1, -1, 2)$ e $B(2, 1, 0)$.

5. Determine a equação da esfera de centro $C(3, 2, -2)$ e tangente ao plano $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

6. Determine a equação do parabolóide elíptico com vértice na origem, eixo sobre o eixo z e que passa nos pontos $A(1, 0, 1)$ e $B(0, 2, 1)$.

7. A reta $2x - 3y = 6$, $z = 0$, gira em torno do eixo y . Determine a equação do cone resultante, seu vértice e sua interseção com o plano yz .

8. Considere um sistema de coordenadas onde os eixos \bar{x} , \bar{y} e \bar{z} são as retas suportes dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Escreva a equação da superfície $S : xy + yz + xz = 0$ no novo sistema de coordenadas e identifique-a.

9. Considere um sistema de coordenadas $O\bar{x}$, $O\bar{y}$ e $O\bar{z}$ determinado pela origem e pelos pontos $A(1, -1, 1)$, $B(2, 1, -1)$ e $C(0, 1, 1)$. Descreva a superfície $S : 5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 6yz + 8 = 0$ nesse sistema de coordenadas e identifique-a.

10. Identifique as seguintes quádricas.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.

(b) $x^2 + y^2 - 2y - z + 1 = 0$.

(c) $-x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$.

(d) $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 12x + 12y + 2z + 28 = 0$.

(e) $8x^2 - 4xy + 5y^2 + z^2 = 36$.

(f) $3x^2 = 2y + 2z$.

(g) $z^2 - 2xy + 2x + 2y - 4z = 0$.

(h) $z = xy$.

11. Determine e esboce as interseções do cone quádrico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$ com os seguintes planos:

(a) $z = 2$ (b) $y = 2$ (c) $y - bz = 0$.

12. Seja γ a curva interseção do plano $x + y + z = 0$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Identifique a curva γ e sua projeção no plano xy .

RESPOSTAS & SUGESTÕES

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.1

1. Fazer
2. Fazer
3. (a) $9x^2 + z^2 - 6xy - 36y + 12z = 0$.
 (b) $x^2 + 4z^2 - 4xz + y = 1$.
 (c) $x^2 - z^2 - 4y^2 - 4yz = 1$.
4. $S_3 : y = z^6$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.2

1. $a^2(x^2 + z^2) = (y - b)^2$.
2. $5(x^2 + y^2) - z^2 + 4xy + 8xz - 8yz = 0$.
3. $y^2 + z^2 = 3x^2$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.3

1. (a) $x^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 3$.

- (b) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$.
- (c) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 13$.
- (d) $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9$.
2. (a) $x^2 + z^2 + 2y = 6$.
- (b) $y^4 - 4x^2 - 4z^2 = 0$.
- (c) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z = 6$.
- (d) $x^6 - y^2 - z^2 = 0$.
- (e) $z - \exp(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$.
- (f) $(x^2 + y^2)z^2 = 1$.
- (g) $x^2 + y^2 = R^2$.
- (h) $x^2 + z^2 = 4y$.
- (i) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$.
- (j) $y^2 + z^2 = \sin^2 x$.
3. (a) $\gamma : x^2 - z^2 = 4, y = 0$; eixo z .
- (b) $\gamma : y = \sqrt{|z|}, x = 0$; eixo z .
- (c) $\gamma : y^2 - |y| - z = x, x = 0$; eixo z .
4. $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(y^2 + z^2)$
5. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 40(x^2 + y^2) + 24z^2 + 144 = 0$
6. (a) Uma elipse.
- (b) A circunferência de centro $C(0, 2, 0)$ e raio $R = 1$.
- (c) Um cilindro circular reto.
- (d) Uma hipérbole.
- (e) Uma parábola.
7. $P(1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$; e $Q(3, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$.
8. (a) $1 < |k| < \sqrt{2}$; (b) $|k| < 1$.

ESCREVENDO PARA APRENDER 4.4

1. $V(0, 2, 9/4)$; ; $F(0, 2, 77/36)$.
 2. $V(\pm 12/5, 3, 0)$ e $V(0, 3, \pm 8/5)$; ; $F(\pm 4\sqrt{5}/5, 3, 0)$.
 3. As retas concorrentes $r_1 : x = 2t, y = 3t, z = 12t$ e $r_2 : x = 2t, y = 18 - 3t, z = 36$.
 4. A esfera de centro $C(3/2, 1, 3/2)$ e raio $R = \sqrt{15}/2$.
 5. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 2)^2 = 14$.
 6. $4x^2 + y^2 = 4z$.
 7. $4x^2 - 9(y - 2)^2$; $V(0, 2, 0)$; $3y \pm 2z = 6$.
 8. O cone $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 2\bar{z}^2$.
 9. o hiperboloide $3\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - 2\bar{z}^2 + 8 = 0$.
 10. (a) Esfera.
(b) Parabolóide de Revolução.
(c) Cone Quádrico.
(d) Hiperboloide de uma Folha.
(e) Elipsoide.
(f) Cilindro.
(g) Hiperboloide de duas Folhas.
(h) Parabolóide Hiperbólico (sela).
 11. (a) Elipse (b) Hipérbole (c) Parábola.
 12. A curva γ é uma circunferência e sua projeção no plano xy é uma elipse.
-



Introdução

5.1 Espaço Vetorial

Em construção



Introdução

6.1 Núcleo & Imagem

Em Construção



Introdução

7.1 Produto Interno

Em construção



Introdução

8.8 Diagonalização

Em construção
